T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MERKEZİ FAKTÖRİYEL SAYILARININ ÜRETEÇ FONKSİYONLARI VE UYGULAMALARI

Ülker BAŞAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2016

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MERKEZİ FAKTÖRİYEL SAYILARININ ÜRETEÇ FONKSİYONLARI VE UYGULAMALARI

Ülker BAŞAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2016

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MERKEZİ FAKTÖRİYEL SAYILARININ ÜRETEÇ FONKSİYONLARI VE UYGULAMALARI

Ülker BAŞAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 08/01/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Yılmaz Şimşek
Prof. Dr. Mustafa Alkan
Yrd. Doç. Dr. Eda Yülüklü Kaya

ÖZET

MERKEZİ FAKTÖRİYEL SAYILARININ ÜRETEÇ FONKSİYONLARI VE UYGULAMALARI

Ülker BAŞAR

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Yılmaz Şimşek
Ocak 2016, 56 sayfa

Bu tezde, Merkezi Faktöriyel Sayılarının Üreteç Fonksiyonları ve Uygulamaları çalışılmıştır. Merkezi faktöriyel sayılarının tanımları ve bazı özellikleri ile birlikte üreteç fonksiyonları verilmiştir. Ayrıca, bazı özel sayıların ve bazı özel polinomların üreteç fonksiyonları ve uygulamaları araştırılmıştır. Stirling, Euler, Grünert, Bernoulli ve Genocchi polinomlarının bazı temel özellikleri verilmiş ve bu polinomlara ait rekürans ve diğer özel sayılarla olan ilişkilerine ait bağıntılar verilmiş, temel özellikleri incelenmiştir. Bu sayılar ile ilgili sonuçlar, uygulamalar ve yorumlar verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Merkezi Faktöriyel Sayıları, 1. ve 2. tür Stirling Sayıları, Bernoulli Polinomları, Euler Polinomları, Genocchi Polinomları, Grünert Polinomları.

JÜRİ: Prof. Dr. Yılmaz Şimşek (Danışman)
Prof. Dr. Mustafa Alkan
Yrd. Doç. Dr. Eda Yülüklü Kaya

ABSTRACT

GENERATING FUNCTIONS OF CENTRAL FACTORIAL NUMBERS AND THEIR APPLICATIONS

Ülker BAŞAR

MSc Thesis in Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Yılmaz Şimşek
January 2016, 56 pages

In this thesis, the central factorial numbers, their generating functions and their applications are studied. The main properties (fundamental properties) of these numbers and functions are given. Moreover, some special numbers and their generating functions are given and their properties are investigated. Relationships between these numbers and Stirling numbers, Euler, Grünert, Bernoulli, Genocchi and also Frobenious Euler polynomials are given. Further, remarks and comments are given. Finally, some applications of these numbers are given.

KEYWORDS: Central Factorial Numbers, First and Second Kind of Stirling Numbers, Bernoulli Polynomials, Euler Polynomials, Genocchi Polynomials, Grünert Polynomials.

COMMITTEE: Prof. Dr. Yılmaz Şimşek (Supervisor)
Prof. Dr. Mustafa Alkan
Asst. Prof. Dr. Eda Yülüklü Kaya

ÖNSÖZ

Bu tezde Merkezi Faktöriyel Sayılarının Üreteç Fonksiyonları ve Uygulamaları çalışılmıştır. Ayrıca, merkezi faktöriyel sayılarının yanısıra bazı özel polinomların üreteç fonksiyonları incelenmiş, bu polinomların rekürans ve diğer polinomlarla aralarında oluşturulan bağıntılar gibi temel özellikleri verilmiştir.

Üreteç fonksiyonları ve uygulamaları alanlarında birçok matematikçi çalışmış ve birbirinden değerli eserler vermişlerdir. Bu eserlerden yararlanılarak bir çok kaynakta farklı şekillerde verilen bazı teoremlerin ispatları ya da uygulamaları, temel analiz ve cebir metodları kullanılarak farklı şekillerde de verilebilir. Bu tezde, analitik sayılar teorisi alanında büyük rol oynayan özel polinom aileleri ele alınmıştır. 1. ve 2. tür Stirling sayıları ayrıntılı incelenmiştir. Özel polinom aileleri ile ilgili temel bağıntılar ve özellikler verilmiştir. Ayrıca, bu özel polinom ailelerine dair uygulamalar yapılmıştır.

Bu tez, Giriş, Materyal ve Metot, Bulgular ve Sonuç olmak üzere dört ana bölümden oluşur.

Birinci bölümde, Stirling Sayılarının tarihçesi verilmiştir. Bu tezde kullanılan bazı temel kavram ve tanımlar verilmiştir.

İkinci bölümde, Stirling Sayılarının üreteç fonksiyonları, rekürans bağıntıları, temel özellikleri ve diğer özel sayılarla arasındaki ilişkiler verilmiştir. Ayrıca, Merkezi Faktöriyel Sayıları, Bernoulli Polinomları, Euler Polinomları, Bernoulli sayıları, Euler sayıları, Eulerian Polinomları, Genocchi Polinomları, Grünert polinomları incelenmiş, üreteç fonksiyonları ve temel özellikleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Merkezi Faktöriyel Sayıları, Bernoulli Polinomları, Euler Polinomları, Bernoulli sayıları, Euler sayıları, Eulerian Polinomları, Genocchi Polinomları incelenmiş, bazı özellikleri araştırılmıştır.

Bu çalışma Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK yönetiminde hazırlanarak, Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur. Tez çalışmalarımın yürütülmesindeki yardımlarından dolayı değerli hocam Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK'e teşekkür ederim ve saygılarımı sunarım. Eğitim hayatım boyunca bana her zaman destek olan canım aileme yürekten teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{N}$	$= \{1, 2, 3, ...\}$
$\mathbb{N}_0$	$= \{0, 1, 2, 3, ...\}$
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\delta_{n,k}$	Kronecker delta fonksiyonu
$der(p(x))$	p(x) polinomunun derecesi
$H_n(x)$	Hermite polinomları
$B_n(x)$	Bernoulli polinomları
B_m	Bernoulli sayıları
$b_k(x)$	İkinci tür Bernoulli polinomları
$b_k(0)$	İkinci tür Bernoulli sayıları
$E_n(x)$	Euler polinomları
E_n	Euler sayıları
$G_n(x)$	Genocchi polinomları
G_n	Genocchi sayıları
$S_1(n, k)$	Birinci tür Stirling sayıları
$S_2(n, k)$	İkinci tür Stirling sayıları
$S_n^k(x)$	Array polinomları
$B_k^m(x)$	Grünert polinomları
$H_n(\alpha \mid x)$	Frobenious-Euler polinomları
$H_n(u)$	Frobenious-Euler sayıları
$S(A)$	Permütasyon kümesi
$x^{(m)}$	Faktöriyel fonksiyonu
$(x)^{\underline{n}}$	Azalan faktöriyel fonksiyonu
$(x)^{\overline{n}}$	Artan faktöriyel fonksiyonu

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. ÇALIŞMANIN KAPSAMI

Stirling sayıları çeşitli analitik ve kombinatorik problemlerde sıklıkla kullanılmaya başlamıştır. 18. yüzyılda James Stirling tarafından ilk olarak bulunmuştur. Bu sayılar günümüzde onun adıyla adlandırılmıştır. Stirling sayıları birinci tür Stirling sayıları ve ikinci tür Stirling sayıları olarak iki ayrı gruba ayrılmıştır. Bu çalışmamızda Stirling Sayıları ve bu sayıların özellikleri incelenmiştir. Giriş bölümünde Stirling Sayılarına temel teşkil edecek tanımlar, özellikler ve teoremlere yer verilmiştir. Bu çalışma sırasında incelenen kaynaklarda Stirling Sayıları için notasyon farklılıkları olduğu görülmüştür. Birinci tür Stirling sayıları $S_1(n,k), s(n,k), s_n^k$ ve $\left[{n \atop k}\right]$ v.s.; İkinci tür Stirling sayıları için ise, $S(n,k), S_2(n,k), S_n^k$, $S_k^{(n)}$ve $\left\{{n \atop k}\right\}$ v.s. notasyonları kullanılmıştır. Bu çalışmada ise Birinci tür Stirling sayıları için $S_1(n,k)$, İkinci tür Stirling sayıları için ise $S_2(n,k)$ notasyonları tercih edilmiştir.

Stirling sayıları adlandırması ilk olarak Danimarkalı matematikçi Niels Nielsen (1865-1931) tarafından yapılmıştır. Newton serileri üzerinde çalışan İskoç matematikçi James Stirling (1692-1770) tarafından keşfedilen bu sayılara ilk kez Nielsen kitabının 68. sayfasında atıfta bulunmuştur. (Nielsen 1965) Bu dönemde Stirling çalışmalarına devam ederek matematik tarihi için önemli bir kaç kitap yayınlamıştır. Bu çalışmalar kullanılarak, Ward, Bell, Riordan, Carlitz gibi matematikçiler bu alana çok değerli sonuçlar ve teoremler kazandırmışlardır.

