T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEJENERE HARDY TOPLAMLARI

M. Cihat DAĞLI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2010

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEJENERE HARDY TOPLAMLARI

M. Cihat DAĞLI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2010

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEJENERE HARDY TOPLAMLARI

M. Cihat DAĞLI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez .../ .../ 2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından (   ) not takdir edilerek oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Veli KURT ....
Yrd. Doç. Dr. Yusuf SUCU ....
Yrd. Doç. Dr. Mümün CAN ....
(Danışman)

ÖZET

DEJENERE HARDY TOPLAMLARI

M. Cihat DAĞLI

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mümün CAN

Aralık 2010, 38 Sayfa

Bu çalışmada, Theta fonksiyonlarının logaritmik dönüşüm formüllerinde görülen Hardy toplamlarının dejenere halleri tanımlanmıştır. Dejenere Hardy toplamları, dejenere Dedekind toplamları cinsinden ifade edilmiştir. Ayrıca, dejenere Hardy toplamlarının sağladıkları reciprocity bağıntıları, dejenere Dedekind toplamları yardımıyla ispat edilmiş ve bu toplamların bazı özellikleri incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Dedekind Toplamları, Hardy Toplamları, Bernoulli Polinomları, Dejenere Bernoulli Polinomları

JÜRİ: Prof. Dr. Veli KURT

Yrd. Doç. Dr. Yusuf SUCU

Yrd. Doç. Dr. Mümün CAN

ABSTRACT

DEGENERATE HARDY SUMS

M. Cihat DAĞLI

M. Sc. Thesis in Mathematics

Adviser: Asst. Prof. Dr. Mümün CAN

December 2010, 38 Pages

In this work, the degenerate manner of the Hardy sums, arising in the transformation formulas of logarithms of theta functions, is defined. The connections between degenerate Hardy sums and degenerate Dedekind sums are derived. The reciprocity laws satisfied by degenerate Hardy sums are proved by means of degenerate Dedekind sums.

Furthermore, several properties of these sums are investigated.

KEY WORDS: Dedekind Sums, Hardy Sums, Bernoulli Polynomials, Degenerate Bernoulli Polynomials.

COMMITTEE: Prof. Dr. Veli KURT

Asst. Prof. Dr. Yusuf SUCU

Asst. Prof. Dr. Mümün CAN

ÖNSÖZ

Bu çalışma esas olarak Önbilgiler ve Bulgular olmak üzere iki bölümden oluşmaktadır. Bulgular bölümünde kullanılacak olan Bernoulli polinomları ve fonksiyonları, Dedekind toplamları, genelleştirilmiş Hardy toplamları, dejenere Bernoulli polinomları ve fonksiyonları, dejenere Dedekind toplamları ve dejenere Euler polinomları ve fonksiyonları Önbilgiler bölümünde tanıtılmış ve bazı özellikleri verilmiştir.

Bulgular bölümünde ise dejenere Hardy toplamları tanımlanarak bunların dejenere Dedekind toplamları cinsinden ifadeleri verilmiştir. Ayrıca, dejenere Hardy toplamlarının sağladıkları reciprocity bağıntıları, dejenere Dedekind toplamları yardımıyla elde edilmiş ve bu toplamların bazı özellikleri incelenmiştir.

Bu tez çalışmasının, bu alandaki çalışmalara önemli katkılar sağlayacağı inancındayız.

Bu çalışma boyunca bilgisini ve zamanını benimle paylaşan, desteğini esirgemeyen danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Mümün CAN' a, yardımlarını gördüğüm değerli bölüm başkanım Prof. Dr. Veli Kurt' a ve Yrd. Doç. Dr. Mehmet Cenkci' ye teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

h, k pozitif tamsayılar ve $(h, k) = 1$ olmak üzere Dedekind $\eta-$fonksiyonu teorisinde ortaya çıkan $s(h, k)$ Dedekind toplamları 1892 yılında R. Dedekind tarafından

$$s(h,k) = \sum_{j(mod)k} \left(\left(\frac{j}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{hj}{k}\right)\right)$$

olarak tanımlanmıştır. Burada, $[x]$ herhangi bir x reel sayısının tam değeri olmak üzere $((x))$ fonksiyonu

$$((x)) = \begin{cases} x - [x] - \frac{1}{2}, & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 \quad , & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ile tanımlanır.

Dejenere Dedekind toplamları Cenkci vd (2007) tarafından

$$s_n(h,k;x,y|\lambda) = \sum_{j(mod)k} \overline{\beta}_1\left(\lambda, \frac{j+y}{k}\right)\overline{\beta}_n\left(\lambda, h\frac{j+y}{k}+x\right)$$

eşitliği ile tanımlanmıştır ve bu toplamların sağladığı reciprocity formülü ispatlanmıştır. Burada $\overline{\beta}_n(\lambda, x)$, n-inci dejenere Bernoulli fonksiyonudur (Sayfa 9).

Hardy toplamları, Theta fonksiyonlarının logaritmik dönüşüm formüllerinde görülmektedir. Berndt (1978) ve Goldberg (1981), $\frac{az+b}{cz+d}$ modüler dönüşümünün a, b, c, d katsayılarına bağlı olarak $\log \theta_i(z)$, $i = 3, 4$ için altı farklı dönüşüm elde etmişlerdir. Bu dönüşüm formüllerinde, Dedekind toplamına benzer olan, Hardy toplamları ya da Berndt' in aritmetik toplamları olarak adlandırılan ve

$$\begin{aligned} S(h,k) &= \sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j+1+\left[\frac{hj}{k}\right]}, \quad s_3(h,k) = \sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j\left(\left(\frac{hj}{k}\right)\right), \\ s_4(h,k) &= \sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{\left[\frac{hj}{k}\right]} \end{aligned}$$

eşitlikleri ile verilen üç farklı toplam görülmektedir. Bu toplamların temel özelliği olan reciprocity bağıntılarının farklı ispatları Berndt (1978), Berndt ve Evans (1980), Goldberg (1981), Apostol ve Vu (1982), Berndt ve Goldberg (1984), Sitaramachandrarao (1987) ve Şimşek (2006) tarafından verilmiştir.

Can vd (2006) tarafından, genelleştirilmiş Hardy toplamları, $r \geq 1$ için

$$\begin{aligned} S_r(h,k) &= 4\sum_{j=1}^{k-1} \overline{B}_r\left(\frac{(h+k)j}{2k}\right), \quad s_{3,r}(h,k) = \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j\, \overline{B}_r\left(\frac{hj}{k}\right), \\ s_{4,r}(h,k) &= -4\sum_{j=1}^{k-1} \overline{B}_r\left(\frac{hj}{2k}\right) \end{aligned}$$

eşitlikleri ile tanımlanmıştır. Burada $\overline{B}_n(x)$, n-inci Bernoulli fonksiyonudur (Sayfa 3). Bu şekilde tanımlanan genelleştirilmiş Hardy toplamlarının reciprocity formülleri, genelleştirilmiş Dedekind toplamları cinsinden ifadeleri ve bazı özellikleri Can vd (2006) ve Can (2006) tarafından verilmiştir.

Bu çalışmada, dejenere Hardy toplamları

$$\begin{aligned} S_r(h,k|\lambda) &= 4\sum_{j=0}^{k-1} \overline{\beta}_r\left(\lambda, \frac{(h+k)j}{2k}\right), \quad s_{3,r}(h,k|\lambda) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j\, \overline{\beta}_r\left(\lambda, \frac{hj}{k}\right), \\ s_{4,r}(h,k|\lambda) &= -4\sum_{j=0}^{k-1} \overline{\beta}_r\left(\lambda, \frac{hj}{2k}\right) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu şekilde tanımlanan dejenere Hardy toplamlarının reciprocity formülleri ispatlanmış, dejenere Dedekind toplamları cinsinden ifadeleri verilmiştir. Ayrıca, bu toplamların bazı özellikleri incelenmiştir.

2. ÖNBİLGİLER

Bu bölümde, Bernoulli polinomları ve fonksiyonları, Dedekind toplamları, genelleştirilmiş Hardy toplamları, dejenere Bernoulli polinomları ve fonksiyonları, dejenere Dedekind toplamları ve dejenere Euler polinomları ve fonksiyonları tanıtılacak ve bazı özellikleri verilecektir.

Tanım 2.1 *$B_n(x)$ Bernoulli polinomları,*

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!},(|t|<2\pi)$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Apostol 1950, Kanemitsu ve Tsukada 2007).

$B_n(x)$' in tanımında $x=0$ alınırsa $B_n(0)=B_n$, n-inci Bernoulli sayısı elde edilir. $B_0=1$, $B_1=-\frac{1}{2}$, $B_2=\frac{1}{6},\cdots$ ve her $n\geq 1$ için $B_{2n+1}=B_{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right)=0$ dır (Jordan 1965). $B_n(x)$ n-inci Bernoulli polinomunun Bernoulli sayıları cinsinden ifadesi

$$B_n(x)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_jx^{n-j}$$

dir (Apostol 1976).

n-inci Bernoulli fonksiyonu $\overline{B}_n(x)$, $n>1$ için $\overline{B}_n(x)=B_n(\{x\})$ ve $n=1$ için

$$\overline{B}_1(x)=\begin{cases}B_1(\{x\}) & ,\ x\notin\mathbb{Z},\\ 0 & ,\ x\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

ile tanımlanır. Burada $\{x\}$, x' in kesir kısmıdır. $\overline{B}_n(x)$ n-inci Bernoulli fonksiyonu 1 ile periyodik bir fonksiyondur.

Ayrıca, $\overline{B}_n(x)$ Bernoulli fonksiyonu ve $B_n(x)$ Bernoulli polinomu, herhangi bir x için

$$\sum_{j=0}^{m-1}\overline{B}_n\left(x+\frac{j}{m}\right)=m^{1-n}\overline{B}_n(mx)$$

ve

$$\sum_{j=0}^{m-1}B_n\left(x+\frac{j}{m}\right)=m^{1-n}B_n(mx)$$

Raabe bağıntısını sağlar.

2.1. Dedekind Toplamları

Tanım 2.2 *(Rademacher ve Grosswald 1972) $h, k \in \mathbb{Z}$, $k > 1$ olmak üzere $s(h,k)$ ile gösterilen Dedekind toplamı,*

$$s(h,k) = \sum_{j=1}^{k-1} \left(\left(\frac{j}{k}\right)\right) \left(\left(\frac{hj}{k}\right)\right)$$

eşitliği ile tanımlanır.

Teorem 2.3 *Dedekind toplamları, $(h,k) = 1$ olmak üzere*

$$s(h,k) + s(k,h) = \frac{1}{12}\left(\frac{h}{k} + \frac{k}{h} + \frac{1}{hk}\right) - \frac{1}{4}$$

reciprocity bağıntısını sağlar (Rademacher ve Whitheman 1941, Rademacher ve Grosswald 1972).

Bu toplamlar, birçok matematikçi tarafından genelleştirilmiş ve bunlara karşılık gelen reciprocity bağıntıları farklı yollardan ispatlanmıştır (Rademacher ve Whitheman 1941, Apostol 1950, Apostol 1952, Carlitz 1954, 1964, Rademacher 1964, Rademacher ve Grosswald 1972, Berndt 1973, Berndt 1975, Takàcs 1979, Kurt 1990, 1991, 1997, Nagasaka vd 2003, Ota 2003, Sekine 2005, Cenkci vd 2007).

Apostol' un (1950) tanımladığı genelleştirilmiş Dedekind toplamı, n, h, k pozitif tamsayılar olmak üzere

$$s_n(h,k) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{k} \overline{B}_n\left(\frac{hj}{k}\right)$$

şeklindedir. Bu toplamın sağladığı reciprocity bağıntısı, $(h,k) = 1$ ve n tek tamsayıları için

$$hk^n s_n(h,k) + kh^n s_n(k,h) = \frac{1}{(n+1)} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^j B_j h^j B_{n+1-j} k^{n+1-j} + \frac{nB_{n+1}}{(n+1)}$$

şeklindedir. $n = 1$ olması durumunda $\overline{B}_1(x) = ((x))$ olduğundan $s_1(h,k) = s(h,k)$ olur. Ayrıca, Takàcs (1979) Dedekind toplamlarının bir diğer genelleştirmesini

$$s_r(a, b|x, y) = \sum_{j=0}^{b-1} P_r\left(\frac{a(j+y)}{b} + x\right) P_1\left(\frac{j+y}{b}\right)$$

eşitliği ile tanımlamıştır. Burada $r = 0, 1, 2, ...$ olmak üzere $P_r(x)$ fonksiyonu, $0 \leq x < 1$ için $P_r(x) = B_r(x)$ olarak tanımlanır. Takàcs (1979) reciprocity bağıntısını ise, $r = 0, 1, 2, ...$ olmak üzere a ve b pozitif tamsayılar ve x ve y reel sayıları için

$$\begin{aligned}&(r+1)\left\{ab^r s_r(a,b|x,y) + ba^r s_r(b,a|y,x)\right\}\\ &\quad = \sum_{j=0}^{r+1}\binom{r+1}{j} b^j a^{r+1-j} P_j(x) P_{r+1-j}(y) + r P_{r+1}(ay+bx)\end{aligned}$$

olarak ispatlamıştır.

2.2. Hardy Toplamları

$z \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ olmak üzere $\theta_3(z)$ ve $\theta_4(z)$ Theta fonksiyonları

$$\theta_3(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - e^{\pi i z 2n}\right)\left(1 + e^{\pi i z(2n-1)}\right)^2, \ \theta_4(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - e^{\pi i z 2n}\right)\left(1 - e^{\pi i z(2n-1)}\right)^2$$

şeklinde tanımlanır.

Berndt (1978) ve Goldberg (1981), $\frac{az+b}{cz+d}$ modüler dönüşümünün a, b, c, d katsayılarına bağlı olarak $\log \theta_i(z)$, $i = 3, 4$ için altı farklı dönüşüm elde etmişlerdir. Bu dönüşüm formüllerinde, Dedekind toplamına benzer olan, Hardy toplamları ya da Berndt' in aritmetik toplamları olarak adlandırılan bu toplamların üç tanesi

$$\begin{aligned}&S(h,k) = \sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j+1+\left[\frac{hj}{k}\right]}, \quad s_3(h,k) = \sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j\left(\left(\frac{hj}{k}\right)\right),\\ &s_4(h,k) = \sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{\left[\frac{hj}{k}\right]}\end{aligned}$$

eşitlikleri ile verilmiştir. Burada $h, k \in \mathbb{Z}$, $k > 1$' dir. Dedekind toplamlarında olduğu gibi bu toplamların da en önemli özellikleri reciprocity bağıntılarıdır.

Bu reciprocity bağıntıları, $h, k > 1$ ve $(h, k) = 1$ olmak üzere $(h + k)$ tek ise

$$S(h,k) + S(k,h) = 1$$

ve k tek ise

$$2s_3(h,k) - s_4(k,h) = 1 - \frac{h}{k}$$

eşitlikleri ile verilir (Berndt 1978).

Yukarıda ifadeleri verilen Hardy toplamlarının trigonometrik serilerle ifadeleri aşağıdadır.

Teorem 2.4 *$h, k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$ ve $(h, k) = 1$ olsun. Eğer $(h + k)$ tek ise*

$$\begin{aligned} S(h,k) &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\tan\frac{\pi h\,(2n-1)}{2k} \\ &= \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\tan\left(\frac{\pi h\,(2j-1)}{2k}\right)\cot\left(\frac{\pi\,(2j-1)}{2k}\right), \end{aligned}$$

eğer k tek ise

$$\begin{aligned} s_3(h,k) &= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\tan\frac{\pi hn}{k} \\ &= \frac{1}{2k}\sum_{j=1}^{k-1}\tan\left(\frac{\pi hj}{k}\right)\cot\left(\frac{\pi j}{k}\right), \end{aligned}$$

eğer h tek ise

$$\begin{aligned} s_4(h,k) &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cot\frac{\pi h\,(2n-1)}{2k} \\ &= \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{c}\cot\left(\frac{\pi h\,(2j-1)}{2k}\right)\cot\left(\frac{\pi\,(2j-1)}{2k}\right) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır (Berndt ve Goldberg 1984).

Bu toplamların Dedekind toplamı cinsinden ifadeleri aşağıdaki gibidir:

Teorem 2.5 *(Sitaramachandrarao 1987) $h, k \in \mathbb{Z}$, $k > 1$ ve $(h, k) = 1$ olsun. Eğer $(h + k)$ tek ise*

$$S(h,k) = -20s(h,k) + 8s(h,2k) + 8s(2h,k),$$

eğer k tek ise

$$s_3(h,k) = 2s(h,k) - 4s(2h,k),$$

eğer h tek ise

$$s_4(h,k) = -4s(h,k) + 8s(h,2k)$$

dir.

Ayrıca, $(h+k)$ çift ise $S(h,k)=0$, k çift ise $s_3(h,k)=0$ ve h çift ise $s_4(h,k)=0$' dır.

Bu toplamların bazı özellikleri Berndt (1978), Goldberg (1981), Berndt ve Goldberg (1984), Pettet ve Sitaramachandrarao (1987), Sitaramachandrarao (1987), Meyer (1997a, 1997b), Şimşek (1998) ve Can (2000, 2004) tarafından incelenmiştir.

Tanım 2.6 *(Can vd 2006) Genelleştirilmiş Hardy toplamları, $h,k,r\in\mathbb{Z}^+$ için*

$$\begin{aligned} S_r(h,k) &= 4\sum_{j=1}^{k-1}\overline{B}_r\left(\frac{(h+k)j}{2k}\right), \quad s_{3,r}(h,k)=\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j\,\overline{B}_r\left(\frac{hj}{k}\right), \\ s_{4,r}(h,k) &= -4\sum_{j=1}^{k-1}\overline{B}_r\left(\frac{hj}{2k}\right) \end{aligned}$$

eşitlikleri ile tanımlanır.

Bu şekilde genelleştirilmiş Hardy toplamlarının genelleştirilmiş Dedekind toplamları cinsinden ifadeleri ise,

$$S_r(h,k)=(-16-2^{3-r})s_r(h,k)+8s_r(h,2k)+2^{4-r}s_r(2h,k),\ (h+k\ \text{ tek}) \quad (2.1)$$

$$s_{3,r}(h,k)=2s_r(h,k)-4s_r(2h,k),\ (k\ \text{ tek}) \quad (2.2)$$

$$s_{4,r}(h,k)=-2^{3-r}s_r(h,k)+8s_r(h,2k),\ (h\ \text{ tek}) \quad (2.3)$$

şeklindedir (Can 2006, Can vd 2006). Burada $r\geq 1$ tek ve $(h,k)=1$' dir.

Teorem 2.7 *(Can vd 2006) $r\geq 1$ herhangi tek tamsayı ve $(h,k)=1$ olmak üzere genelleştirilmiş Hardy toplamları,*

$h+k$ tek ise

$$\begin{aligned} &(r+1)\left\{hk^rS_r(h,k)+kh^rS_r(k,h)\right\} \\ &=4\sum_{j=0}^{r+1}\binom{r+1}{j}(-1)^jB_jB_{r+1-j}h^jk^{r+1-j}(2^j-1)(2^{1-r}-2^{2-j}) \end{aligned}$$

ve k tek ise

$$
\begin{aligned}
&(r+1)\left\{2hk^r s_{3,r}(h,k) - kh^r 2^{r-1} s_{4,r}(k,h)\right\} \\
&= 4\sum_{j=0}^{r+1}\binom{r+1}{j}(-1)^j B_j B_{r+1-j} h^j k^{r+1-j}(1-2^j)
\end{aligned}
$$

reciprocity bağıntılarını sağlar.

Ayrıca, $r \geq 1$ herhangi tek tamsayı, $(h,k)=1$, $k>1$ ve q herhangi pozitif tamsayı olmak üzere

$(h+k)$ tek ise

$$
S_r(qh,qk) = \begin{cases} S_r(h,k) & ,q \ \text{ tek} \\ 0 & ,q \ \text{ çift} \end{cases} \tag{2.4}
$$

k tek ise

$$
s_{3,r}(qh,qk) = \begin{cases} s_{3,r}(h,k) & ,q \ \text{ tek} \\ 0 & ,q \ \text{ çift} \end{cases} \tag{2.5}
$$

h tek ise

$$
s_{4,r}(qh,qk) = \begin{cases} s_{4,r}(h,k) & ,q \ \text{ tek} \\ 0 & ,q \ \text{ çift} \end{cases} \tag{2.6}
$$

eşitlikleri sağlanır (Can vd 2006).

2.3. Dejenere Dedekind Toplamları

Tanım 2.8 *Herhangi λ rasyonel sayısı için yüksek mertebeden dejenere Bernoulli sayıları ve dejenere Bernoulli polinomları sırasıyla,*

$$
\left(\frac{t}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-1}\right)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty}\beta_n^{(\alpha)}(\lambda)\frac{t^n}{n!} \tag{2.7}
$$

$$
\left(\frac{t}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-1}\right)^{\alpha}(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}} = \sum_{n=0}^{\infty}\beta_n^{(\alpha)}(\lambda,x)\frac{t^n}{n!}
$$

üreteç fonksiyonları ile tanımlanır (Carlitz 1979).

$\alpha = 1$ için $\beta_n^{(1)}(\lambda) = \beta_n(\lambda)$ dejenere Bernoulli sayıları, $\beta_n^{(1)}(\lambda, x) = \beta_n(\lambda, x)$ dejenere Bernoulli polinomları olur. n-inci dejenere Bernoulli fonksiyonu ise

$$\overline{\beta}_n(\lambda, x) = \beta_n(\lambda, \{x\})$$

ile tanımlanır (Cenkci vd 2007). m keyfi tamsayısı için, $\overline{\beta}_n(\lambda, x + m) = \overline{\beta}_n(\lambda, x)$ eşitliği sağlanır.

m herhangi pozitif tamsayı olmak üzere dejenere Bernoulli polinomları,

$$\sum_{j=0}^{m-1} \beta_n \left(\lambda, x + \frac{j}{m} \right) = m^{1-n} \beta_n \left(m\lambda, mx \right)$$

Raabe teoremini sağlar (Carlitz 1979). Benzer olarak, m herhangi pozitif tamsayı olmak üzere dejenere Bernoulli fonksiyonları da,

$$\sum_{j=0}^{m-1} \overline{\beta}_n \left(\lambda, x + \frac{j}{m} \right) = m^{1-n} \overline{\beta}_n \left(m\lambda, mx \right) \tag{2.8}$$

Raabe teoremini sağlar (Cenkci vd 2007).

Tanım 2.9 *(Cenkci ve Howard 2007) Herhangi λ rasyonel sayısı için yüksek mertebeden dejenere Euler polinomları, $\lambda\mu = 1$ olmak üzere*

$$\left(\frac{2}{(1+\lambda t)^{\mu} + 1} \right)^{\alpha} (1 + \lambda t)^{\mu x} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^{(\alpha)}(\lambda, x) \frac{t^n}{n!} \tag{2.9}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır. $\lambda = 0$ için $\varepsilon_n^{(\alpha)}(0, x) = E_n^{(\alpha)}(x)$ olur. Burada $E_n^{(\alpha)}(x)$,

$$\left(\frac{2}{e^t + 1} \right)^{\alpha} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!}, (|t| < \pi)$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanan yüksek mertebeden Euler polinomudur.

Tanım 2.10 *(Cenkci vd 2007) $h, k \in \mathbb{Z}$ ve $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere dejenere Dedekind toplamları,*

$$s_n(h, k; x, y|\lambda) = \sum_{j(mod)k} \overline{\beta}_1 \left(\lambda, \frac{j+y}{k} \right) \overline{\beta}_n \left(\lambda, h\frac{j+y}{k} + x \right)$$

eşitliği ile tanımlanır.

Dejenere Dedekind toplamlarının reciprocity formülü, dejenere Bernoulli fonksiyonlarının özellikleri kullanılarak Cenkci vd (2007) tarafından

$$\begin{aligned}
&(n+1)\left\{hk^n s_n(h,k;x,y|h\lambda) + kh^n s_n(k,h;y,x|k\lambda)\right\} \\
&\quad = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} h^j \overline{\beta}_j(k\lambda,y) k^{n+1-j} \overline{\beta}_{n+1-j}(h\lambda,x) \\
&\quad + \frac{\lambda}{2} hk(n+1)(h+k+2n-2)\overline{\beta}_n(hk\lambda, hy+kx) + n\overline{\beta}_{n+1}(hk\lambda, hy+kx)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilmiştir.

Bu çalışmada $x=y=0$ özel durumu kullanılacağından, $x=y=0$ için yukarıdaki tanım ve reciprocity bağıntısı yeniden yazılırsa aşağıdaki gibi olur:

$$s_n(h,k;0,0|\lambda) = \sum_{j(mod)k} \overline{\beta}_1\left(\lambda, \frac{j}{k}\right) \overline{\beta}_n\left(\lambda, \frac{hj}{k}\right) \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
&(n+1)\left\{hk^n s_n(h,k;0,0|h\lambda) + kh^n s_n(k,h;0,0|k\lambda)\right\} \\
&\quad = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} h^j \beta_j(k\lambda) k^{n+1-j} \beta_{n+1-j}(h\lambda) \\
&\quad + \frac{\lambda}{2} hk(n+1)(h+k+2n-2)\overline{\beta}_n(hk\lambda, 0) + n\overline{\beta}_{n+1}(hk\lambda, 0).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Ayrıca kolaylık olması için çalışmanın bundan sonraki kısmında (2.10) ile verilen $s_n(h,k;0,0|\lambda)$ toplamı $s_n(h,k|\lambda)$ ile gösterilecektir.

3. BULGULAR

Bu bölümde dejenere Hardy toplamları tanımlanarak, onların dejenere Dedekind toplamları cinsinden ifadeleri verilecektir. Tanımlanan bu toplamların sağladıkları reciprocity bağıntıları ispatlanacak ve bazı özellikleri incelenecektir.

Bu bölüm boyunca $h, k \in \mathbb{Z}^+$ olduğu kabul edilecektir.