Stirling sayılarının bulunuşunun ardından, Stephensen tarafından merkezi faktöriyel sayıları keşfedildi ve uzun yıllar kendisi tarafından çalışıldı. Bu faktöriyel sayılarının özellikleri ve uygulamaları Riordan (1963), Jordan (1960), Roman (1978), Rota (1978), Comtet (1972) gibi ünlü matematikçilerinde arasında bulunduğu bir grup tarafından tartışılmaya başlandı. Ayrıca, bu faktöriyel sayıları bazı yazarlar tarafından ”Stephensen polinomları” olarak da adlandırılmaktadır.

Üreteç fonksiyonlarının istatistik, olasılık teorisi, kombinatorik, uygulamalı matematik, sayılar teorisi ve fizik gibi birçok alanda uygulaması vardır. Bu tezde ise Merkezi Faktöriyel sayıları ve Stirling sayıları çalışılacaktır, bir çok polinom ailesi ile aralarındaki bağıntılar verilecektir. Bu tezde Euler, Bernoulli, Genocchi, Grünert polinomlarına ve Merkezi faktöriyel sayıları ile ilgili uygulamalarına yer verilecektir. Bu polinomlar ile ilişkili bir çok teoremler, özdeşlikler ve bağıntılar verilecektir. Stirling sayıları bu tezde yoğun bir şekilde ele alınacaktır. Bu polinomlar ve sayılar son yıllarda bir çok matematikçi tarafından farklı alanlarda çalışılmıştır. Örnek olarak Srivastava, Gould, Kim, Şimşek, Boyadziev, Murray gibi matematikçiler gösterilebilir.

2. TEMEL KAVRAM VE GÖSTERİMLER

2.1. Bir Kümenin Parçalanışı (Bölüntüsü)

Tanım 2.1.1. (Karakaş 1998) I indeks kümesi olmak üzere A kümesinin boş olmayan altkümelerinin bir ailesi $< A >= \{A_i \mid i \in I, I \neq \varnothing\}$ olsun. $< A >$ kümesi için

(1) $A_i \cap A_j = \varnothing, \forall i \neq j$

(2) $A = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$

şartları sağlanıyorsa $< A >$ kümesine A'nın bir parçalanışı (bölüntüsü) denir.

2.2. Permütasyon

Tanım 2.2.1. (Karakaş 1998) A boştan farklı bir küme olsun. Eğer bir $f : A \to A$ fonksiyonu bire-bir ve örten ise f fonksiyonuna A kümesi üzerinde bir "Permütasyon" denir. A kümesi üzerindeki tüm permütasyonlardan oluşan küme $S(A)$ ile gösterilir. Bu çalışmada aksi belirtilmedikçe A kümesi $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ olarak alınacaktır.

Teorem 2.2.2. *(Karakaş 1998) $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ kümesi üzerinde tanımlı bütün permütasyonların sayısı $\mid S(A) \mid = n!$.*

Tanım 2.2.3. (Karakaş 1998) $\alpha \in S(A)$ permütasyonu A kümesinin $i_{1,} i_2, \ldots, i_r$ gibi birtakım elemanlarını ardı ardına değiştirip geri kalan elemanlarını sabit bırakıyorsa, yani,

$\alpha(i_1) = i_2$, $\alpha(i_2) = i_3$,..., $\alpha(i_{r-1}) = i_r$, $\alpha(i_r) = i_1$

ve her $j \in A - \{i_{1,} i_2, \ldots, i_r\}$ için $\alpha(j) = j$ ise α ya bir devir (çevrinim) denir.

Bu tanımdaki bir devir $\alpha = (\, i_{1,} i_2, \ldots, i_r)$ ile gösterilir.

Bununla beraber,

$\alpha = (\, i_{1,} i_2, \ldots, i_r) = (\, i_{2,} i_3, \ldots, i_r, i_1) = \ldots = (i_{r,}\, i_1, \ldots, i_{r-1})$

yazılabileceği açıktır.

Tanım 2.2.4. (Karakaş 1998) $\alpha = (\, i_{1,} i_2, \ldots, i_r), \delta = (j_{1,} j_2, \ldots, j_s)$ iki devir olmak üzere eğer, $(\, i_{1,} i_2, \ldots, i_r) \cap (j_{1,} j_2, \ldots, j_s) = \varnothing$ şartı sağlanıyorsa bu iki devire "Ayrık Devirler" denir.

Teorem 2.2.5. *(Karakaş 1998) Her permütasyon ya bir devirdir yada sonlu sayıda ayrık devirlerin çarpımı olarak yazılabilir.*

Bu çalışmada logaritma fonksiyonunun seri açılımını kullanacağımızdan dolayı, aşağıdaki tanımı vereceğiz. $x = 0$ komşuluğunda $log(1 + x)$ 'in Taylor serisi aşağıdaki tanım ile verilir. Bu seri 1.tür Stirling sayılarının üreteç fonksiyonu için önemli bir yere sahiptir.

Tanım 2.2.6. (Murray 1961) Logaritma fonksiyonunun seri açılımı,

$$\ln(1+x) = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n},\ -1 < x \leq 1 \tag{2.1.}$$

dir.

Tanım 2.2.7. (Carlitz 1969) $\mid t \mid< R$, R$\in \mathbb{R}$ ve $z \in \mathbb{C}$ için,

$$F(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(z)\frac{t^n}{n!}$$

olsun. Bu durumda, $F(t,z)$ fonksiyonuna $(g_n(z))$ dizisinin üreteç fonksiyonu denir. $g_n(z)$ dizisinin bütün temel özellikleri $F(t,z)$ fonksiyonu tarafından bulunabilir.

2.3. Faktöriyel Fonksiyonları

Tanım 2.3.1. (Murray 1961) m pozitif bir tam sayı ve h bir rasyonel sayı olsun. $x^{(m)}$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$x^{(m)} = x(x-h)(x-2h)\ldots(x-[m-1]h), m = 1,2,3,\ldots$$

Eğer $m = 0$ ise $x^{(m)} = 1$ yani $x^{(0)} = 1$ olur.

Özel durumda $x = m$, $h = 1$ alınırsa,

$$m^{(m)} = m(m-1)(m-2)\ldots 2.1 = m!$$

olur. m negatif bir tam sayı olsun. O zaman $x^{(-m)}$ şu şekilde tanımlanır:

$$x^{(-m)} = \frac{1}{(x+h)(x+2h)\ldots(x+mh)} = \frac{1}{(x+mh)^{(m)}}, m = 1,2,3,\ldots$$

olur. Ayrıca $x^{(m)}$ fonksiyonlarını Euler gama fonksiyonu yardımıyla da tanımlayabiliriz. Faktöriyel fonksiyonlarında $m = 1,2,3,\ldots$ yazılırsa faktöriyel polinomları elde edilir ve bu polinomların katsayıları bize 1. ve 2. tür Stirling sayılarını verir. ($h = 1$ alalım)

2.3.1. Azalan faktöriyel fonksiyonu

Tanım 2.3.2. (Mond and Krammer 2004) $x \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$(x)^{\underline{n}} = \begin{cases} \prod_{k=0}^{n-1}(x-k) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1) & ,n > 0 \\ 1 & ,n = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $(x)^{\underline{n}}$ fonksiyonuna "Azalan Faktöriyel Fonksiyonu" denir. Azalan faktöriyel fonksiyonu negatif tamsayılar için şu şekilde tanımlanır, $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere;

$$(x)^{\underline{-n}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$$

dir.

Uyarı 2.3.3. *$h = 1$ için $x^{(m)} = (x)^{\underline{m}}$' dir.*

2.3.2. Artan faktöriyel fonksiyonu

Tanım 2.3.4. (Mond and Krammer 2004) $x \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$(x)^{\overline{n}} = \begin{cases} \prod_{k=0}^{n-1}(x+k) = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1) & ; n > 0 \\ 1 & ; n = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $(x)^{\overline{n}}$ fonksiyonuna "Artan Faktöriyel Fonksiyonu" denir. Artan faktöriyel fonksiyonu negatif tamsayılar için şu şekilde tanımlanır, $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere;

$$(x)^{\overline{-n}} = \frac{1}{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}$$

dir.

(Murray 1961) tarafından Faktöriyel polinomları ile 1. tür Stirling sayıları arasındaki ilişkiyi gösteren bağıntı aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$S_1(n,k) = \frac{1}{k!}\frac{d^n}{dx^n}x^{(k)} \mid_{x=0}$$

dır.

Tanım 2.3.5. (Erdelyi 1953) $t \in \mathbb{C}$ olsun. Herhangi bir x karmaşık sayısı için $B_n(x)$ Bernoulli polinomları,

$$\frac{t}{e^t-1}e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!}, \mid t \mid < 2\pi \qquad (2.2.)$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır.

Uyarı 2.3.6. $x = 0$ *ise* $B_n(0) = B_n$ *ya da* $x = 1$ *ise* $B_n(1) = B_n$ *'dir.*

Tanım 2.3.7. (Erdelyi 1953) $t \in \mathbb{C}$ olsun. Bernoulli sayıları,

$$\frac{t}{e^t-1} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m\frac{t^m}{m!}, \mid t \mid < 2\pi \qquad (2.3.)$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır.