Tanım 3.1 $r \geq 1$ *olmak üzere dejenere Hardy toplamları,*

$$\begin{aligned} S_r(h,k|\lambda) &= 4\sum_{j=0}^{k-1} \overline{\beta}_r\left(\lambda, \frac{(h+k)j}{2k}\right), \quad s_{3,r}(h,k|\lambda) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j\, \overline{\beta}_r\left(\lambda, \frac{hj}{k}\right), \\ s_{4,r}(h,k|\lambda) &= -4\sum_{j=0}^{k-1} \overline{\beta}_r\left(\lambda, \frac{hj}{2k}\right) \end{aligned}$$

eşitlikleri ile tanımlanır.

$\lambda \to 0$ için $\overline{\beta}_r(0,x) = \overline{B}_r(x)$ olduğundan, $S_r(h,k|0) = S_r(h,k)$, $s_{3,r}(h,k|0) = s_{3,r}(h,k)$ ve $s_{4,r}(h,k|0) = s_{4,r}(h,k)$ elde edilir.

3.1. Dejenere Hardy Toplamlarının Dejenere Dedekind Toplamları Cinsinden İfadeleri

Bu bölümde dejenere Hardy toplamlarının dejenere Dedekind toplamları cinsinden ifadeleri verilecektir. Bu ifadeleri elde etmek için aşağıdaki teoremlere ihtiyaç vardır.

Önteorem 3.2 *q herhangi pozitif tamsayı ve $(h,k) = 1$ olmak üzere*

$$s_r(qh, qk|\lambda) = s_r(h,k|\lambda) + \frac{\lambda(q-1)}{2} k^{1-r}\overline{\beta}_r(k\lambda, 0)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $s_r(h,k|\lambda)$' nın tanımından,

$$s_r(qh, qk|\lambda) = \sum_{j=0}^{qk-1} \overline{\beta}_1\left(\lambda, \frac{j}{qk}\right) \overline{\beta}_r\left(\lambda, \frac{qhj}{qk}\right)$$

dır. Burada $v=0,1,...,q-1$ ve $\rho=0,1,...,k-1$ olmak üzere $j=vk+\rho$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned} s_r(qh,qk|\lambda) &= \sum_{v=0}^{q-1}\sum_{\rho=0}^{k-1}\overline{\beta}_1\left(\lambda,\frac{vk+\rho}{qk}\right)\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{h(vk+\rho)}{k}\right) \\ &= \sum_{\rho=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{h\rho}{k}\right)\sum_{v=0}^{q-1}\overline{\beta}_1\left(\lambda,\frac{v}{q}+\frac{\rho}{qk}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafındaki ikinci toplamda Raabe bağıntısı uygulanırsa

$$s_r(qh,qk|\lambda)=\sum_{\rho=0}^{k-1}\overline{\beta}_1\left(q\lambda,\frac{\rho}{k}\right)\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{h\rho}{k}\right)$$

elde edilir. $\overline{\beta}_1(\lambda,x)=x-[x]+\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} s_r(qh,qk|\lambda) &= \sum_{\rho=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{h\rho}{k}\right)\left\{\frac{\rho}{k}+\frac{q\lambda}{2}-\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}\right\} \\ &= \sum_{\rho=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{h\rho}{k}\right)\overline{\beta}_1\left(\lambda,\frac{\rho}{k}\right)+\frac{\lambda(q-1)}{2}\sum_{\rho=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{h\rho}{k}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. $(h,k)=1$ ve $\rho=0,1,...,k-1$ iken $h\rho\equiv 0,1,...,k-1 \pmod{k}$ olduğundan,

$$\sum_{\rho=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{h\rho}{k}\right)=\sum_{\rho=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{\rho}{k}\right)=k^{1-r}\overline{\beta}_r(k\lambda,0)$$

dır. Böylece istenilen elde edilir. ■

Önteorem 3.3 $(h,k)=1$ *olmak üzere* k *tek ise*

$$\sum_{j=0}^{k-1}\overline{\beta}_1\left(\lambda,\frac{j}{k}-\frac{1}{2}\right)\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{2hj}{k}\right)-s_r(2h,k|\lambda)=\frac{-1}{2}k^{1-r}\overline{\beta}_r(k\lambda,0)+\sum_{j=0}^{\frac{k-1}{2}}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{2hj}{k}\right)$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat. k tek tamsayısı için $s_r(2h,k|\lambda)$' nın tanımı yazılıp ortak çarpan parantezine alınırsa,

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{k-1}\overline{\beta}_1\left(\lambda,\frac{j}{k}-\frac{1}{2}\right)\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{2hj}{k}\right)-s_r(2h,k|\lambda) \\ &\quad=\sum_{j=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{2hj}{k}\right)\left\{\overline{\beta}_1\left(\lambda,\frac{j}{k}-\frac{1}{2}\right)-\overline{\beta}_1\left(\lambda,\frac{j}{k}\right)\right\} \end{aligned}$$

olur. $\overline{\beta}_1(\lambda,x)=x-[x]+\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}$ olduğundan,

$$\sum_{j=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{2hj}{k}\right)\left\{\frac{j}{k}-\frac{1}{2}-\left[\frac{j}{k}-\frac{1}{2}\right]+\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}-\frac{j}{k}+\left[\frac{j}{k}\right]-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right\} \quad (3.1)$$
$$=\frac{-1}{2}\sum_{j=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{2hj}{k}\right)+\sum_{j=0}^{\frac{k-1}{2}}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{2hj}{k}\right)$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafında Raabe bağıntısı uygulanırsa,

$$\frac{-1}{2}k^{1-r}\overline{\beta}_r(k\lambda,0)+\sum_{j=0}^{\frac{k-1}{2}}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{2hj}{k}\right)$$

elde edilir. (3.1) ifadesinde,

$$\left[\frac{j}{k}-\frac{1}{2}\right]=\begin{cases}-1 & ,0\leq j\leq\left[\frac{k}{2}\right]\\ 0 & ,\left[\frac{k}{2}\right]<j\leq k\end{cases}$$

ve $0\leq j<k$ için $\left[\frac{j}{k}\right]=0$ eşitlikleri kullanılmıştır. ■

Önteorem 3.4 $(h,k)=1$ *olmak üzere* k *tek ise*

$$\sum_{j=0}^{k-1}\overline{\beta}_1\left(\lambda,\frac{j}{k}-\frac{1}{2}\right)\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{2hj}{k}\right)+s_r(2h,k|\lambda)=s_r(h,k|\lambda)+\frac{\lambda}{2}k^{1-r}\overline{\beta}_r(k\lambda,0)$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat. k tek tamsayısı için $s_r(2h,k|\lambda)$' nın tanımı yazılıp ortak çarpan parantezine alınırsa,

$$\sum_{j=0}^{k-1}\overline{\beta}_1\left(\lambda,\frac{j}{k}-\frac{1}{2}\right)\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{2hj}{k}\right)+s_r(2h,k|\lambda)$$
$$=\sum_{j=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{2hj}{k}\right)\left\{\overline{\beta}_1\left(\lambda,\frac{j}{k}-\frac{1}{2}\right)+\overline{\beta}_1\left(\lambda,\frac{j}{k}\right)\right\}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafında $m=2$ için Raabe bağıntısı uygulanıp $\overline{\beta}_1(\lambda,x)$' in tanımı yerine yazılırsa,

$$\sum_{j=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{2hj}{k}\right)\overline{\beta}_1\left(2\lambda,\frac{2j}{k}\right)=\sum_{j=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{2hj}{k}\right)\left\{\frac{2j}{k}-\left[\frac{2j}{k}\right]+\lambda-\frac{1}{2}\right\}$$
$$=\sum_{j=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{2hj}{k}\right)\overline{\beta}_1\left(\lambda,\frac{2j}{k}\right)+\frac{\lambda}{2}\sum_{j=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{2hj}{k}\right)$$

elde edilir. k tek olduğunda $j=0,1,...,k-1$ iken $2j\equiv 0,1,...,k-1 \pmod k$ olduğundan, son ifade Raabe bağıntısından,

$$\sum_{j=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hj}{k}\right)\overline{\beta}_1\left(\lambda,\frac{j}{k}\right)+\frac{\lambda}{2}k^{1-r}\overline{\beta}_r\left(k\lambda,0\right)=s_r(h,k|\lambda)+\frac{\lambda}{2}k^{1-r}\overline{\beta}_r\left(k\lambda,0\right)$$

olur. ■

Teorem 3.5 *$r\geq 1$ ve $(h,k)=1$ olmak üzere k tek ise*

$$s_{3,r}(h,k|\lambda)=2s_r(h,k|\lambda)-4s_r(2h,k|\lambda)+\lambda k^{1-r}\overline{\beta}_r\left(k\lambda,0\right)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $s_{3,r}(h,k;\lambda)$ tanımından

$$\begin{aligned}
s_{3,r}(h,k|\lambda) &= \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hj}{k}\right)=\sum_{j\text{ çift}}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hj}{k}\right)-\sum_{j\text{ tek}}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hj}{k}\right)\\
&= 2\sum_{j=0}^{\frac{k-1}{2}}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{2hj}{k}\right)-\sum_{j=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hj}{k}\right)\\
&= 2\sum_{j=0}^{\frac{k-1}{2}}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{2hj}{k}\right)-k^{1-r}\overline{\beta}_r\left(k\lambda,0\right) \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.2), Önteorem 3.4 ve Önteorem 3.3' den istenilen elde edilir. ■

Not: $\lambda\to 0$ ve r tek tamsayısı için (2.2) bağıntısı ile verilen $s_{3,r}(h,k)$ genelleştirilmiş Hardy toplamının genelleştirilmiş Dedekind toplamı cinsinden ifadesi elde edilir.

Önteorem 3.6 *$(h,k)=1$ olmak üzere h tek ise*

$$s_r(h,2k|\lambda)+\sum_{j=0}^{2k-1}\overline{\beta}_1\left(\lambda,\frac{j}{2k}-\frac{1}{2}\right)\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hj}{2k}\right)=2^{1-r}s_r(h,k|2\lambda)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. h tek tamsayısı için, $s_r(h,2k|\lambda)$' nın tanımı yerine yazılıp ortak çarpan parantezine alınırsa,

$$\begin{aligned}
s_r(h,2k|\lambda) &+ \sum_{j=0}^{2k-1}\overline{\beta}_1\left(\lambda,\frac{j}{2k}-\frac{1}{2}\right)\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hj}{2k}\right)\\
&= \sum_{j=0}^{2k-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hj}{2k}\right)\left\{\overline{\beta}_1\left(\lambda,\frac{j}{2k}+\frac{1}{2}\right)+\overline{\beta}_1\left(\lambda,\frac{j}{2k}\right)\right\}
\end{aligned}$$

olur. Burada $m=2$ için Raabe bağıntısı uygulanırsa, eşitliğin sağ tarafı

$$\sum_{j=0}^{2k-1}\overline{\beta}_1\left(2\lambda,\frac{j}{k}\right)\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hj}{2k}\right)$$

olur. Toplam parçalanıp gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
s_r(h,2k|\lambda) &+ \sum_{j=0}^{2k-1}\overline{\beta}_1\left(\lambda,\frac{j}{2k}-\frac{1}{2}\right)\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hj}{2k}\right)\\
&= \sum_{j=0}^{k-1}\overline{\beta}_1\left(2\lambda,\frac{j}{k}\right)\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hj}{2k}\right)+\sum_{j=0}^{k-1}\overline{\beta}_1\left(2\lambda,\frac{j+k}{k}\right)\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{h(j+k)}{2k}\right)\\
&= \sum_{j=0}^{k-1}\overline{\beta}_1\left(2\lambda,\frac{j}{k}\right)\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hj}{2k}\right)+\sum_{j=0}^{k-1}\overline{\beta}_1\left(2\lambda,\frac{j}{k}\right)\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hj}{2k}+\frac{1}{2}\right)\\
&= \sum_{j=0}^{k-1}\overline{\beta}_1\left(2\lambda,\frac{j}{k}\right)\left\{\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hj}{2k}\right)+\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hj}{2k}+\frac{1}{2}\right)\right\}\\
&= 2^{1-r}\sum_{j=0}^{k-1}\overline{\beta}_1\left(2\lambda,\frac{j}{k}\right)\overline{\beta}_r\left(2\lambda,\frac{hj}{k}\right)\\
&= 2^{1-r}s_r(h,k|2\lambda)
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Önteorem 3.7 $(h,k)=1$ *olmak üzere* h *tek ise*

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{2k-1}\overline{\beta}_1\left(\lambda,\frac{j}{2k}-\frac{1}{2}\right)\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hj}{2k}\right) &- s_r(h,2k|\lambda)\\
&= \frac{-1}{2}(2k)^{1-r}\overline{\beta}_r(2k\lambda,0)+\sum_{j=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hj}{2k}\right)
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $s_r(h,2k|\lambda)$' nın tanımı yerine yazılıp ortak çarpan parantezine alınırsa,

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{2k-1}\overline{\beta}_1\left(\lambda,\frac{j}{2k}-\frac{1}{2}\right)\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hj}{2k}\right)-s_r(h,2k|\lambda)\\&=\sum_{j=0}^{2k-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hj}{2k}\right)\left\{\overline{\beta}_1\left(\lambda,\frac{j}{2k}-\frac{1}{2}\right)-\overline{\beta}_1\left(\lambda,\frac{j}{2k}\right)\right\}\end{aligned}$$

elde edilir. $\overline{\beta}_1(\lambda,x)$' in tanımı yerine yazılırsa eşitliğin sağ tarafı,

$$\sum_{j=0}^{2k-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hj}{2k}\right)\left\{\frac{j}{2k}-\frac{1}{2}-\left[\frac{j}{2k}-\frac{1}{2}\right]+\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}-\frac{j}{2k}+\left[\frac{j}{2k}\right]-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right\} \tag{3.3}$$

olur. Burada

$$\left[\frac{j}{2k}-\frac{1}{2}\right]=\begin{cases}-1 & ,0\le j\le k-1\\ 0 & ,k\le j\le 2k-1\end{cases}$$

ve $0\le j<k$ için $\left[\dfrac{j}{2k}\right]=0$ olduğundan,

$$\sum_{j=0}^{2k-1}\overline{\beta}_1\left(\lambda,\frac{j}{2k}-\frac{1}{2}\right)\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hj}{2k}\right)-s_r(h,2k|\lambda)=\frac{-1}{2}(2k)^{1-r}\overline{\beta}_r(2k\lambda,0)+\sum_{j=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hj}{2k}\right)$$

elde edilir. ■

Teorem 3.8 *$r\ge 1$ ve $(h,k)=1$ olmak üzere h tek ise*

$$s_{4,r}(h,k|\lambda)=-2^{3-r}s_r(h,k|2\lambda)+8s_r(h,2k|\lambda)-2^{2-r}k^{1-r}\overline{\beta}_r(2k\lambda,0)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $s_{4,r}(h,k|\lambda)$' nın tanımı yazılıp Önteorem 3.7 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}s_{4,r}(h,k|\lambda)&=-4\sum_{j=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hj}{2k}\right)\\&=-4\sum_{j=0}^{2k-1}\overline{\beta}_1\left(\lambda,\frac{j}{2k}-\frac{1}{2}\right)\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hj}{2k}\right)+4s_r(h,2k|\lambda)-2(2k)^{1-r}\overline{\beta}_r(2k\lambda,0)\end{aligned}$$

elde dilir. Son ifadede Önteorem 3.6 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}s_{4,r}(h,k|\lambda)&=-4\left\{2^{1-r}s_r(h,k|2\lambda)-s_r(h,2k|\lambda)\right\}+4s_r(h,2k|\lambda)-2^{2-r}k^{1-r}\overline{\beta}_r(2k\lambda,0)\\&=-2^{3-r}s_r(h,k|2\lambda)+8s_r(h,2k|\lambda)-2^{2-r}k^{1-r}\overline{\beta}_r(2k\lambda,0)\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Not: $\lambda \to 0$ ve r tek tamsayısı için (2.3) bağıntısı ile verilen $s_{4,r}(h,k)$ genelleştirilmiş Hardy toplamının genelleştirilmiş Dedekind toplamı cinsinden ifadesi elde edilir.

Teorem 3.9 *$r \geq 1$ ve $(h,k)=1$ olmak üzere p asal sayısı için*

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{p-1} s_r(h+mk,pk|\lambda) &= p^{1-r}s_r(h,k|p\lambda) - p^{1-r}s_r(ph,k|p\lambda) + ps_r(h,k|\lambda) \\ &\quad + \left(\frac{p-1}{2}\right)p^{1-r}\lambda A_r\left(ph,k|p\lambda\right)\end{aligned}$$

eşitliği gerçeklenir. Burada,

$$A_r\left(ph,k|p\lambda\right) = \sum_{v=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{phv}{k}\right) = \begin{cases} k^{1-r}\overline{\beta}_r\left(pk\lambda,0\right) & ,(k,p)=1 \\ p(\frac{k}{p})^{1-r}\overline{\beta}_r\left(k\lambda,0\right) & ,(k,p)=p\end{cases} \tag{3.4}$$

dır.

İspat. $s_r(h,k|\lambda)$' nın tanımından,

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{p-1} s_r(h+mk,pk|\lambda) &= \sum_{m=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{pk-1}\overline{\beta}_1\left(\lambda,\frac{j}{pk}\right)\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{(h+mk)j}{pk}\right) \\ &= \sum_{v=0}^{k-1}\sum_{\mu=0}^{p-1}\sum_{m=0}^{p-1}\overline{\beta}_1\left(\lambda,\frac{vp+\mu}{pk}\right)\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{h(vp+\mu)}{pk}+\frac{m\mu}{p}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $\mu = 0,1,...,p-1$ ve $v = 0,1,...,k-1$ olmak üzere $j = vp+\mu$ dönüşümü yapılmıştır. Son bulunan ifade,

$$\begin{aligned}&\sum_{v=0}^{k-1}\sum_{m=0}^{p-1}\sum_{\mu=1}^{p-1}\overline{\beta}_1\left(\lambda,\frac{vp+\mu}{pk}\right)\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{h(vp+\mu)}{pk}+\frac{m\mu}{p}\right) \\ &+\sum_{v=0}^{k-1}\sum_{m=0}^{p-1}\overline{\beta}_1\left(\lambda,\frac{vp}{pk}\right)\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hvp}{pk}\right)\end{aligned} \tag{3.5}$$

şeklinde yazılabilir. (3.5) ifadesinde Raabe bağıntısı uygulanıp gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{p-1} s_r(h+mk,pk|\lambda) &= p^{1-r}\sum_{v=0}^{k-1}\sum_{\mu=1}^{p-1}\overline{\beta}_1\left(\lambda,\frac{vp+\mu}{pk}\right)\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{ph(vp+\mu)}{pk}\right) \\ &\quad + p\sum_{v=0}^{k-1}\overline{\beta}_1\left(\lambda,\frac{v}{k}\right)\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hv}{k}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, eşitliğin sağ tarafı

$$p^{1-r}\sum_{v=0}^{k-1}\sum_{\mu=0}^{p-1}\overline{\beta}_1\left(\lambda,\frac{vp+\mu}{pk}\right)\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{ph(vp+\mu)}{pk}\right)$$
$$-p^{1-r}\sum_{v=0}^{k-1}\overline{\beta}_1\left(\lambda,\frac{vp}{pk}\right)\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{phvp}{pk}\right)+ps_r(h,k|\lambda)$$

olarak yazılabilir. Son ifadede $vp+\mu=j$ dönüşümü yapılıp $\overline{\beta}_1\left(\lambda,x\right)$' in tanımı yazılırsa ve Önteorem 3.2 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& p^{1-r}\sum_{j=0}^{pk-1}\overline{\beta}_1\left(\lambda,\frac{j}{pk}\right)\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{phj}{pk}\right) \\
& -p^{1-r}\sum_{v=0}^{k-1}\overline{\beta}_1\left(\lambda,\frac{v}{k}\right)\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{phv}{k}\right)+ps_r(h,k|\lambda) \\
= \; & p^{1-r}\left\{s_r(ph,pk|p\lambda+\frac{\lambda(1-p)}{2}pk^{1-r}\overline{\beta}_r\left(pk\lambda,0\right)\right\} \\
& -p^{1-r}\left\{s_r(ph,k|p\lambda)+\frac{\lambda(1-p)}{2}\sum_{v=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{phv}{k}\right)\right\}+ps_r(h,k|\lambda) \\
= \; & p^{1-r}s_r(h,k|p\lambda)-p^{1-r}s_r(ph,k|p\lambda)+ps_r(h,k|\lambda)+\left(\frac{p-1}{2}\right)p^{1-r}\lambda A_r\left(ph,k|p\lambda\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $A_r\left(ph,k|p\lambda\right)$ ifadesi,

$$A_r\left(ph,k|p\lambda\right)=\sum_{v=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{phv}{k}\right)=\begin{cases} k^{1-r}\overline{\beta}_r\left(pk\lambda,0\right) & ,(k,p)=1 \\ p(\frac{k}{p})^{1-r}\overline{\beta}_r\left(k\lambda,0\right) & ,(k,p)=p\end{cases}$$

şeklindedir. Gerçekten $(k,p)=1$ ise $(h,k)=1$ iken $(ph,k)=1$ olduğundan Raabe bağıntısı uygulanabilir. Diğer taraftan, $(k,p)=p$ ise,

$$\sum_{v=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{phv}{k}\right)=p\sum_{v=0}^{\frac{k}{p}-1}\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{hv}{\frac{k}{p}}\right)$$

yazılabilir. Burada $(h,\frac{k}{p})=1$ olduğundan Raabe bağıntısı uygulanabilir. Böylece istenilen elde edilir. ■

Teorem 3.10 *$r\geq 1$ ve $(h,k)=1$ olmak üzere $h+k$ tek ise*

$$\begin{aligned}
S_r(h,k|\lambda) \;=\; & -16s_r(h,k|\lambda)-2^{3-r}s_r(h,k|2\lambda)+2^{4-r}s_r(2h,k|2\lambda)+8s_r(h,2k|\lambda) \\
& -2^{3-r}\lambda A_r\left(2h,k|2\lambda\right)+2^{2-r}k^{1-r}\overline{\beta}_r\left(2k\lambda,0\right)
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Burada $A_r\left(2h,k|2\lambda\right)$, (3.4) bağıntısında verilen toplamdır.

İspat. $h+k$ tek olmak üzere

$$S_r(h,k|\lambda) = -s_{4,r}(h+k,k|\lambda)$$

olduğundan, Teorem 3.8' de h yerine $(h+k)$ alınırsa,

$$S_r(h,k|\lambda) = 2^{3-r}s_r(h,k|2\lambda) - 8s_r(h+k,2k|\lambda) + 2^{2-r}k^{1-r}\overline{\beta}_r\left(2k\lambda,0\right) \tag{3.6}$$

olur. Teorem 3.9' da $p=2$ alınırsa,

$$\begin{aligned} s_r(h,2k|\lambda) + s_r(h+k,2k|\lambda) &= 2^{1-r}s_r(h,k|2\lambda) - 2^{1-r}s_r(2h,k|2\lambda) + 2s_r(h,k|\lambda) \\ &\quad + 2^{-r}\lambda A_r\left(2h,k|2\lambda\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bulunanlar (3.6)' da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} S_r(h,k|\lambda) &= 2^{3-r}s_r(h,k|2\lambda) - 8\left\{2^{1-r}s_r(h,k|2\lambda) - 2^{1-r}s_r(2h,k|2\lambda) + 2s_r(h,k|\lambda)\right\} \\ &\quad -8\left\{-s_r(h,2k|\lambda) + 2^{-r}\lambda A_r\left(2h,k|2\lambda\right)\right\} + 2^{2-r}k^{1-r}\overline{\beta}_r\left(2k\lambda,0\right) \\ &= 2^{3-r}s_r(h,k|2\lambda) - 2^{4-r}s_r(h,k|2\lambda) + 2^{4-r}s_r(2h,k|2\lambda) - 16s_r(h,k|\lambda) \\ &\quad +8s_r(h,2k|\lambda) - 2^{3-r}\lambda A_r\left(2h,k|2\lambda\right) + 2^{2-r}k^{1-r}\overline{\beta}_r\left(2k\lambda,0\right) \\ &= -16s_r(h,k|\lambda) - 2^{3-r}s_r(h,k|2\lambda) + 2^{4-r}s_r(2h,k|2\lambda) + 8s_r(h,2k|\lambda) \\ &\quad -2^{3-r}\lambda A_r\left(2h,k|2\lambda\right) + 2^{2-r}k^{1-r}\overline{\beta}_r\left(2k\lambda,0\right) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Not: $\lambda \to 0$ ve r tek tamsayısı için (2.1) bağıntısı ile verilen $S_r(h,k)$ genelleştirilmiş Hardy toplamının genelleştirilmiş Dedekind toplamı cinsinden ifadesi elde edilir.

3.2. Reciprocity Bağıntıları

Bu bölümde dejenere Hardy toplamlarının sağladıkları reciprocity bağıntıları ispatlanacaktır.

Teorem 3.11 $(h,k)=1$ *olmak üzere* h *tek ise*

$$\begin{aligned} &kh^r s_{3,r}(k,h|2k\lambda) - hk^r 2^{r-2}s_{4,r}(h,k|h\lambda) \\ &\quad = \sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}h^j\beta_j\left(2k\lambda\right)k^{r+1-j}\varepsilon_{r-j}(2h\lambda) + hk\overline{\beta}_r\left(2hk\lambda,0\right) \end{aligned}$$

bağıntısı gerçeklenir.