Tanım 2.3.8. (Erdelyi 1953) B_n, Bernoulli sayıları olmak üzere

$B_0 = 1$ olsun $n > 1$ için;

$$B_n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}B_i \qquad (2.4.)$$

dir.

Onuncu dereceye kadar olan Bernoulli sayıları sırasıyla aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned}
B_0 &= 1, \\
B_1 &= -\frac{1}{2}, \\
B_2 &= \frac{1}{6}, \\
B_4 &= -\frac{1}{30}, \\
B_6 &= \frac{1}{42}, \\
B_8 &= -\frac{1}{30}, \\
B_{10} &= \frac{5}{66}.
\end{aligned}$$

Uyarı 2.3.9. $B_3, B_5, B_7, \ldots$ *gibi tüm tek indisli Bernoulli sayıları* 0*'dır.*

Teorem 2.3.10. *(Conway 1986) Bernoulli sayıları ile Bernoulli polinomları arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde verilir:*

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} B_k \binom{n}{k} x^{n-k}. \tag{2.5.}$$

Altıncı dereceye kadar olan Bernoulli polinomları sırasıyla aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned}
B_0(x) &= 1, \\
B_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\
B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}, \\
B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \\
B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, \\
B_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x, \\
B_6(x) &= x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}.
\end{aligned}$$

Tanım 2.3.11. (Roman 2005, Weisstein 1998) İkinci tür Bernoulli polinomları $b_k(x)$ ile gösterilir. $b_k(x)$ polinomlarının üreteç fonksiyonu,

$$\frac{t(1+t)^x}{\ln(1+t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k(x)}{k!} t^k \tag{2.6.}$$

dir.

Dördüncü dereceye kadar olan ikinci tür Bernoulli polinomları sırasıyla aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} b_0(x) &= 1, \\ b_1(x) &= \frac{1}{2}(2x+1), \\ b_2(x) &= \frac{1}{6}(6x^2-1), \\ b_3(x) &= \frac{1}{4}(4x^3-6x^2+1), \\ b_4(x) &= \frac{1}{30}(30x^4-120x^3+120x^2-19). \end{aligned}$$

Tanım 2.3.12. (Roman 2005, Weisstein 1998) İkinci tür Bernoulli sayıları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$(2.6.)$ bağıntısında $x=0$ alınırsa;

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k(0)}{k!} t^k = \frac{t}{\ln(1+t)}$$

olur. Buradaki $b_k(0)$ sayılarına ikinci tür Bernoulli sayıları ya da Cauchy sayıları denir.

Dördüncü dereceye kadar olan ikinci tür Bernoulli sayıları sırasıyla aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} b_0(0) &= 1, \\ b_1(0) &= \frac{1}{2}, \\ b_2(0) &= -\frac{1}{6}, \\ b_3(0) &= \frac{1}{4}, \\ b_4(0) &= -\frac{19}{30}. \end{aligned}$$

Tanım 2.3.13. (Roman 2005, Şimşek 2013) $t \in \mathbb{C}$ olsun. Euler sayıları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$\frac{2}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{t^n}{n!}, \mid t \mid < \pi$$

Bu üreteç fonksiyonundan;

$E_0 = 1$ ve $n \geqslant 1$ için,

$$E_n = -\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} E_j$$

dir.

Beşinci dereceye kadar olan Euler sayıları sırasıyla aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} E_0 &= 1, \\ E_1 &= -\frac{1}{2}, \\ E_3 &= \frac{1}{4}, \\ E_5 &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Uyarı 2.3.14. $E_{2n} = 0$*'dır.*

Tanım 2.3.15. (Erdelyi 1953) $t \in \mathbb{C}$ olsun. Herhangi bir x karmaşık sayısı için $E_n(x)$ Euler polinomları,

$$(\frac{2}{e^t+1})e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!}, \mid t \mid < \pi$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır.

Altıncı dereceye kadar olan Euler polinomları sırasıyla aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} E_0(x) &= 1, \\ E_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\ E_2(x) &= x^2 - x, \\ E_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}, \\ E_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x, \\ E_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \\ E_6(x) &= x^6 - 3x^5 + 5x^3 - 3x. \end{aligned}$$

Tanım 2.3.16. (Roman 2005) $t \in \mathbb{C}$ olsun. Herhangi bir x karmaşık sayısı için $G_n(x)$ Genocchi polinomları,

$$(\frac{2t}{e^t+1})e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x)\frac{t^n}{n!}, \mid t \mid < \pi \tag{2.7.}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır.

Tanım 2.3.17. (Şimşek 2009) Genocchi sayılarının üreteç fonksiyonu,

$$\frac{2t}{1+e^t} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n\frac{t^n}{n!} \tag{2.8.}$$

şeklindedir.

Sekizinci dereceye kadar olan Genocchi sayıları sırasıyla aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} G_2 &= -1, \\ G_4 &= 1, \\ G_6 &= -3, \\ G_8 &= 17. \end{aligned}$$

Uyarı 2.3.18. *$G_1 = 1$, $G_3 = G_5 = G_7 = \ldots = 0$'dır.*

Şimdi birkaç Genocchi polinomunu bulalım. Genocchi sayılarının üreteç fonksiyonu $(2.8.)$ *bağıntısından,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{t^n}{n!} = \frac{2t}{1+e^t}$$

şeklindedir ve bu denklemi

$$G_0 + G_1 t + G_2 \frac{t^2}{2!} + \ldots = \frac{2t}{1-(-e^t)} = 2t \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{nt}$$

biçiminde yazarsak $G_0 = 0$ olduğu görülür. Diğer Genocchi sayılarını bulalım.

$$(G+1)^n + G_n = \begin{Bmatrix} 2, & n = 1 \\ 0, & n > 1 \end{Bmatrix} \tag{2.9.}$$

Bu bağıntıda Genocchi sayılarını veren bağıntıdır. $(2.9.)$ *bağıntısından aşağıdaki örnekler verilebilir:*

$(2.9.)$'da $n = 1$ için;

$(G+1)^1 + G_1 = 2$

$$\begin{aligned} \binom{1}{0} G_0 + \binom{1}{1} G_1 + G_1 &= 2, \; (G_0 = 0) \\ 0 + G_1 + G_1 &= 2, \\ G_1 &= 1 \end{aligned}$$

bulunur.

$(2.9.)$'da $n = 2$ için;

$$\begin{aligned} (G+1)^2 + G_2 &= 0 \\ \binom{2}{0} G_0 + \binom{2}{1} G_1 + \binom{2}{2} G_2 + G_2 &= 0, \end{aligned}$$

elde edilir ve gerekli işlemler yapılırsa $G_2 = -1$ bulunur.

(2.9.)'da $n = 3$ için;

$$\begin{aligned}(G+1)^3 + G_3 &= 0\\ \binom{3}{0}G_3 + \binom{3}{1}G_1 + \binom{3}{2}G_2 + \binom{3}{3}G_3 + G_3 &= 0,\end{aligned}$$

buradan $G_3 = 0$ olarak bulunur.

Benzer yolla diğer Genocchi sayıları bulunabilir. Bulduğumuz bu Genocchi sayıları yardımıyla Genocchi polinomları aşağıdaki bağıntı ile verilir:

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} G_k x^{n-k} = (G+x)^n.$$

Yukarıdaki bağıntı yardımıyla,

(1) $n = 0$ için,$G_0(x) = 0$

(2) $n = 1$ için,$G_1(x) = 1$

(3) $n = 2$ için,$G_2(x) = 2x - 1$

(4) $n = 3$ için $G_3(x) = 3x^2 - 3x$

bulunur.

Tanım 2.3.19. (Boyadzhiev 2012) e^x fonksiyonuna $x\frac{d}{dx}$ operatörünün tekrarlanarak uygulanması ile bir polinom dizisi elde edilir. Bu polinomlara Grünert polinomları denir.

Tanım 2.3.20. (Carlitz 1963, Şimşek 2013) $1 \neq u \in \mathbb{C}$ cebirsel sayısı olsun. Bu durumda, $H_n(x, u)$ ile gösterilen Frobenious- Euler polinomları,

$$\frac{1-u}{e^t - u} e^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x, u) \frac{t^n}{n!},$$

ifadesi ile tanımlanır.

Özel olarak $x = 0$ ve $u = -1$ alınırsa, sırasıyla, $H_n(0, u) = H_n(u)$ ve $H_n(x, -1) = E_n(x)$'tir. $H_n(u)$ sayılarına, Frobenious- Euler sayıları denir.

Teorem 2.3.21. *(Chang and Ha 2001) $u \in \mathbb{C}$ olsun. Herhangi bir u karmaşık sayısı için $H_n(u)$ Frobenious- Euler sayıları,*

$$H_n(u) = \frac{1}{u} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H_k(u),\ n \geqslant 1$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır.