İspat. Teorem 3.5 ve Teorem 3.8' den

$$s_{3,r}(k,h|2k\lambda) = 2s_r(k,h|2k\lambda) - 4s_r(2k,h|2k\lambda) + \lambda 2kh^{1-r}\overline{\beta}_r(2hk\lambda,0) \tag{3.7}$$

ve

$$s_{4,r}(h,k|h\lambda) = -2^{3-r}s_r(h,k|2h\lambda) + 8s_r(h,2k|h\lambda) - 2^{2-r}k^{1-r}\overline{\beta}_r(2hk\lambda,0) \tag{3.8}$$

dır. (3.7) ve (3.8)' in her iki tarafı sırasıyla $(r+1)kh^r$ ve $(r+1)hk^r2^{r-2}$ ile çarpılırsa,

$$(r+1)kh^r s_{3,r}(k,h|2k\lambda) - (r+1)hk^r 2^{r-2}s_{4,r}(h,k|h\lambda) = S_1 + S_2 + S_3 \tag{3.9}$$

olur. Burada,

$$S_1 := (r+1)\{2kh^r s_r(k,h|k2\lambda) + 2hk^r s_r(h,k|h2\lambda)\}$$

$$S_2 := (r+1)\{-2(2k)h^r s_r(2k,h|2k\lambda) - 2(2k)^r h s_r(h,2k|h\lambda)\}$$

$$S_3 := (r+1)\left\{2\lambda k^2 h\overline{\beta}_r(2hk\lambda,0) + hk\overline{\beta}_r(2hk\lambda,0)\right\}$$

dır. (2.11) eşitliğinden yararlanılarak,

$$\begin{aligned} S_1 &= 2(r+1)\{kh^r s_r(k,h|2k\lambda) + hk^r s_r(h,k|2h\lambda)\} \\ &= 2\sum_{j=0}^{r+1}\binom{r+1}{j}h^j\beta_j(2k\lambda)\,k^{r+1-j}\beta_{r+1-j}(2h\lambda) \\ &\quad +2\lambda hk(r+1)(h+k+2r-2)\beta_r(2hk\lambda,0) + 2r\beta_{r+1}(2hk\lambda) \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde yine (2.11) eşitliğinden yararlanılarak,

$$\begin{aligned} S_2 &= -2(r+1)\{(2k)h^r s_r(2k,h|2k\lambda) + (2k)^r h s_r(h,2k|h\lambda)\} \\ &= -2\sum_{j=0}^{r+1}\binom{r+1}{j}h^j\beta_j(2k\lambda)\,(2k)^{r+1-j}\beta_{r+1-j}(h\lambda) \\ &\quad -2\lambda hk(r+1)(h+2k+2r-2)\beta_r(2hk\lambda) - 2r\beta_{r+1}(2hk\lambda) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} &(r+1)\left\{kh^r s_{3,r}(k,h|2k\lambda) - hk^r 2^{r-2}s_{4,r}(h,k|h\lambda)\right\} \\ &= 2\sum_{j=0}^{r+1}\binom{r+1}{j}h^j\beta_j(2k\lambda)\,k^{r+1-j}\left\{\beta_{r+1-j}(2h\lambda) - 2^{r+1-j}\beta_{r+1-j}(h\lambda)\right\} \\ &\quad \{2\lambda hk(r+1)(h+k+2r-2) - 2\lambda hk(r+1)(h+2k+2r-2)\}\beta_r(2hk\lambda) \\ &\quad +2\lambda k^2 h(r+1)\beta_r(2hk\lambda) + hk(r+1)\beta_r(2hk\lambda) \end{aligned} \tag{3.10}$$

elde edilir. Diğer taraftan (2.7) ve (2.9)' da $\alpha = 1$ ve $x = 0$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(2\lambda)\frac{t^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(\lambda)2^n\frac{t^n}{n!}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta_n(2\lambda)-2^n\beta_n(\lambda)}{n!}t^n=\frac{t}{(1+t2\lambda)^{\frac{1}{2\lambda}}-1}-\frac{2t}{(1+\lambda 2t)^{\frac{2}{2\lambda}}-1}\\
&=\frac{t}{(1+t2\lambda)^{\frac{1}{2\lambda}}-1}-2\frac{t}{\left((1+t2\lambda)^{\frac{1}{2\lambda}}-1\right)\left((1+t2\lambda)^{\frac{1}{2\lambda}}+1\right)}\\
&=\frac{t\left((1+t2\lambda)^{\frac{1}{2\lambda}}-1\right)}{\left((1+t2\lambda)^{\frac{1}{2\lambda}}-1\right)\left((1+t2\lambda)^{\frac{1}{2\lambda}}+1\right)}=\frac{t}{(1+t2\lambda)^{\frac{1}{2\lambda}}+1}\\
&=\frac{t}{2}\frac{2}{(1+t2\lambda)^{\frac{1}{2\lambda}}+1}=\frac{t}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n(2\lambda)\frac{t^n}{n!}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_{n-1}(2\lambda)\frac{t^n}{(n-1)!}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan $n \geq 1$ için,

$$\beta_n(2\lambda)-2^n\beta_n(\lambda)=\frac{n}{2}\varepsilon_{n-1}(2\lambda) \tag{3.11}$$

elde edilir. (3.11) bağıntısında $0 \leq j \leq r$ için n yerine $r+1-j$ ve λ yerine $h\lambda$ yazılırsa,

$$\beta_{r+1-j}(2h\lambda)-2^{r+1-j}\beta_{r+1-j}(h\lambda)=\left(\frac{r+1-j}{2}\right)\varepsilon_{r-j}(2h\lambda)$$

elde edilir. O halde (3.10) bağıntısı,

$$\begin{aligned}
&(r+1)\left\{kh^r s_{3,r}(k,h|2k\lambda)-hk^r 2^{r-2}s_{4,r}(h,k|h\lambda)\right\}\\
&=2\sum_{j=0}^{r+1}\binom{r+1}{j}h^j\beta_j(2k\lambda)k^{r+1-j}\left(\frac{r+1-j}{2}\right)\varepsilon_{r-j}(2h\lambda)+hk(r+1)\beta_r(2hk\lambda)\\
&=(r+1)\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}h^j\beta_j(2k\lambda)k^{r+1-j}\varepsilon_{r-j}(2h\lambda)+hk(r+1)\beta_r(2hk\lambda)
\end{aligned}$$

ifadesine dönüşür. ■

Teorem 3.12 *$r \geq 1$ ve $(h,k)=1$ olsun. $h+k$ tek ise*

$$\begin{aligned}
&2^{r-1}\left\{hk^r S_r(h,k|h\lambda)+kh^r S_r(k,h|k\lambda)\right\}\\
&=-rhk\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r-1}{j}h^j k^{r-1-j}\varepsilon_j(2k\lambda)\varepsilon_{r-1-j}(2h\lambda)\\
&\quad+2\lambda hkr(h+k+\delta+2r-2)\varepsilon_{r-1}(2hk\lambda)+2r\varepsilon_r(2hk\lambda)+4hk\overline{\beta}_r(2hk\lambda,0)
\end{aligned}$$

reciprocity bağıntısı sağlanır. Burada δ

$$\delta = \begin{cases} h & , h \ tek \\ k & , k \ tek \end{cases}$$

dır.

İspat. Teorem 3.10' dan,

$$(r+1)2^{r-3}\left(hk^r S_r(h,k|h\lambda) + kh^r S_r(k,h|k\lambda)\right) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 \qquad (3.12)$$

yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned}
S_1 &: = -2^{r+1}(r+1)\left\{hk^r s_r(h,k|h\lambda) + kh^r s_r(k,h|k\lambda)\right\} \\
S_2 &: = -(r+1)\left\{hk^r s_r(h,k|2h\lambda) + kh^r s_r(k,h|2k\lambda)\right\} \\
S_3 &: = (r+1)\left\{(2h)k^r s_r(2h,k|2h\lambda) + (2h)^r k s_r(k,2h|k\lambda)\right\} \\
S_4 &: = (r+1)\left\{h(2k)^r s_r(h,2k|h\lambda) + (2k)h^r s_r(2k,h|2k\lambda)\right\} \\
S_5 &: = -h^2k^r\lambda(r+1)A_r\left(2h,k|2h\lambda\right) - k^2h^r\lambda(r+1)A_r\left(2k,h|2k\lambda\right) \\
&\quad +hk(r+1)\overline{\beta}_r\left(2hk\lambda,0\right)
\end{aligned}$$

dır. Dejenere Dedekind toplamlarının reciprocity bağıntısı olan (2.11) bağıntısı yardımıyla

$$\begin{aligned}
S_1 &= -2^{r+1}\left\{\sum_{j=0}^{r+1}\binom{r+1}{j}h^j\beta_j\left(k\lambda\right)k^{r+1-j}\beta_{r+1-j}\left(h\lambda\right)\right\} \\
&\quad -2^r\lambda hk(r+1)(h+k+2r-2)\overline{\beta}_r\left(hk\lambda,0\right) - r2^{r+1}\overline{\beta}_{r+1}\left(hk\lambda,0\right) \\
S_2 &= -\sum_{j=0}^{r+1}\binom{r+1}{j}h^j\beta_j\left(2k\lambda\right)k^{r+1-j}\beta_{r+1-j}\left(2h\lambda\right) \\
&\quad -\lambda hk(r+1)(h+k+2r-2)\overline{\beta}_r\left(2hk\lambda,0\right) - r\overline{\beta}_{r+1}\left(2hk\lambda,0\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_3 &= \sum_{j=0}^{r+1}\binom{r+1}{j}(2h)^j\beta_j\left(k\lambda\right)k^{r+1-j}\beta_{r+1-j}\left(2h\lambda\right) \\
&\quad +\lambda hk(r+1)(2h+k+2r-2)\overline{\beta}_r\left(2hk\lambda,0\right) + r\overline{\beta}_{r+1}\left(2hk\lambda,0\right) \\
S_4 &= \sum_{j=0}^{r+1}\binom{r+1}{j}h^j\beta_j\left(2k\lambda\right)(2k)^{r+1-j}\beta_{r+1-j}\left(h\lambda\right) \\
&\quad +\lambda hk(r+1)(h+2k+2r-2)\overline{\beta}_r\left(2hk\lambda,0\right) + r\overline{\beta}_{r+1}\left(2hk\lambda,0\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$
\begin{aligned}
&(r+1)2^{r-3}\left\{hk^{r}S_{r}(h,k|h\lambda)+kh^{r}S_{r}(k,h|k\lambda)\right\}\\
&=\sum_{j=0}^{r+1}\binom{r+1}{j}h^{j}k^{r+1-j}\left\{-2^{r+1}\beta_{j}\left(k\lambda\right)\beta_{r+1-j}\left(h\lambda\right)-\beta_{j}\left(2k\lambda\right)\beta_{r+1-j}\left(2h\lambda\right)\right.\\
&\quad\left.+2^{r+1-j}\beta_{j}\left(2k\lambda\right)\beta_{r+1-j}\left(h\lambda\right)+2^{j}\beta_{j}\left(k\lambda\right)\beta_{r+1-j}\left(2h\lambda\right)\right\}\\
&\quad-2^{r}\lambda hk(r+1)(h+k+2r-2)\overline{\beta}_{r}\left(hk\lambda,0\right)-r2^{r+1}\overline{\beta}_{r+1}\left(hk\lambda,0\right)\\
&\quad+\lambda hk(r+1)(2h+2k+2r-2)\overline{\beta}_{r}\left(2hk\lambda,0\right)+r\overline{\beta}_{r+1}\left(2hk\lambda,0\right)\\
&\quad-h^{2}k^{r}\lambda(r+1)A_{r}\left(2h,k|2h\lambda\right)-k^{2}h^{r}\lambda(r+1)A_{r}\left(2k,h|2k\lambda\right)\\
&\quad+hk(r+1)\overline{\beta}_{r}\left(2hk\lambda,0\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (3.11) bağıntısı yardımıyla

$$
\begin{aligned}
&-2^{r+1}\beta_{j}\left(k\lambda\right)\beta_{r+1-j}\left(h\lambda\right)-\beta_{j}\left(2k\lambda\right)\beta_{r+1-j}\left(2h\lambda\right)\\
&+2^{j}\beta_{j}\left(k\lambda\right)\beta_{r+1-j}\left(2h\lambda\right)+2^{r+1-j}\beta_{j}\left(2k\lambda\right)\beta_{r+1-j}\left(h\lambda\right)\\
&=-\left\{\beta_{r+1-j}\left(2h\lambda\right)-2^{r+1-j}\beta_{r+1-j}\left(h\lambda\right)\right\}\left\{\beta_{j}\left(2k\lambda\right)-2^{j}\beta_{j}\left(k\lambda\right)\right\}\\
&=-\left(\frac{r+1-j}{2}\varepsilon_{r-j}(2h\lambda)\right)\left(\frac{j}{2}\varepsilon_{j-1}(2k\lambda)\right),\ 1\leq j\leq r
\end{aligned}
$$

elde edilir. Son bulunan ifade yerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
&(r+1)2^{r-3}\left(hk^{r}S_{r}(h,k|h\lambda)+kh^{r}S_{r}(k,h|k\lambda)\right)\\
&=\frac{-1}{4}\sum_{j=1}^{r}\binom{r}{j}h^{j}k^{r+1-j}(r+1-j)j\varepsilon_{j-1}(2k\lambda)\varepsilon_{r-j}(2h\lambda)\\
&\quad+\lambda hk(r+1)(h+k+2r-2)\left\{\overline{\beta}_{r}\left(2hk\lambda,0\right)-2^{r}\overline{\beta}_{r}\left(hk\lambda,0\right)\right\} && (3.13)\\
&\quad+r\left\{\overline{\beta}_{r+1}\left(2hk\lambda,0\right)-2^{r+1}\overline{\beta}_{r+1}\left(hk\lambda,0\right)\right\}+\lambda hk(r+1)(h+k)\overline{\beta}_{r}\left(2hk\lambda,0\right) && (3.14)\\
&\quad-h^{2}k^{r}\lambda(r+1)A_{r}\left(2h,k|2h\lambda\right)-k^{2}h^{r}\lambda(r+1)A_{r}\left(2k,h|2k\lambda\right)+hk(r+1)\overline{\beta}_{r}\left(2hk\lambda,0\right)
\end{aligned}
$$

olur. (3.13) ve (3.14)' de (3.11) bağıntısı uygulanıp gerekli işlemler yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
&\frac{-1}{4}r(r+1)hk\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r-1}{j}h^{j}k^{r-1-j}\varepsilon_{j}(2k\lambda)\varepsilon_{r-1-j}(2h\lambda)\\
&+\lambda hk(r+1)(h+k+2r-2)\frac{r}{2}\varepsilon_{r-1}(2hk\lambda)+\frac{r(r+1)}{2}\varepsilon_{r}(2hk\lambda) && (3.15)\\
&-h^{2}k^{r}\lambda(r+1)A_{r}\left(2h,k|2h\lambda\right)-k^{2}h^{r}\lambda(r+1)A_{r}\left(2k,h|2k\lambda\right) && (3.16)\\
&+hk(r+1)\overline{\beta}_{r}\left(2hk\lambda,0\right)+\lambda hk(r+1)(h+k)\overline{\beta}_{r}\left(2hk\lambda,0\right) && (3.17)
\end{aligned}
$$

elde edilir. k tek ise

$$\begin{aligned}
&-h^2k^r\lambda A_r\left(2h,k|2h\lambda\right)-k^2h^r\lambda A_r\left(2k,h|2k\lambda\right)+\lambda hk\left(h+k\right)\overline{\beta}_r\left(2hk\lambda,0\right)\\
&=-h^2k\lambda\overline{\beta}_r\left(2hk\lambda,0\right)-k^2h\lambda 2^r\overline{\beta}_r\left(hk\lambda,0\right)+\lambda h^2k\overline{\beta}_r\left(2hk\lambda,0\right)+\lambda hk^2\overline{\beta}_r\left(2hk\lambda,0\right)\\
&=\lambda hk^2\left\{\overline{\beta}_r\left(2hk\lambda,0\right)-2^r\overline{\beta}_r\left(hk\lambda,0\right)\right\}\\
&=\lambda hk^2\frac{r}{2}\varepsilon_{r-1}(2hk\lambda,0)
\end{aligned}$$

dır. Böylece (3.15), (3.16) ve (3.17) ifadeleri,

$$\frac{\lambda hkr}{2}(h+2k+2r-2)\varepsilon_{r-1}(2hk\lambda)+\frac{r}{2}\varepsilon_r(2hk\lambda)+hk\overline{\beta}_r\left(2hk\lambda,0\right)$$

olur. h tek ise

$$\begin{aligned}
&-h^2k^r\lambda A_r\left(2h,k|2h\lambda\right)-k^2h^r\lambda A_r\left(2k,h|2k\lambda\right)+\lambda hk\left(h+k\right)\overline{\beta}_r\left(2hk\lambda,0\right)\\
&=-h^2k\lambda 2^r\overline{\beta}_r\left(hk\lambda,0\right)-k^2h\lambda\overline{\beta}_r\left(2hk\lambda,0\right)+\lambda h^2k\overline{\beta}_r\left(2hk\lambda,0\right)+\lambda hk^2\overline{\beta}_r\left(2hk\lambda,0\right)\\
&=\lambda h^2k\left\{\overline{\beta}_r\left(2hk\lambda,0\right)-2^r\overline{\beta}_r\left(hk\lambda,0\right)\right\}\\
&=\lambda h^2k\frac{r}{2}\varepsilon_{r-1}(2hk\lambda,0)
\end{aligned}$$

dır. Böylece (3.15), (3.16) ve (3.17) ifadeleri,

$$\frac{\lambda hkr}{2}(2h+k+2r-2)\varepsilon_{r-1}(2hk\lambda)+\frac{r}{2}\varepsilon_r(2hk\lambda)+hk\overline{\beta}_r\left(2hk\lambda,0\right)$$

olur. Buradan istenilen elde edilir. ■

3.3. Dejenere Hardy Toplamlarının Bazı Özellikleri

Önerme 3.13 *$(h+k)$ tek ve $(h,k)=1$ için*

$$S_r(qh,qk|\lambda)=\begin{cases}2q(2k)^{1-r}\overline{\beta}_r(2k\lambda,0) & ,\ q\ \text{çift}\\ 2(q-1)(2k)^{1-r}\overline{\beta}_r(2k\lambda,0)+S_r(h,k|\lambda) & ,\ q\ \text{tek}\end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. q çift olsun. $S_r(qh,qk|\lambda)$' nın tanımından

$$\frac{1}{4}S_r(qh,qk|\lambda)=\sum_{j=0}^{qk-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{(h+k)j}{2k}\right)\tag{3.18}$$

yazılabilir. Burada $n = 0, 1, ..., k-1$ ve $m = 0, 1, ..., q-1$ olmak üzere $j = n + mk$ dönüşümü yapılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} S_r(qh, qk|\lambda) &= \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{q-1} \overline{\beta}_r \left(\lambda, \frac{(h+k)n}{2k} + \frac{m}{2} \right) \\
&= \frac{q}{2} \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{1} \overline{\beta}_r \left(\lambda, \frac{(h+k)n}{2k} + \frac{m}{2} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Son ifadede Raabe bağıntısı uygulanırsa,

$$\frac{q}{2} 2^{1-r} \sum_{n=0}^{k-1} \overline{\beta}_r \left(2\lambda, \frac{(h+k)n}{k} \right) = \frac{q}{2} (2k)^{1-r} \overline{\beta}_r (2k\lambda, 0)$$

elde edilir.

Şimdi de q tek olsun, benzer şekilde $S_r(qh, qk|\lambda)$' nın tanımında $j = n + mk$ dönüşümü yapılıp Raabe bağıntısı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} S_r(qh, qk|\lambda) &= \sum_{j=0}^{qk-1} \overline{\beta}_r \left(\lambda, \frac{(h+k)j}{2k} \right) = \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{q-1} \overline{\beta}_r \left(\lambda, \frac{(h+k)(n+mk)}{2k} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{q-1} \overline{\beta}_r \left(\lambda, \frac{(h+k)n}{2k} + \frac{m}{2} \right) \\
&= \frac{(q-1)}{2} \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{1} \overline{\beta}_r \left(\lambda, \frac{(h+k)n}{2k} + \frac{m}{2} \right) + \sum_{n=0}^{k-1} \overline{\beta}_r \left(\lambda, \frac{(h+k)n}{2k} + \frac{q-1}{2} \right) \\
&= \frac{(q-1)}{2} 2^{1-r} \sum_{n=0}^{k-1} \overline{\beta}_r \left(2\lambda, \frac{(h+k)n}{k} \right) + \sum_{n=0}^{k-1} \overline{\beta}_r \left(\lambda, \frac{(h+k)n}{2k} \right) \\
&= \frac{(q-1)}{2} (2k)^{1-r} \overline{\beta}_r (2k\lambda, 0) + \frac{1}{4} S_r(h, k|\lambda)
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Önerme 3.14 *k tek ve $(h, k) = 1$ için*

$$s_{3,r}(qh, qk|\lambda) = \begin{cases} 0 & , q \ \text{çift} \\ s_{3,r}(h, k|\lambda) & , q \ \text{tek} \end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $s_{3,r}(qh,qk|\lambda)$' nın tanımı yazılıp $n=0,1,...,k-1$ ve $m=0,1,...,q-1$ olmak üzere $j=n+mk$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned} s_{3,r}(qh,qk|\lambda) &= \sum_{j=0}^{qk-1}(-1)^j\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hj}{k}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{k-1}\sum_{m=0}^{q-1}(-1)^{n+mk}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{h(n+mk)}{k}\right) \end{aligned}$$

olur. $\overline{\beta}_r(\lambda,x)$ fonksiyonu 1 ile periyodik olduğundan,

$$\begin{aligned} &s_{3,r}(qh,qk|\lambda)\sum_{n=0}^{k-1}\sum_{m=0}^{q-1}(-1)^{n+mk}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hn}{k}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hn}{k}\right)\sum_{m=0}^{q-1}(-1)^m \\ &= \frac{1-(-1)^q}{2}\sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hn}{k}\right) \end{aligned}$$

olur ki buradan istenilen sonuç elde edilir. ■

Önerme 3.15 *h tek ve $(h,k)=1$ için*

$$s_{4,r}(qh,qk|\lambda)=\begin{cases} -2q(2k)^{1-r}\overline{\beta}_r(2k\lambda,0) & ,\ q \ \text{çift} \\ -2(q-1)(2k)^{1-r}\overline{\beta}_r(2k\lambda,0)+s_{4,r}(h,k|\lambda) & ,\ q \ \text{tek} \end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. q çift ise, $s_{4,r}(qh,qk|\lambda)$' nın tanımı yazılıp $n=0,1,...,k-1$ ve $m=0,1,...,q-1$ olmak üzere $j=n+mk$ dönüşümü yapılırsa ve Raabe bağıntısından yararlanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{-1}{4}s_{4,r}(qh,qk|\lambda) &= \sum_{j=0}^{qk-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hj}{2k}\right)=\sum_{n=0}^{k-1}\sum_{m=0}^{q-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{h(n+mk)}{2k}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{k-1}\sum_{m=0}^{q-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hn}{2k}+\frac{m}{2}\right)=\frac{q}{2}\sum_{n=0}^{k-1}\sum_{m=0}^{1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hn}{2k}+\frac{m}{2}\right) \\ &= \frac{q}{2}2^{1-r}\sum_{n=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(2\lambda,\frac{hn}{k}\right)=\frac{q}{2}(2k)^{1-r}\overline{\beta}_r(2k\lambda,0) \end{aligned}$$

elde edilir.

q tek ise, $s_{4,r}(qh,qk|\lambda)$' nın tanımında $n=0,1,...,k-1$ ve $m=0,1,...,q-1$ olmak üzere $j=n+mk$ dönüşümü yapılıp benzer işlemler yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
\frac{-1}{4}s_{4,r}(qh,qk|\lambda) &= \sum_{j=0}^{qk-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hj}{2k}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{k-1}\sum_{m=0}^{q-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{h(n+mk)}{2k}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{k-1}\sum_{m=0}^{q-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hn}{2k}+\frac{m}{2}\right)\\
&= \frac{(q-1)}{2}\sum_{n=0}^{k-1}\sum_{m=0}^{1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hn}{2k}+\frac{m}{2}\right)+\sum_{n=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hn}{2k}+\frac{q-1}{2}\right)\\
&= \frac{(q-1)}{2}2^{1-r}\sum_{n=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(2\lambda,\frac{(h+k)n}{k}\right)+\sum_{n=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hn}{2k}\right)\\
&= \frac{(q-1)}{2}(2k)^{1-r}\overline{\beta}_r\left(2k\lambda,0\right)+\frac{1}{4}s_{4,r}(h,k|\lambda)
\end{aligned}
$$

elde edilir. ■

Sonuç 3.16 *$r\geq 1$, $(h,k)=1$, h tek ve q tek ise*

$$
\begin{aligned}
&kh^r s_{3,r}(qk,qh|qk2\lambda)-hk^r 2^{r-2}s_{4,r}(qh,qk|qh\lambda)\\
&=\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}h^j\beta_j\left(2kq\lambda\right)k^{r+1-j}\varepsilon_{r-j}(2hq\lambda)+qhk\overline{\beta}_r(2hk\lambda,0)
\end{aligned}
$$

dır.

İspat. Teorem 3.11, Önerme 3.14 ve 3.15' den istenilen elde edilir. ■

Sonuç 3.17 *$r\geq 1$, $(h,k)=q$, $(h+k)$ tek ve q tek ise*

$$
\begin{aligned}
&2^{r-1}\left\{hk^r S_r(hq,kq|hq\lambda)+kh^r S_r(kq,hq|kq\lambda)\right\}\\
&\quad=-rhk\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r-1}{j}h^j k^{r-1-j}\varepsilon_j(2kq\lambda)\varepsilon_{r-1-j}(2hq\lambda)\\
&\qquad+2q\lambda hkr(h+k+\delta+2r-2)\varepsilon_{r-1}(2hkq\lambda)+2r\varepsilon_r(2hkq\lambda)+4qhk\overline{\beta}_r(2hk\lambda,0)
\end{aligned}
$$

dır. Burada δ,

$$
\delta=\begin{cases} h & ,h\ tek\\ k & ,k\ tek\end{cases}
$$

dır.

İspat. Teorem 3.12 ve 3.13' den istenilen elde edilir. ■

Aşağıda, Teorem 3.9' da ispatlanan özellik dejenere Hardy toplamları için ispatlanmıştır.