- Frobenious-Euler Sayıları:

$$\begin{aligned}
H_1(u) &= \frac{1}{u}H_0(u) + \frac{1}{u}H_1(u) \\
H_1(u)(1-\frac{1}{u}) &= \frac{1}{u} \\
H_1(u) &= \frac{1}{u-1} \\
H_2(u) &= \frac{1}{u}(H_0(u) + 2H_1(u) + H_2(u)) \\
H_2(u) - \frac{1}{u}H_2(u) &= \frac{1}{u} + \frac{2}{u-1} \\
H_2(u) &= \frac{u}{u-1}.\frac{u-1+2u}{u(u-1)} \\
&= \frac{3u-1}{(u-1)^2} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Teorem 2.3.22. *(Chang and Ha 2001) $u \in \mathbb{C}$ olsun. Herhangi bir u karmaşık sayısı için $H_n(x,u)$ Frobenious- Euler polinomları,*

$$H_n(x,u) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} H_k(x,u), \; n \geqslant 1$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır.

- Frobenious-Euler Polinomları:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} H_n(u)\frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x,u)\frac{t^n}{n!} \\
\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} H_k(u))\frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x,u)\frac{t^n}{n!} \\
H_n(x,u) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} H_k(u) \\
H_0(x,u) &= 1 \\
H_1(x,u) &= xH_0(u) + H_1(u) \\
&= x + \frac{1}{u-1} \\
H_2(x,u) &= x^2 H_0(u) + 2xH_1(u) + H_2(u) \\
&= x^2 + \frac{2}{u-1}x + \frac{3u-1}{(u-1)^2} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$u = -1$ olduğu durumda Frobenious-Euler sayıları Euler sayılarına eşittir:

$H_n(-1) = E_n$

dir.

Tanım 2.3.21. de verilen üreteç fonksiyonu kullanılarak,

$$H_0(u) = 1$$

ve

$$(H+1)^n - uH_n(u) = 0$$

şeklinde indirgeme bağıntısı ile hesaplanır. Yani,

$$\begin{aligned}
\frac{1-u}{e^t-u}e^{xt} &= \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x,u)\frac{t^n}{n!} \\
\frac{1-u}{e^t-u} &= e^{tH_n(u)} \\
(1-u) &= e^{t(H_n(u)+1)} - ue^{tH_n(u)} \\
&= 0t^2 + 0t + (1-u) = \sum_{n=0}^{\infty}((H_n(u)+1)^n - uH_n(u))\frac{t^n}{n!} \\
1-u &= H_0(u) - uH_0(u) \\
H_0(u) &= 1
\end{aligned}$$

olduğu gösterilmiş olur.

Tanım 2.3.23. (Chang and Ha 2005, Şimşek 2013) $t \in \mathbb{C}$ olsun. Herhangi bir t karmaşık sayısı için $S_n^k(x)$ Stirling polinomları (Array polinomları / Bell tipi polinomlar),

$$(\frac{e^t-1}{k!})^k e^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^k(x)\frac{t^n}{n!}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır.

Bu polinomların bazı özellikleri aşağıda verilmiştir: (Chang and Ha 2005, **?**)

(1) $k > n$ ve $n < 0$ ise $S_k^n(x) = 0$'dır.

(2) $S_0^0(x) = S_n^n(x) = 1$'dir.

(3) $S_0^n(x) = x^n$'dir.

(4) $S_k^n(x) = \frac{1}{k!}\Delta^k x^n = \frac{1}{k!}\sum\limits_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(x+j)^n$'dir.

(5) $S_n^k(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}S_2(n,k)$'dir.

Tanım 2.3.24. (Butzer, Markett and Schmidt 1991) n, k negatif olmayan tamsayılar olmak üzere $(x)^{\underline{n}}$, Azalan Faktöriyel Fonksiyonu olmak üzere Merkezi faktöriyel sayıları aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$(x)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} t(n,k)x^k, \; (x \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\})$$

dır. Buradaki $(x)^{\underline{n}}$ Azalan Faktöriyel fonksiyonu ise şu şeklide tanımlıdır:

$$(x)^{\underline{0}} = 1 \text{ ve } (x)^{\underline{n}} = x(x + \frac{n}{2} - 1)\dots(x - \frac{n}{2} + 1), \ (n \in \mathbb{N}).$$

Tanım 2.3.25. (Butzer, Markett and Schmidt 1991) n, k negatif olmayan tamsayılar olmak üzere, 1. tür $t(n, k)$ merkezi faktöriyel sayıları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$\frac{(2 \arcsin h(\frac{x}{2}))^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} t(n, k)\frac{t^n}{n!}, \ (\mid t \mid \leq 2, \ k \in \mathbb{N}_0).$$

Bu sayıların bazı özellikleri aşağıda verilmiştir: (Butzer, Markett and Schmidt 1991)

(1) $n > 0, k = 0$ ise $t(n, 0) = \delta_{n,0}$'dır.

(2) $k > n$ ise $t(n, k) = 0$'dır.

(3) n yerine $2n$ ve k yerine $2k + 1$ yazılır ise $t(2n, 2k + 1) = t(2k + 1, 2n) = 0$'dır $(k, n \in \mathbb{N}_0)$.

2.4. 2. Tür Merkezi Faktöriyel Sayıları

Tanım 2.4.1. (Cigler 2015, Şimşek 2014) n, k negatif olmayan tamsayılar olmak üzere, 2. tür $T(n, k)$ merkezi faktöriyel sayıları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$\frac{1}{(2k)!}(e^t + e^{-t} - 2)^k = \sum_{n=k}^{\infty} T(n, k)\frac{t^{2n}}{(2n)!}. \tag{2.10.}$$

Bu sayıların bazı özellikleri aşağıda verilmiştir (Şimşek 2014):

(1) $n, k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $T(0, k) = T(n, 0) = 0$'dır.

(2) $n, k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $k = 1$ ise $T(n, 1) = 1$'dir.

(3) $n = k = 0$ ise $T(0, 0) = 1$'dir.

2.5. 1. Tür Stirling Sayıları

Tanım 2.5.1. (Murray 1961) n, k negatif olmayan tamsayılar ve $k < n$ olmak üzere, n elemanlı bir küme üzerinde tanımlı k tane ayrık devirin çarpımından oluşan permütasyonların sayısına "Birinci Tür Stirling Sayıları" denir ve $S_1(n, k)$ ile gösterilir. 1. tür $S_1(n, k)$ sayıları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır.

$$\frac{(\log(1 + t))^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} S_1(n, k)\frac{t^n}{n!}, \mid t \mid < 1 \tag{2.11.}$$

Bu sayıların bazı özellikleri aşağıda verilmiştir: (Murray 1961)

(1) $k > n$ ise $S_1(n, k) = 0$'dır.

(2) $k = 0, n = 0$ ise $S_1(0, 0) = 1$'dir.

(3) $n > 0, k = 0$ ise $S_1(n, 0) = 0$'dır.

(4) $k = 1$ ise $S_1(n, 1) = (n - 1)!$'dır.

(5) $k = n$ ise $S_1(n, n) = 1$'dir.

(6) $n > 0, k = 2$ ise $S_1(n, 2) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$'dır.

Örnek 2.5.2. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi üzerinde tanımlı 2 ayrık devirin çarpımından oluşan permütasyonlar,

- $\alpha_1 = (12)(34)$,
- $\alpha_2 = (13)(24)$,
- $\alpha_3 = (14)(23)$,
- $\alpha_4 = (1)(234)$,
- $\alpha_5 = (1)(324)$,
- $\alpha_6 = (2)(134)$,
- $\alpha_7 = (2)(314)$,
- $\alpha_8 = (3)(124)$,
- $\alpha_9 = (3)(214)$,
- $\alpha_{10} = (4)(123)$,
- $\alpha_{11} = (4)(213)$

şeklindedir. Böylece 4 elemanlı A kümesi üzerinde tanımlı 2 ayrık devirin çarpımından oluşan permütasyonların sayısı, $S_1(4, 2) = 11$ olur.

Çizelge 2.1. Tanım 2.5.1'e göre Birinci Tür Stirling Sayıları

n	$S_1(n,1)$	$S_1(n,2)$	$S_1(n,3)$	$S_1(n,4)$	$S_1(n,5)$	$S_1(n,6)$	$S_1(n,7)$	$S_1(n,8)$
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0
3	2	3	1	0	0	0	0	0
4	6	11	6	1	0	0	0	0
5	24	50	35	10	1	0	0	0
6	120	274	225	85	15	1	0	0
7	720	1764	1624	735	175	21	1	0
8	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1

Uyarı 2.5.3. *(Murray 1961) n, k negatif olmayan tamsayılar olmak üzere $(x)^{\underline{n}}$, Azalan Faktöriyel Fonksiyonunun açılımındaki x^k lı terimlerin katsayılarına "Birinci Tür Stirling Sayıları" denir. Matematiksel gösterimi ise,*

$$(x)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} S_1(n, k)x^k \tag{2.12.}$$

şeklinde olacaktır.