Teorem 3.18 *p asal sayısı için $(h,k)=1$ ve k tek ise*

$$\sum_{m=0}^{p-1} s_{3,r}(h+mk,pk|\lambda)$$
$$=\begin{cases} k^{1-r}\overline{\beta}_r(k\lambda,0)(2-2^{1-r}) & ,\ p=2 \\ p^{1-r}s_{3,r}(h,k|p\lambda)+ps_{3,r}(h,k|\lambda)-p^{1-r}s_{3,r}(ph,k|p\lambda) & ,\ p>2 \text{ asal} \end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $s_{3,r}(h+mk,pk|\lambda)$' nın tanımında $\mu=0,1,...,p-1$ ve $v=0,1,...,k-1$ olmak üzere $j=vp+\mu$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{p-1} s_{3,r}(h+mk,pk|\lambda) &= \sum_{m=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{pk-1}(-1)^j\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{(h+mk)j}{pk}\right) \\ &= \sum_{v=0}^{k-1}\sum_{\mu=0}^{p-1}\sum_{m=0}^{p-1}(-1)^{vp+\mu}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{h(vp+\mu)}{pk}+\frac{m\mu}{p}\right)\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned}&\sum_{v=0}^{k-1}\sum_{m=0}^{p-1}\sum_{\mu=1}^{p-1}(-1)^{vp+\mu}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{h(vp+\mu)}{pk}+\frac{m\mu}{p}\right) \\ &+\sum_{v=0}^{k-1}\sum_{m=0}^{p-1}(-1)^{vp}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hvp}{pk}\right)\end{aligned} \tag{3.19}$$

olur. (3.19)' da Raabe bağıntısı uygulanırsa,

$$\begin{aligned}&p^{1-r}\sum_{v=0}^{k-1}\sum_{\mu=1}^{p-1}(-1)^{vp+\mu}\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{ph(vp+\mu)}{pk}\right) \\ &+p\sum_{v=0}^{k-1}(-1)^{vp}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hv}{k}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. İlk toplama $\mu=0$ eklenip çıkarılırsa,

$$\begin{aligned}&p^{1-r}\sum_{v=0}^{k-1}\sum_{\mu=0}^{p-1}(-1)^{vp+\mu}\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{ph(vp+\mu)}{pk}\right) \\ &-p^{1-r}\sum_{v=0}^{k-1}(-1)^{vp}\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{phv}{k}\right)+p\sum_{v=0}^{k-1}(-1)^{vp}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hv}{k}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $vp+\mu=j$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned}
&p^{1-r}\sum_{j=0}^{pk-1}(-1)^{j}\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{phj}{pk}\right)-p^{1-r}\sum_{v=0}^{k-1}(-1)^{vp}\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{phv}{k}\right)\\
&+p\sum_{v=0}^{k-1}(-1)^{vp}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hv}{k}\right)\\
&\quad=p^{1-r}s_{3,r}(ph,pk;p\lambda)+pA-p^{1-r}B
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada A ve B aşağıdaki gibidir:

$$A=\sum_{v=0}^{k-1}(-1)^{vp}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hv}{k}\right)=\begin{cases}k^{1-r}\overline{\beta}_r(k\lambda,0) & ,p=2\\ s_{3,r}(h,k|\lambda) & ,p>2 \text{ asal}\end{cases}$$

$$B=\sum_{v=0}^{k-1}(-1)^{vp}\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{phv}{k}\right)=\begin{cases}k^{1-r}\overline{\beta}_r(2k\lambda,0) & ,p=2\\ s_{3,r}(ph,k|p\lambda) & ,p>2 \text{ asal}\end{cases}$$

Bu taktirde, $p=2$ için Önteorem 3.14' den,

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{1}s_{3,r}(h+mk,2k|\lambda) &= 2^{1-r}s_{3,r}(2h,2k|2\lambda)+2k^{1-r}\overline{\beta}_r(k\lambda,0)-(2k)^{1-r}\overline{\beta}_r(k\lambda,0)\\
&= k^{1-r}\overline{\beta}_r(k\lambda,0)(2-2^{1-r})
\end{aligned}$$

$p>2$ asal için Önteorem 3.14' den,

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{p-1}s_{3,r}(h+mk,pk|\lambda) &= p^{1-r}s_{3,r}(ph,pk|p\lambda)+ps_{3,r}(h,k|\lambda)-p^{1-r}s_{3,r}(ph,k|p\lambda)\\
&= p^{1-r}s_{3,r}(h,k|p\lambda)+ps_{3,r}(h,k|\lambda)-p^{1-r}s_{3,r}(ph,k|p\lambda)
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.19 *p asal sayısı için $(h,k)=1$ ve h tek ise*

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{2p-1}s_{4,r}(h+mk,pk|\lambda) &= p^{1-r}s_{4,r}(ph,pk|p\lambda)-p^{1-r}S_r(ph,pk|p\lambda)-p^{1-r}s_{4,r}(ph,k|p\lambda)\\
&\quad+ps_{4,r}(h,k|\lambda)-pS_r(h,k|\lambda)+p^{1-r}C_p
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Burada

$$C_p=\begin{cases}-s_{4,r}(ph,k|p\lambda) & ,p=2\\ S_r(ph,k|p\lambda) & ,p>2\end{cases}$$

dir.

İspat. $s_{4,r}(h+mk,pk|\lambda)$' nın tanımında $\mu=0,1,...,p-1$ ve $v=0,1,...,k-1$ olmak üzere $j=vp+\mu$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{-1}{4}\sum_{m=0}^{2p-1}s_{4,r}(h+mk,pk|\lambda) &= \sum_{m=0}^{2p-1}\sum_{j=0}^{pk-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{(h+mk)j}{2pk}\right)\\ &= \sum_{v=0}^{k-1}\sum_{m=0}^{2p-1}\sum_{\mu=0}^{p-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{h(vp+\mu)}{2pk}+\frac{mk(vp+\mu)}{2pk}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece eşitliğin sağ tarafı

$$\begin{aligned}&\sum_{v=0}^{k-1}\sum_{m=0}^{2p-1}\sum_{\mu=1}^{p-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{h(vp+\mu)}{2pk}+\frac{mk(vp+\mu)}{2pk}\right)\\ &\quad+\sum_{v=0}^{k-1}\sum_{m=0}^{2p-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hvp}{2pk}+\frac{mv}{2}\right)\\ &=\sum_{v=0}^{k-1}\sum_{\mu=1}^{p-1}\sum_{n=0}^{p-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{h(vp+\mu)}{2pk}+\frac{2n(vp+\mu)}{2p}\right) \qquad (3.20)\\ &\quad+\sum_{v=0}^{k-1}\sum_{\mu=1}^{p-1}\sum_{n=0}^{p-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{h(vp+\mu)}{2pk}+\frac{2n(vp+\mu)}{2p}+\frac{vp+\mu}{2p}\right) \qquad (3.21)\\ &\quad+p\sum_{v=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hv}{2k}\right)+p\sum_{v=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hv}{2k}+\frac{v}{2}\right)\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. $v=0,1,...,k-1$ ve $\mu=1,...,p-1$ için $(p,vp+\mu)=1$ olduğundan (3.20) ve (3.21) ifadelerinde Raabe bağıntısı uygulanırsa,

$$\begin{aligned}&p^{1-r}\sum_{v=0}^{k-1}\sum_{\mu=1}^{p-1}\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{ph(vp+\mu)}{2pk}\right)\\ &+p^{1-r}\sum_{v=0}^{k-1}\sum_{\mu=1}^{p-1}\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{ph(vp+\mu)}{2pk}+\frac{vp+\mu}{2}\right)-\frac{1}{4}ps_{4,r}(h,k|\lambda)+\frac{1}{4}pS_r(h,k|\lambda)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}&p^{1-r}\sum_{v=0}^{k-1}\sum_{\mu=0}^{p-1}\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{ph(vp+\mu)}{2pk}\right)\\ &+p^{1-r}\sum_{v=0}^{k-1}\sum_{\mu=0}^{p-1}\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{(ph+pk)\,(vp+\mu)}{2pk}\right)\\ &-p^{1-r}\sum_{v=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{phv}{2k}\right)-p^{1-r}\sum_{v=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{phv}{2k}+\frac{vp}{2}\right)\\ &-\frac{1}{4}ps_{4,r}(h,k|\lambda)+\frac{1}{4}pS_r(h,k|\lambda)\end{aligned}$$

yazılılabilir. Tekrar $vp+\mu=j$, $j=0,...,pk-1$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned}
& p^{1-r}\sum_{j=0}^{pk-1}\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{phj}{2pk}\right)+p^{1-r}\sum_{j=0}^{pk-1}\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{(ph+pk)\,j}{2pk}\right)\\
& +\frac{1}{4}p^{1-r}s_{4,r}(ph,k|p\lambda)-p^{1-r}\sum_{v=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{phv}{2k}+\frac{vp}{2}\right)\\
& -\frac{1}{4}ps_{4,r}(h,k|\lambda)+\frac{1}{4}pS_r(h,k|\lambda)\\
= & -\frac{1}{4}p^{1-r}s_{4,r}(ph,pk|p\lambda)+\frac{1}{4}p^{1-r}S_r(ph,pk|p\lambda)+\frac{1}{4}p^{1-r}s_{4,r}(ph,k|p\lambda)\\
& -\frac{1}{4}ps_{4,r}(h,k|\lambda)+\frac{1}{4}pS_r(h,k|\lambda)-p^{1-r}\sum_{v=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{phv}{2k}+\frac{vp}{2}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\sum_{v=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{phv}{2k}+\frac{vp}{2}\right)=\begin{cases}-\frac{1}{4}s_{4,r}(ph,k|p\lambda) & ,p=2\\ \frac{1}{4}S_r(ph,k|p\lambda) & ,p>2\end{cases}$$

olduğundan istenilen elde edilir. ■

Teorem 3.20 *$r\geq 1$ tek tamsayı, p asal sayısı ve $(h,k)=1$ olsun. h tek ise*

$$\sum_{m=0}^{p-1}s_{4,r}(h+2mk,pk|\lambda)=p^{1-r}s_{4,r}(ph,pk|p\lambda)-p^{1-r}s_{4,r}(ph,k|p\lambda)+ps_{4,r}(h,k|\lambda)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Teorem 3.19' un ispatına benzer şekilde elde edilir. ■

Teorem 3.21 *p asal sayısı için $(h,k)=1$ ve $(h+k)$ tek ise*

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{2p-1}S_r(h+mk,pk|\lambda) \;=\; & p^{1-r}S_r(ph,pk|p\lambda)-p^{1-r}s_{4,r}(ph,pk|p\lambda)+p^{1-r}s_{4,r}(ph,k|p\lambda)\\
& -ps_{4,r}(h,k|\lambda)+pS_r(h,k|\lambda)+p^{1-r}C_p
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Burada

$$C_p=\begin{cases}s_{4,r}(ph,k|p\lambda) & ,p=2\\ -S_r(ph,k|p\lambda) & ,p>2\end{cases}$$

dır.

İspat. $S_r(h+mk,pk|\lambda)$' nın tanımında $\mu=0,1,...,p-1$ ve $v=0,1,...,k-1$ olmak üzere $j=vp+\mu$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\sum_{m=0}^{2p-1} S_r(h+mk,pk|\lambda) &= \sum_{m=0}^{2p-1}\sum_{j=0}^{pk-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{(h+mk+pk)j}{2pk}\right)\\
&=\sum_{v=0}^{k-1}\sum_{\mu=0}^{p-1}\sum_{m=0}^{2p-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{(h+pk)(vp+\mu)}{2pk}+\frac{mk(vp+\mu)}{2pk}\right)\\
&=\sum_{v=0}^{k-1}\sum_{\mu=0}^{p-1}\sum_{n=0}^{p-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{h(vp+\mu)}{2pk}+\frac{vp+\mu}{2}+\frac{n(vp+\mu)}{p}\right)\\
&+\sum_{v=0}^{k-1}\sum_{\mu=0}^{p-1}\sum_{n=0}^{p-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{h(vp+\mu)}{2pk}+\frac{vp+\mu}{2}+\frac{n(vp+\mu)}{p}+\frac{vp+\mu}{2p}\right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Son eşitlikte μ üzerinden olan toplam $\mu=0$ için ayrılırsa,

$$\frac{1}{4}\sum_{m=0}^{2p-1} S_r(h+mk,pk|\lambda)$$

$$=\sum_{v=0}^{k-1}\sum_{\mu=1}^{p-1}\sum_{n=0}^{p-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{h(vp+\mu)}{2pk}+\frac{vp+\mu}{2}+\frac{n(vp+\mu)}{p}\right) \tag{3.22}$$

$$+\sum_{v=0}^{k-1}\sum_{\mu=1}^{p-1}\sum_{n=0}^{p-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{h(vp+\mu)}{2pk}+\frac{vp+\mu}{2}+\frac{n(vp+\mu)}{p}+\frac{vp+\mu}{2p}\right) \tag{3.23}$$

$$+p\sum_{v=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hv}{2k}+\frac{vp}{2}\right)+p\sum_{v=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(\lambda,\frac{hv}{2k}+\frac{v(p+1)}{2}\right)$$

olur. (3.22) ve (3.23) ifadelerinde Raabe bağıntısı uygulanırsa, eşitliğin sağ tarafı