Çizelge 2.2. Tanım 2.5.3'e göre Birinci Tür Stirling Sayıları

n	$S_1(n,1)$	$S_1(n,2)$	$S_1(n,3)$	$S_1(n,4)$	$S_1(n,5)$	$S_1(n,6)$	$S_1(n,7)$	$S_1(n,8)$
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	-1	1	0	0	0	0	0	0
3	2	-3	1	0	0	0	0	0
4	-6	11	-6	1	0	0	0	0
5	24	-50	35	-10	1	0	0	0
6	-120	274	-225	85	-15	1	0	0
7	720	-1764	1624	-735	175	-21	1	0
8	-5040	13068	-13132	6769	-1960	322	-28	1

2.6. 2. Tür Stirling Sayıları

Tanım 2.6.1. (Çam 2005) n ve k negatif olmayan tamsayılar olmak üzere, n elemanlı bir kümenin k tane ayrık ve boş olmayan alt kümeye parçalanışlarının sayısına "İkinci Tür Stirling Sayıları" denir ve $S_2(n,k)$ şeklinde gösterilir.

Örnek 2.6.2. Örnek olarak $S_2(4,2)$'yi bulalım. Dört elemanlı $\{1,2,3,4\}$ kümesini iki ayrık ve boş olmayan alt kümeye parçalayacağız. İşte bu parçalanışlar:

- $\{1\},\{2,3,4\}$
- $\{1,2,3\},\{4\}$
- $\{1,2\},\{3,4\}$
- $\{1,2,4\},\{3\}$
- $\{1,3\},\{2,4\}$
- $\{1,3,4\},\{2\}$
- $\{1,4\},\{2,3\}$

Toplam 7 tane bulduğumuzdan, $S_2(4,2)=7$'dir.

2.tür Stirling sayıları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:(Murray 1961)

$$\frac{(e^t-1)^k}{k!}=\sum_{n=0}^{\infty} S_2(n,k)\frac{t^n}{n!} \tag{2.13.}$$

Bu sayıların bazı özellikleri aşağıda verilmiştir: (Arakawa, Ibukiyama and Kareko 2014)

(1) $n=k=0$ ise $S_2(0,0)=1$'dır.

(2) $n>0, k=0$ ise $S_2(n,0)=0$'dır.

(3) $k=1$ ise $S_2(n,1)=1$'dır.

(4) $k = n$ ise $S_2(n, n) = 1$'dır.

(5) $k > n$ ise $S_2(n, k) = 0$'dır.

(6) $k = n - 1$ ise $S_2(n, n-1) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$'dir.

(7) $k = 2$ ise $S_2(n, 2) = 2^{n-1} - 1$'dir.

Çizelge 2.3. Tanım 2.6.1'e göre İkinci Tür Stirling Sayıları

n	$S_1(n,1)$	$S_1(n,2)$	$S_1(n,3)$	$S_1(n,4)$	$S_1(n,5)$	$S_1(n,6)$	$S_1(n,7)$	$S_1(n,8)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0
3	1	3	1	0	0	0	0	0
4	1	7	6	1	0	0	0	0
5	1	15	25	10	1	0	0	0
6	1	31	90	65	15	1	0	0
7	1	63	301	350	140	21	1	0
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde sayılar teorisinin bazı önemli kavramları ve örnekleri verilecektir.

3.1. 1. Tür Stirling Sayılarının Temel Özellikleri

3.1.1. $S_1(h,k)$ için rekürans bağıntısı

$S_1(h,k)$ için rekürans bağıntısı aşağıdaki şekilde verilir:

$$S_1(n+1,k)+nS_1(n,k)=S_1(n,k-1) \tag{3.1.}$$

Bu method (Arakawa, Ibukiyama and Kareko 2014) tarafından verilmiştir.

$$\begin{aligned} f_1(t,k) &= \frac{(\log(1+t))^k}{k!}=\sum_{n=0}^{\infty}S_1(n,k)\frac{t^n}{n!} \\ \frac{d}{dt}f_1(t,k) &= \frac{1}{(k-1)!}(\log(1+t))^{k-1}\frac{1}{t+1} \end{aligned}$$

$1+t\neq 0$ ’dır. Her 2 tarafı $(1+t)$ ile çarpalım:

$$\begin{aligned} (1+t)\frac{d}{dt}f_1(t,k) &= \frac{1}{(k-1)!}(\log(1+t))^{k-1} \\ (1+t)\sum_{n=1}^{\infty}S_1(n,k)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} &= \sum_{n=0}^{\infty}S_1(n,k-1)\frac{t^n}{n!} \\ \sum_{n=1}^{\infty}S_1(n,k)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}+\sum_{n=1}^{\infty}S_1(n,k)\frac{t^n}{(n-1)!} &= \sum_{n=0}^{\infty}S_1(n,k-1)\frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

Yukarıdaki bağıntıdan,

$$\sum_{n=0}^{\infty}S_1(n+1,k)\frac{t^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}nS_1(n,k)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}S_1(n,k-1)\frac{t^n}{n!}$$

Bu bağıntıda $\frac{t^n}{n!}$ in katsayıları eşitlenirse, aşağıdaki sonuç bulunur:

$$S_1(n+1,k)+nS_1(n,k)=S_1(n,k-1).$$

Rekürans bağıntısı aşağıdaki gibi farklı şekillerde de verilebilir:

$$S_1(n-1,k-1)=S_1(n,k)+(n-1)S_1(n-1,k)$$

ya da

$$S_1(n,k)=S_1(n-1,k-1)-(n-1)S_1(n-1,k)$$

dir.

(3.1.) bağıntısının farklı bir ispatı da (Murray 1961) tarafından tümevarım yöntemi kullanılarak verilmiştir. Bu ispatı kısaca verelim:

$$x^{(n)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_1(n,k)x^k$$

$$x^{(n+1)} = (x-n)x^{(n)}$$

özelliğini kullanırsak;

$$\begin{aligned} x^{(n+1)} &= xx^{(n)} - nx^{(n)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_1(n,k)x^{k+1} - n\sum_{k=-\infty}^{\infty} S_1(n,k)x^k \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_1(n+1,k)x^k &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (S_1(n,k-1) - nS_1(n,k))x^k \\ S_1(n+1,k) &= S_1(n,k-1) - nS_1(n,k) \end{aligned}$$

dir.

(3.1.) bağıntısından;

$S_1(n,n) = 1,\ S_1(n,k) = 0$ ($k \leq\ 0, k \geqslant\ n+1, n > 0$ için) elde edilir.

$$\begin{aligned} S_1(n+1,n) + nS_1(n,n) &= S_1(n,n-1) \\ S_1(n,n) &= \frac{S_1(n,n-1) + S_1(n+1,n)}{n} \end{aligned}$$

$S_1(n,n) = 1$ olduğundan,

$$n = S_1(n,n-1) + S_1(n+1,n)$$

bulunur.

3.1.2. (1+t)^x Fonksiyonu yardımıyla 1. tür stirling sayıları için üreteç fonksiyonu elde edilmesi

Bu method (Arakawa, Ibukiyama and Kareko 2014) tarafından verilmiştir.

(1)

$$(1+t)^x = e^{x\log(1+t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\log^k(1+t)$$

(2)

$$\begin{aligned}
(1+t)^x &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{x}{k}t^k, \mid t \mid < 1, \text{(Binom Teoremi)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}t^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(x)_n\,\frac{t^k}{k!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{\infty}S_1(k,j)x^j)\frac{t^k}{k!} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{\infty}S_1(k,j)\frac{t^k}{k!})x^j
\end{aligned}$$

dir. Burada $(x)_k = x(x-1)\dots(x-k+1)$ ve $(x)_0 = 1$'dir.

$$(1+t)^x = e^{x\log(1+t)} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{j!}(\log(1+t))^j$$

dir. Buradan,

$$\frac{(\log(1+t))^j}{j!} = \sum_{k=0}^{\infty}S_1(k,j)\frac{t^k}{k!}$$

bulunur. Böylece $(2.11.)$ bağıntısı elde edilir.

Teorem 3.1.1. *(Mond and Krammer 2004) n,k negatif olmayan tam sayılar olmak üzere;*

$$\sum_{k=0}^{n}S_1(n,k) = n! \tag{3.2.}$$

dir.

İspat. Teorem $2.2.2.$'den $A = \{1,2,3,\dots,n\}$ kümesi üzerinde tanımlı tüm permütasyonların sayısı n! dir. Teorem $2.2.5.$'den her permütasyon sonlu sayıda ayrık devirlerin çarpımı olarak yazılabileceğinden $(3.2.)$ eşitliği sağlanmış olacaktır. □

Teorem 3.1.2. *(İbis 2005, Mond and Krammer 2004) $n \geqslant 1$, x bir tamsayı ve $x < n$ için,*

$$\sum_{k=1}^{n}S_1(n+1,k) = 0$$

dır.