$$\begin{aligned}
&p^{1-r}\sum_{v=0}^{k-1}\sum_{\mu=1}^{p-1}\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{ph(vp+\mu)}{2pk}+\frac{p(vp+\mu)}{2}\right)+\frac{p}{4}\left(S_r\left(h,k|\lambda\right)-s_{4,r}\left(h,k|\lambda\right)\right)\\
&+p^{1-r}\sum_{v=0}^{k-1}\sum_{\mu=1}^{p-1}\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{ph(vp+\mu)}{2pk}+\frac{(vp+\mu)(p+1)}{2}\right)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
&p^{1-r}\sum_{v=0}^{k-1}\sum_{\mu=0}^{p-1}\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{ph(vp+\mu)}{2pk}+\frac{p(vp+\mu)}{2}\right)-p^{1-r}\sum_{v=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{p^2hv}{2pk}+\frac{p^2v}{2}\right)\\
&+p^{1-r}\sum_{v=0}^{k-1}\sum_{\mu=0}^{p-1}\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{ph(vp+\mu)}{2pk}+\frac{(vp+\mu)(p+1)}{2}\right)\\
&-p^{1-r}\sum_{v=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{p^2hv}{2pk}+\frac{vp(p+1)}{2}\right)+\frac{1}{4}p\left(S_r\left(h,k|\lambda\right)-s_{4,r}\left(h,k|\lambda\right)\right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $vp + \mu = j$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned} & p^{1-r}\sum_{j=0}^{pk-1}\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{phj}{2pk}+\frac{pj}{2}\right)-p^{1-r}\sum_{v=0}^{k-1}\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{phv}{2k}+\frac{p^2v}{2}\right) \\ & +p^{1-r}\sum_{j=0}^{pk-1}\overline{\beta}_r\left(p\lambda,\frac{phj}{2pk}+\frac{j(p+1)}{2}\right)+\frac{1}{4}p^{1-r}s_{4,r}(ph,k|p\lambda) \\ & +\frac{1}{4}p\left(S_r\left(h,k|\lambda\right)-s_{4,r}\left(h,k|\lambda\right)\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan son ifade A olarak tanımlanırsa, $p = 2$ için

$$\begin{aligned} 4A &= -p^{1-r}s_{4,r}(ph,pk|p\lambda)+p^{1-r}s_{4,r}(ph,k|p\lambda)+p^{1-r}S_r(ph,pk|p\lambda) \\ &\quad +p^{1-r}s_{4,r}(ph,k|p\lambda)-ps_{4,r}(h,k|\lambda)+pS_r(h,k|\lambda) \end{aligned}$$

ve $p > 2$ için

$$\begin{aligned} 4A &= p^{1-r}S_r(ph,pk|p\lambda)-p^{1-r}S_r(ph,k|p\lambda)-p^{1-r}s_{4,r}(ph,pk|p\lambda) \\ &\quad +p^{1-r}s_{4,r}(ph,k|p\lambda)+pS_r(h,k|\lambda)-ps_{4,r}(h,k|\lambda) \end{aligned}$$

olur. Yani,

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{2p-1}S_r(h+mk,pk|\lambda) &= p^{1-r}S_r(ph,pk|p\lambda)-p^{1-r}s_{4,r}(ph,pk|p\lambda)+p^{1-r}s_{4,r}(ph,k|p\lambda) \\ &\quad -ps_{4,r}(h,k|\lambda)+pS_r(h,k|\lambda)+p^{1-r}C_p \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$C_p=\begin{cases} s_{4,r}(ph,k|p\lambda) & ,p=2 \\ -S_r(ph,k|p\lambda) & ,p>2 \end{cases}$$

dır. ■

Teorem 3.22 *p asal sayısı için $(h,k)=1$ ve $(h+k)$ tek ise*

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{p-1}S_r(h+2mk,pk|\lambda) \\ & =\begin{cases} -p^{1-r}s_{4,r}(ph,pk|p\lambda)+p^{1-r}s_{4,r}(ph,k|p\lambda)-ps_{4,r}(h,k|\lambda) & ,\ p=2 \\ p^{1-r}S_r(ph,pk|p\lambda)-p^{1-r}S_r(ph,k|p\lambda)+pS_r(h,k|\lambda) & ,\ p>2 \end{cases} \end{aligned}$$

dır.

İspat. Teorem 3.21' in ispatına benzer şekilde elde edilir. ■

Son beş teoremin sonucu olarak genelleştirilmiş Hardy toplamları için benzer özellikler aşağıdaki gibi elde edilebilir.

Sonuç 3.23 *$r \geq 1$ tek tamsayı, p asal sayısı ve $(h,k) = 1$ olsun.*

k tek ise

$$\sum_{m=0}^{p-1} s_{3,r}(h+mk,pk) = \begin{cases} 0 & , p=2 \\ \left(p^{1-r}+p\right) s_{3,r}(h,k) - p^{1-r} s_{3,r}(ph,k) & , p>2 \end{cases} \tag{3.24}$$

h tek ise

$$\sum_{m=0}^{2p-1} s_{4,r}(h+mk,pk) \tag{3.25}$$

$$= \begin{cases} -2^{2-r} s_{4,r}(2h,k) + 2s_{4,r}(h,k) - 2S_r(h,k) & , p=2 \\ \left(p+p^{1-r}\right)\left(s_{4,r}(h,k) - S_r(h,k)\right) - p^{1-r}\left(s_{4,r}(ph,k) - S_r(ph,k)\right) & , p>2 \end{cases}$$

ve

$$\sum_{m=0}^{p-1} s_{4,r}(h+2mk,pk) = p^{1-r} s_{4,r}(ph,pk) - p^{1-r} s_{4,r}(ph,k) + p s_{4,r}(h,k) \tag{3.26}$$

$(h+k)$ tek ise

$$\sum_{m=0}^{2p-1} S_r(h+mk,pk) \tag{3.27}$$

$$= \begin{cases} 2^{2-r} s_{4,r}(2h,k) - 2s_{4,r}(h,k) + 2S_r(h,k) & , p=2 \\ \left(p+p^{1-r}\right)\left(S_r(h,k) - s_{4,r}(h,k)\right) - p^{1-r}\left(S_r(ph,k) - s_{4,r}(ph,k)\right) & , p>2 \end{cases}$$

ve

$$\sum_{m=0}^{p-1} S_r(h+2mk,pk) \tag{3.28}$$

$$= \begin{cases} -p^{1-r} s_{4,r}(ph,pk) + p^{1-r} s_{4,r}(ph,k) - p s_{4,r}(h,k) & , \ p=2 \\ p^{1-r} S_r(ph,pk) - p^{1-r} S_r(ph,k) + p S_r(h,k) & , \ p>2 \end{cases}$$

dır.

İspat. $r \geq 1$ tek tamsayısı için $\overline{B}_r(0) = 0$ olduğundan $\lambda \to 0$ için Teorem 3.18, Teorem 3.19, Teorem 3.20, Teorem 3.21 ve Teorem 3.22 kullanılarak, sırasıyla, (3.24), (3.25), (3.26), (3.27) ve (3.28) bağıntıları elde edilir. ■

4. SONUÇ

Bu çalışma kapsamında, dejenere Hardy toplamları tanımlanarak, dejenere Dedekind toplamları cinslerinden ifadeleri ispatlanmıştır. $\lambda \to 0$ için dejenere Hardy toplamları Hardy toplamlarına, dejenere Hardy toplamlarının dejenere Dedekind toplamları cinsinden ifadeleri de, genelleştirilmiş Hardy toplamlarının genelleştirilmiş Dedekind toplamları cinsinden ifadelerine dönüştüğü gösterilmiştir. Bu toplamların sağladıkları reciprocity bağıntıları ispatlanmıştır. Ayrıca bu toplamların bazı özellikleri incelenmiştir.

5. KAYNAKLAR

APOSTOL, T. M. 1950. Generalized Dedekind sums and transformation formulae of certain Lambert series. *Duke Math. J.*, 17, 147–157.

APOSTOL, T. M. 1952. Theorems on generalized Dedekind sums , *Pacific J. Math.*, 2 1-9.

APOSTOL, T. M. 1976. Introduction to Analytic Number Theory, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York.

APOSTOL, T. M. and VU, T. H. 1982. Elementary proofs of Berndt's reciprocity laws. *Pacific J. Math.*, 98, 17-23.

BERNDT, B. C. 1973. Generalized Dedekind Eta-function and generalized Dedekind sums. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 178, 495-508.

BERNDT, B. C. 1975. Generalized Eisenstein series and modified Dedekind sums, *J. Reine Angew. Math.,* 272, 182-193.

BERNDT, B. C. 1978. Analytic Eisenstein series, theta functions and series relations in the spirit of Ramanujan, *J. Reine Angew. Math.,* 303/304, 332-365.

BERNDT, B. C. and EVANS, R. J. 1980. Problem E2758, solutions by D. M. Broline; F. S. Cater; L. Carlitz; L. L. Foster; F. D. Hammer; L. E. Mattics; J. Silverman. *Amer. Math. Monthly*, 87 (5), 404-405.

BERNDT, B. C. and GOLDBERG, L. A. 1984. Analytic properties of arithmetic sums arising in the theory of the classical theta functions. *Siam J. Math. Anal.*, 15 (1), 143–150.

CAN, M. 2000. Hardy Toplamları Üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Akdeniz Üniversitesi, 35 ss.

CAN, M. 2004. Some arithmetic on the Hardy sums $s_2(h,k)$ and $s_3(h,k)$. *Acta Math. Sin. Engl. Ser.*, 20 (2), 193-200.

CAN, M.,CENKCİ, M. and KURT, V. 2006. Generalized Hardy - Berndt sums, *Proc. Jangjeon Math.,* Soc. 9 No:1 19-38.

CAN, M. 2006. Genelleştirilmiş Hardy Toplamları, Doktora Tezi, Akdeniz Üniversitesi, 54 ss.

CARLITZ, L. 1954. Dedekind sums and Lambert series. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 5 (4), 580-584.

CARLITZ, L. 1964. Generalized Dedekind sums. *Math. Zeithschr.,* 85, 83-90.

CARLITZ, L. 1979. Degenerate Stirling, Bernoulli and Eulerian numbers, *Utilitas Math.*, Vol: 15 51-88.

CENKCİ, M., CAN, M. and KURT, V. 2007. Degenerate and character Dedekind sums. *J. Number Theory* 124 346-363.

CENKCİ, M., HOWARD, F. T. 2007. Notes on degenerate numbers, Discrete Math., 307, 2359-2375.

GOLDBERG, L. A. 1981. Transformations of theta-functions and analogues of Dedekind sums. Ph.D. thesis, University of Ulinious, Urbana.

JORDAN, C. 1965. Calculus of finite differences, Chelsea Publishing Company, New York N. Y.

KANEMITSU, S. and TSUKADA, H. 2007. Vistas of special functions, World Scientific, Singapore.

KURT, V. 1990. On Dedekind sums. *Indian J. Pure Appl. Math.,* 21 (10), 893-896.

KURT, V. 1991. Remarks on Dedekind sums. *Bull. Calcutta Math. Soc.,* 83 (6), 581-586.

KURT, V. 1997. Remarks on Higher Dimensional Dedekind sums. *Math. Japonica,* 45 (2), 297-301.

MEYER, J. L. 1997a. Properties of certain integer-valued analogues of Dedekind sums. *Acta Arith.,* LXXXII (3), 229-242.

MEYER, J. L. 1997b. Analogues of Dedekind sums. Ph.D. thesis, University of Illinois, Urbana, 1997.

NAGASAKA, Y., OTA, K. and SEKINE, C. 2003. Generalizations of Dedekind sums and their reciprocity laws. *Acta Arith.,* 106 (4), 355-378.

OTA, K. 2003. Derivatives of Dedekind sums and their reciprocity laws. *J. Number Theory,* 98, 280-309.

PETTET, M. R. and SITARAMACHANDRARAO, R. 1987. Three-term relations for Hardy sums. *J. Number Theory,* 25 (3), 328-339.

RADEMACHER, H. and WHITHEMAN, A. 1941. Theorems on Dedekind sums. *Amer. J. Math.,* 63, 377-407.

RADEMACHER, H. 1964. Some remarks on certain generalized Dedekind sums. *Acta Arith.,* IX, 97-105.

RADEMACHER, H. and GROSSWALD, E. 1972. Dedekind sums, Math. Assoc. of America, Washington, D.C.

SEKINE, C. 2005. On Eisenstein series with characters and Dedekind sums. *Acta Arith.,* 116 (1), 1-11.

ŞİMŞEK, Y. 1998. Theorems on three-term relations for Hardy sums. *Turkish J. Math.,* 22, 153-162.

ŞİMŞEK, Y. 2006. Remarks on reciprocity laws of the Dedekind and Hardy sums, *Advan. Stud. Contemp. Math.,* 12 (2), 237–246.

SITARAMACHANDRARAO, R. 1987. Dedekind and Hardy sums. *Acta Arith.,* XLIII, 325-340.

TAKÁCS, L. 1979. On generalized Dedekind sums. *J. Number Theory,* 11, 264–272.

ÖZGEÇMİŞ

M. Cihat DAĞLI, 1986 yılında Antalya'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Antalya'da tamamladı. 2004 yılında girdiği Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2008 yılında Matematikçi olarak mezun oldu. Eylül 2008'de Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Ocak 2010 yılında Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. Halen görevine devam etmektedir.