İspat. *Bu teoremin ispatı (Michaels and Rosen 1991) tarafından verilmiştir. Ayrıca tümevarım metodu ile (İbis 2005) tarafından da verilmiştir.* □

3.2. 2. Tür Stirling Sayılarının Temel Özellikleri

3.2.1. $S_2(h,k)$ için rekürans bağıntısı

$S_2(h,k)$ için rekürans bağıntısı aşağıdaki şekilde verilir:

$$S_2(n+1,k) = kS_2(n,k) + S_2(n,k-1). \tag{3.3.}$$

Bu method (Arakawa, Ibukiyama and Kareko 2014) tarafından verilmiştir.

$$f_2(t,k) = \frac{(e^t-1)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} S_2(n,k)\frac{t^n}{n!}, (k \in \mathbb{N}) \tag{3.4.}$$

$$\frac{d}{dt}f_2(t,k) = \frac{k}{k(k-1)!}e^t(e^t-1)^{k-1}$$

(2.13.), (3.3.) ve (3.4.)'den,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} S_2(n,k)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} &= \frac{1}{(k-1)!}((e^t-1)+1)(e^t-1)^{k-1} \\
&= \frac{1}{(k-1)!}(e^t-1)^k + \frac{1}{(k-1)!}(e^t-1)^{k-1} \\
&= \frac{k}{k(k-1)!}(e^t-1)^k + \frac{1}{(k-1)!}(e^t-1)^{k-1} \\
&= k\sum_{n=0}^{\infty} S_2(n,k)\frac{t^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} S_2(n,k-1)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$S_2(n+1,k) = kS_2(n,k) + S_2(n,k-1)$$

bulunur. Ya da

$$S_2(n,k) = kS_2(n-1,k) + S_2(n-1,k-1)$$

şeklinde de yazabiliriz.

(3.3.) bağıntısının farklı bir ispatı da (Murray 1961) tarafından tümevarım yöntemi kullanılarak verilmiştir. Bu ispatı kısaca verelim:

$$x^n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_2(n,k)x^{(k)} \tag{3.5.}$$

olduğu bilindiğinden,

$$x^{n+1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_2(n+1,k)x^{(k)}$$

olduğunu göstermeliyiz. (3.5.) bağıntısının her iki tarafını da $(x-k)$ ile çarparsak;

$$x^n(x-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_2(n,k)(x-k)x^{(k)}$$

elde edilir. $x^{(k+1)} = (x-k)x^{(k)}$ olduğundan;

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_2(n,k)x^{(k+1)} &= x^{n+1} - kx^n \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_2(n,k-1)x^{(k)} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_2(n+1,k)x^{(k)} - k\sum_{k=-\infty}^{\infty} S_2(n+1,k)x^{(k)} \end{aligned}$$

Buradan, $x^{(k)}$ katsayılarını eşitlersek (3.3.) bağıntısı bulunmuş olur.

3.2.2. 2. tür Stirling sayıları için üreteç fonksiyonu elde edilmesi

Bu method (Arakawa, Ibukiyama and Kareko 2014) tarafından verilmiştir.

$F_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S_2(n,k)\frac{x^n}{n!}$ olsun.

$$\begin{aligned} \left(1-e^{-x}\right)\frac{dF_k(x)}{dx} &= kF_k(x) \\ \frac{dF_k(x)}{F_k(x)} &= \frac{kdx}{1-e^{-x}} \\ \ln F_k(x) &= \int \frac{ke^x dx}{e^x-1} \\ \ln F_k(x) &= k\ln(e^x-1) + \ln c \\ F_k(x) &= (e^x-1)^k c = \sum_{n=0}^{\infty} S_2(n,k)\frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

Yukarıdaki bağıntıdan $c = (k!)^{-1}$ elde edilir. Buradan,

$$F_k(x) = \frac{(e^x-1)^k}{k!}$$

bulunur.

Teorem 3.2.1. *(Murray 1961)*

$$S_2(n+1,n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

eşitliği vardır.

İspat. Bu ispat (Murray 1961) tarafından verilmiştir. Rekürans bağıntısı kullanılarak yapılır.

$$S_2(m,n) = nS_2(m-1,n) + S_2(m-1,n-1)$$

$m > 0$ ve her n için, $S_2(0,0) = 1$ ve $S_2(0,n) = 0$ olduğundan,

(3.3.)'de $n \neq 0$ için, $m = n+1$ durumunda;

$$\begin{aligned} S_2(n+1,n) &= nS_2(n,n) + S_2(n,n-1) \\ &= n + S_2(n,n-1) \\ &= n + (n-1) + S_2(n-1,n-2) \\ &= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 \\ S_2(n+1,n) &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

olur. □

3.3. Faktöriyel Fonksiyonları ve Stirling Sayıları Arasındaki İlişki

- $x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} S_1(n,k)x^k$ ya da $x^{(n)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_1(n,k)x^k$

  Buradaki $S_1(n,k)$ 1.tür Stirling sayılarıdır.

- $x^n = \sum_{k=1}^{n} S_2(n,k)x^{(k)}$ ya da $x^n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_2(n,k)x^{(k)}$

  Buradaki $S_2(n,k)$ 2.tür Stirling sayılarıdır.

Formülde n yerine değerler vererek ilk 5 terimini yazalım. Bu fonksiyonların katsayıları bize 1. ve 2. tür Stirling sayılarını verecektir.(Murray 1961)

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= x \\ x^{(2)} &= x^2 - x \\ x^{(3)} &= x^3 - 3x^2 + 2x \\ x^{(4)} &= x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x \\ x^{(5)} &= x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x \\ x &= x^{(1)} \\ x^2 &= x^{(2)} + x^{(1)} \\ x^3 &= x^{(3)} + 3x^{(2)} + x^{(1)} \\ x^4 &= x^{(4)} + 7x^{(3)} + 6x^{(2)} + x^{(1)} \\ x^5 &= x^{(5)} + 15x^{(4)} + 25x^{(3)} + 10x^{(2)} + x^{(1)} \end{aligned}$$

Örnek 3.3.1. $x^{(5)} = S_1(5,1)x - S_1(5,2)x^2 + S_1(5,3)x^3 - S_1(5,4)x^4 + S_1(5,5)x^5$

Faktöriyel fonksiyon açılımındaki x^5'in katsayıları ile yukarıdaki fonksiyon eşitliğindeki katsayıları karşılaştırırsak;

$$\begin{aligned} S_1(5,1) &= 24, \\ S_1(5,2) &= 50, \\ S_1(5,3) &= 35, \\ S_1(5,4) &= 10, \\ S_1(5,5) &= 1 \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.3.2. *(Mond and Krammer 2004, Murray 1961) $x \in \mathbb{R}$ ve $n \geqslant 2$ tamsayı olmak üzere;*

$$(x)^{\overline{n}} = \sum_{k=1}^{n} S_1(n,k)x^k \tag{3.6.}$$

dır.

İspat. Murray tarafından verilen bu ispatı kısaca verelim.

Tümevarım yönteminden,

n=2 değeri için (3.6.) eşitliği doğrudur.

n-1 tamsayı değeri için (3.6.) eşitliği doğru olsun.

n tamsayı değeri için (3.6.) eşitliğinin sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned} (x)^{\overline{n}} &= (x)^{\overline{n-1}}(x+n-1) \\ &= (x+n-1)\sum_{k=1}^{n-1} S_1(n-1,k)x^k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} S_1(n-1,k)x^{k+1} + \sum_{k=1}^{n-1} S_1(n-1,k)(n-1)x^k \\ &= \sum_{k=1}^{n} S_1(n-1,k-1)x^k + \sum_{k=1}^{n} S_1(n-1,k)(n-1)x^k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \{S_1(n-1,k-1) + (n-1)S_1(n-1,k)\}x^k \\ &= \sum_{k=1}^{n} S_1(n,k)x^k \end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 3.3.3. *(Murray 1961) n ve k pozitif tamsayılar olmak üzere*

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} S_2(n,k)(x)^{\underline{k}} \tag{3.7.}$$

İspat. Bu ispat Murray tarafından verilmiştir. Kısaca aşağıdaki şekilde verilir.

Tümevarım yönteminden,

$n = 1$ değeri için $(3.7.)$ eşitliği sağlanır.

n tamsayı değeri için $(3.7.)$ eşitliği doğru olsun.

$n+1$ tamsayı değeri için $(3.7.)$ eşitliğinin sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned}
x^{n+1} &= x\sum_{k=1}^{n} S_2(n,k)(x)^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=1}^{n}(x)^{\underline{k}} x S_2(n,k) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(x)^{\underline{k}}(x-k+k) S_2(n,k) \\
&= \sum_{k=1}^{n}((x)^{\underline{k}}(x-k)+k(x)^{\underline{k}}) S_2(n,k) \\
&= \sum_{k=1}^{n}((x)^{\underline{k+1}}+k(x)^{\underline{k}}) S_2(n,k) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(x)^{\underline{k+1}} S_2(n,k) + \sum_{k=1}^{n} k(x)^{\underline{k}} S_2(n,k) \\
&= (S_2(n,0)+S_2(n,1))(x)^{\underline{1}} + (S_2(n,1)+2S_2(n,2))(x)^{\underline{2}} \\
&\quad + \cdots + (S_2(n,n)+(n+1)S_2(n,n+1))(x)^{\underline{n+1}} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}(S_2(n,k-1)+kS_2(n,k))(x)^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} S_2(n+1,k)(x)^{\underline{k}}
\end{aligned}$$

Burada n+1 tamsayı değeri için eşitlik sağlanmış olur. □

Önerme 3.3.4. *(Arakawa, Ibukiyama and Kareko 2014)*

(1) $S_1(n,m) = S_2(-m,-n)$

(2) $x^{\underline{n}} = (-1)^n \sum_{m=0}^{n} (-1)^m S_1(n,m) x^m$

(3) $(x\frac{d}{dx})^n = \sum\limits_{m=1}^{n} S_2(n,m)x^m(\frac{d}{dx})^m$, $(n \geqslant 1)$

(4) $m, n \geqslant 0$ ***olmak üzere,*** $\sum\limits_{l\geqslant 0}(-1)^l S_2(n,l)S_1(l,m) = (-1)^m \delta_{m,n}$

(5) $m, n \geqslant 0$ ***olmak üzere,*** $\sum\limits_{l\geqslant 0}(-1)^l S_1(n,l)S_2(l,m) = (-1)^m \delta_{m,n}$

(6) $m, n \geqslant 0$ ***olmak üzere,*** $S_2(n,m) = \frac{(-1)^m}{m!}\sum\limits_{l=0}^{m}(-1)^l\binom{m}{l}l^n$

(7) $\frac{t^m}{(1-t)(1-2t)\ldots(1-mt)} = \sum\limits_{n=m}^{\infty} S_2(n,m)t^n$, $(m \geqslant 1)$

İspat. İspatlar (Arakawa, Ibukiyama and Kareko 2014) tarafından verilmiştir. Kısaca bu ispatları verelim:

(1) Bağıntısının Kanıtı.

1. ve 2. tür Stirling sayılarının önemli başlangıç koşulları aynı olduğundan dolayı rekürans bağıntıları arasında da bir ilişki vardır. (3.3.) rekürans bağıntısında, n yerine $-m$ ve k yerine de $-n$ yazalım:

$$S_2(-m+1,-n) = S_2(-m,-n-1) - nS_2(-m,-n)$$

eşitliğin her 2 tarafına $nS_2(-m,-n)$ eklersek;

$$S_2(-m+1,-n) + nS_2(-m,-n) = S_2(-m,-n-1)$$

(3.1.) rekürans bağıntısı elde edilir.

(3) Bağıntısının Kanıtı.

Tümevarım yöntemini uygulayalım. $n = 1$ için eşitlik sağlanır. Varsayalım ki, eşitlik n için de doğru olsun. O zaman,

$$\begin{aligned}
(x\frac{d}{dx})^{n+1} &= (x\frac{d}{dx})\sum_{m=1}^{n} S_2(n,m)x^m(\frac{d}{dx})^m \\
&= x\sum_{m=1}^{n} S_2(n,m)(mx^{m-1}(\frac{d}{dx})^m + x^m(\frac{d}{dx})^{m+1}) \\
&= \sum_{m=1}^{n} mS_2(n,m)x^m(\frac{d}{dx})^m + \sum_{m=1}^{n} S_2(n,m)x^{m+1}(\frac{d}{dx})^{m+1} \\
&= \sum_{m=1}^{n+1}(mS_2(n,m) + S_2(n,m-1))x^m(\frac{d}{dx})^m \\
&= \sum_{m=1}^{n+1} S_2(n+1,m)x^m(\frac{d}{dx})^m.
\end{aligned}$$

(4) ve (5) Bağıntısının Kanıtı.

Kanıt için Önerme $3.3.4.(2)$'yi ve Teorem $3.3.3.$'ü kullanalım. Verilen bağıntıda n yerine l yazarak, Teorem $3.3.3.$ bağıntısında yerine konulursa;

$$\begin{aligned}
x^{\underline{l}} &= (-1)^l \sum_{m=0}^{l} (-1)^m S_1(l,m) x^m \\
x^n &= \sum_{m=0}^{l} S_1(l,m) x^l, \\
x^n &= \sum_{l=0}^{n} S_2(n,l)(-1)^l \sum_{m=0}^{l} (-1)^m S_1(l,m) x^m \\
&= \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \sum_{l=m}^{n} (-1)^l S_2(n,l) S_1(l,m) x^m
\end{aligned}$$

eşitliğin her 2 tarafında bulunan katsayılar karşılaştırıldığında istenen sonuç elde edilir.

(6) Bağıntısının Kanıtı.

$S_2(n,m)$ için rekürans bağıntısı ile eşitliğin sağ tarafını kanıtlayabiliriz. Eşitliğin sağ tarafını $a_{n,m}$ ile gösterelim. $a_{n,m}$ için başlangıç koşulları şu şekilde tanımlansın:

$a_{0,0} = 1$ ve $a_{n,0} = 0$, $(n \geqslant 1)$ (Burada $0^0 = 1$).

Eğer $n = 0$ ve $m \geqslant 1$ ise o zaman,

$\sum_{l=0}^{m} (-1)^l \binom{m}{l} = (1-1)^m = 0$ dır. Bu nedenle, $a_{n,0} = 0$'dır.

$$\begin{aligned}
& m a_{n,m} + a_{n,m-1} \\
&= \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \binom{m}{l} l^n + \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l \binom{m-1}{l} l^n \\
&= \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \{ \binom{m}{l} - \binom{m-1}{l} \} l^n \\
&= \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \frac{l}{m} \binom{m}{l} l^n \\
&= \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \binom{m}{l} l^{n+1} \\
&= a_{n+1,m}.
\end{aligned}$$

(7) Bağıntısının Kanıtı.

Eşitliğin sağ tarafını f_m ile gösterelim. (3.3.) reküransbağıntısından,

$$\begin{aligned} f_m &= \sum_{n=m}^{\infty} S_2(n,m)t^n \\ &= \sum_{n=m}^{\infty} (S_2(n-1,m-1) + mS_2(n-1,m))t^n \\ &= t \sum_{n=m-1}^{\infty} S_2(n,m-1)t^n + mt \sum_{n=m}^{\infty} S_2(n,m)t^n \\ &= tf_{m-1} + mtf_m \end{aligned}$$

Böylece, $f_m = \frac{t}{1-mt} f_{m-1}$ elde edilir. $S_2(n,1) = 1$, $(n \geqslant 1)$ olduğundan, $f_1 = \frac{t}{1-t}$ için eşitliğin sol tarafına eşit olduğu görülür. □

3.4. 1. Tür Stirling sayılarının cebirsel ifadesi

Nasıl binom katsayıları $(x+y)^n$ polinomunun katsayıları ise, 1.tür Stirling sayılarıda bir polinomun katsayılarıdır.

Teorem 3.4.1. *(Çam 2005) 1.tür Stirling sayısı $S_1(n,k)$, $n > 0$ için*

$P_n(x) = x(x+1)\dots(x+n-1)$ *polinomunda x^k'nın katsayısıdır. Yani,*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} S_1(n,k)x^k$$

dır.

İspat. Bu teoremin ispatı (Çam 2005) tarafından verilmiştir. Bu ispatı kısaca verelim:

$P_n(x)$ polinomunda x^k teriminin katsayıları $a_{n,k}$ olsun. Yani,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}x^k$$

olsun. Bu polinom

$$P_{n-1}(x) = x(x+1)\dots(x+n-2)$$

eşitliği $(x+n-1)$ ile çarparsak;

$$(x+n-1)P_{n-1}(x) = (x+n-1)x(x+1)\dots(x+n-2)$$

aşağıdaki polinom eşitliği bulunur. Bu nedenle,

$$P_n(x) = (x+n-1)P_{n-1}(x)$$

özelliğini sağlar.

$$P_n(x) = (x+n-1)P_{n-1}(x)$$

olduğundan, bu polinomlar tümevarımla kanıta elverişlidirler. Bundan yararlanıp hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= (x+n-1)P_{n-1}(x) = (x+n-1)\sum_{k=0}^{n} a_{n-1,k}\, x^k \\
&= x\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}\, x^k + (n-1)\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}\, x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}\, x^{k+1} + (n-1)\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}\, x^k \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-1,k-1}\, x^k + (n-1)\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}\, x^k \\
&= a_{n-1,0} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{n-1,k-1} + (n-1)a_{n-1,k})x^k + a_{n-1,n-1}\, x^k
\end{aligned}$$

Herhangi iki polinomun eşitliği, her $k \in \mathbb{Z}$ için bu polinomların x^k terimlerinin katsayılarının eşit olması anlamına geldiğine göre, negatif olmayan tam sayı $n > 1$ için;

$$\begin{aligned}
a_{n,0} &= a_{n-1,0} \\
a_{n,n} &= a_{n-1,n-1}
\end{aligned}$$

ve $0 < k < n$ iken

$$a_{n,k} = a_{n-1,k-1} + (n-1)a_{n-1,k}$$

dır.

Bulduğumuz bu son ilişki sayesinde $a_{1,0}$ ve $a_{1,1}$ katsayılarından hareketle tüm $a_{n,k}$ katsayılarını bulabiliriz.

$a_{1,0} = 0$ ve $a_{1,1} = 1$

eşitlikleri de kolaylıkla bulunabilir.

Görüldüğü üzere $a_{n,k}$ ve $S_1(n,k)$ sayıları birbirleriyle aynı tümevarımsal bağlantıyı sağlıyorlar. Dolayısıyla başlangıç koşulları aynıysa $a_{n,k}$ ve $S_1(n,k)$ eşit olurlar.

Nitekim öyle de bulunur:

$S_1(1,0) = 0 = a_{1,0}$ ve $S_1(1,1) = 1 = a_{1,1}$

Demek ki

$$S_1(n,k) \ = a_{n,k}$$

olmalı. $\square$

3.5. Kuvvet Toplamları Yardımıyla Bernoulli Sayıları ve 2. Tür Stirling Sayıları Arasındaki Bağıntılar

Aşağıdaki eşitliği inceleyelim (Boyadzhiev 2012).

$$1^m + 2^m + \cdots + (n-1)^m = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k n^{m+1-k}$$

$\forall m \geqslant 0, n \geqslant 1$ için ünlü Bernoulli formülüdür. Bu toplam 2. tür Stirling sayıları tarafından da direk hesaplanabiliyor.

$$n^m = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}S_2(m,k)k!$$

binom dönüşümünün bir özelliğidir. Verilen $\{a_k\}$ dizisi, bunun binom dönüşümü $\{b_k\}$ dizisi ise şu şekilde tanımlanır:

$$b_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k$$

Ters formülü:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}b_k$$

olur. Daha önce yazdığımız $n^m = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}S_2(m,k)k!$ formülünden;

$$\begin{aligned} 1^m + 2^m + \cdots + n^m &= \sum_{p=1}^{n}\{\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}S_2(m,k)k!\} \\ &= \sum_{k=0}^{n}S_2(m,k)k!\{\sum_{p=k}^{n}\binom{p}{k}\} \end{aligned}$$

Toplam sırasını değiştirdik. Şimdi bilinen bir özellik $\sum\limits_{p=k}^{n}\binom{p}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ kullanalım.

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{n}S_2(m,k)k!\binom{n+1}{k+1} \\ 1^m + 2^m + \cdots + n^m &= \sum_{k=0}^{n}S_2(m,k)k!\binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

olduğunu elde ederiz.

3.6. Delta Operatörü ve 2. Tür Stirling Sayıları Arasındaki İlişki

Bu bölümde önce Δ operatörünün kısaca özelliklerini vereceğiz.(Murray 1961)

$$\begin{aligned}
\Delta f(z) &= f(z+1) - f(z)\\
\Delta^2 f(z) &= \Delta(\Delta f(z)) = f(z+2) - f(z+1) - f(z+1) + f(z)\\
&= f(z+2) - 2f(z+1) + f(z)\\
\Delta^3 f(z) &= \Delta(\Delta^2 f(z)) = f(z+3) - 2f(z+2) + f(z+1) - f(z+2) + 2f(z+1) - f(z)\\
&= f(z+3) - 3f(z+2) + 3f(z+1) - f(z)\\
&= \sum_{n=0}^{3}(-1)^n\binom{3}{n} f(z+3-n)\\
\Delta^n f(z) &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j} f(z+n-j)
\end{aligned}$$

$\Delta^m f(z)$ kullanılarak aşağıdaki sonuca ulaşılır. Bu da Δ operatörü ile Stirling sayıları arasındaki ilişki Murray tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir:

Teorem 3.6.1. *(Murray 1961)* $f(x,k,n) = \frac{\Delta^k x^n}{k!}$
olmak üzere;

(1) $k > n$ *ise* $f(0,k,n) = 0$*'dır.*

(2) $f(0,k,n) = S_2(n,k)$*'dır.*

Örnek 3.6.2. (1) özelliğine bir örnek:

$$\begin{aligned}
\Delta^3 z^2 &= \Delta^2(\Delta z^2) = \Delta^2[(z+1)^2 - z^2]\\
&= \Delta^2(z^2 + 2z + 1 - z^2) = \Delta^2(2z+1) = \Delta(\Delta(2z+1))\\
&= \Delta(2z + 3 - 2z - 1) = \Delta(2) = 2 - 2 = 0
\end{aligned}$$

(2) özelliğine bir örnek:

$$\begin{aligned}
\Delta^2 z^3 &= \Delta((z+1)^3 - z^3) = \Delta(z^3 + 3z^2 + 3z + 1 - z^3)\\
&= \Delta(3z^2 + 3z + 1)\\
&= 3(z+1)^2 + 3(z+1) + 1 - 3z^2 - 3z - 1\\
&= 3z^2 + 6z + 3 + 3z + 3 + 1 - 3z^2 - 3z - 1 = 6z + 6\\
&= 6
\end{aligned}$$

3.7. Grünert Polinomları

$x\frac{d}{dx}$ operatörünün e^x fonksiyonunun seri açılımına tekrarlanarak uygulanması ile Grünert polinomları 2.tür Stirling sayıları olan $S_2(m,n)$'ye dönüşür. Bu bir polinom dizisi üretir:

$$\begin{aligned}
x\frac{d}{dx}e^x &= xe^x \\
(x\frac{d}{dx})^2 e^x &= (x\frac{d}{dx})(x\frac{d}{dx}e^x) \\
&= x(e^x + xe^x) = (x^2 + x)e^x \\
(x\frac{d}{dx})^3 e^x &= (x\frac{d}{dx})(x\frac{d}{dx})^2 e^x \\
&= x\frac{d}{dx}((x^2 + x)e^x) = x(2x+1)e^x + x(x^2+x)e^x \\
&= (2x^2 + x + x^3 + x^2)e^x = (x^3 + 3x^2 + x)e^x \\
&\vdots \\
(x\frac{d}{dx})^m e^x &= (B_0^m + B_1^m x + B_2^m x^2 + \cdots + B_m^m x^m)e^x
\end{aligned} \tag{3.8.}$$

Buradaki B_k^m katsayıları 2.tür Stirling sayılarıdır (Boyadzhiev 2012).

Teorem 3.7.1. *(Grünert Teoremi)(Boyadzhiev 2012)*

B_n^m katsayıları yukarıdaki $(3.8.)$ bağıntısı tarafından tanımlandı. O zaman,

$$B_n^m = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^m$$

dir.

Uyarı 3.7.2. $B_n^m = S_2(m,n)$*'dir.*

İspat. İspat Boyadzhiev tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ seri açılımından,

$$(x\frac{d}{dx})^m e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k k^m}{k!}, m = 0, 1, \ldots$$

olduğunu elde ederiz.

$$\begin{aligned}
(x\frac{d^m}{dx^m})e^x &= x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{n(n-1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^n}{n!}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
B_0^m + B_1^m x + B_2^m x^2 + \cdots + B_m^m x^m &= e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^m x^k}{k!} \\
&= \{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j x^j}{j!}\}.\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^m x^j}{k!}\}.
\end{aligned}
$$

Sağ taraftaki 2 kuvvet serisinin Cauchy çarpımından,

$$
B_0^m + B_1^m x + B_2^m x^2 + \cdots + B_m^m x^m = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \{\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}k^m\}
$$

Katsayılarını karşılaştırırsak teorem kanıtlanmış olur. □

3.7.1. Grünert polinomları ve $(\frac{d}{dx})^m$ yardımıyla $S_2(m,n)$ üreteç fonksiyonu bulma

$n \geqslant 0$ herhangi bir n tamsayısı için, $f(x) = (e^x - 1)^n$ fonksiyonunun MacLaurin serisi,

$$
f(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^m(0)}{m!}x^m
$$

dir. Bu amaçla ilk olarak şöyle yazalım:

$$
(e^x - 1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}e^{kx}
$$

ve o zaman $f^m(0)$ şuna dönüşür:

$$
(\frac{d}{dx})^m (e^x - 1)^n \mid_{x=0} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}k^m = n! S_2(m,n)
$$

Bu nedenle,

$$
\frac{1}{n!}(e^x - 1)^n = \sum_{m=0}^{\infty} S_2(m,n)\frac{x^m}{m!}
$$

2.tür Stirling sayıları için exponensiyel üreteç fonksiyonu bulunur. Aslında bu toplam sadece $m \geqslant n$ durumunda yazılabilir. Çünkü $m < n$ olduğunda $S_2(m,n) = 0$'dır (Boyadzhiev 2012).

3.8. Merkezi Faktöriyel Sayıları

3.8.1. T(n,k) Merkezi faktöriyel sayılarının özellikleri

Bu bölümde analitik fonksiyonlar üzerinde $T(n,k)$ merkezi faktöriyel sayılarının üreteç fonksiyonlarını çalışacağız. Bu fonksiyonları kullanarak, bazı fonksiyon eşitlikleri elde edeceğiz. Bu fonksiyonları ve eşitlikleri kullanarak üreteç fonksiyonu aşağıda tanımlanmış olan $T(n,k)$ merkezi faktöriyel sayılarının bazı özelliklerini ve bağıntılarını vereceğiz.

Srivastava ve Liu merkezi faktöriyel sayılarının birçok özelliğini ve uygulamasını vermiştir (Srivastava and Liu 2009).

Srivastava ve Liu 'nun bu çalışmasında, şu bağıntı yer alır: (Srivastava and Liu 2009)

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} T(n,k)x(x-1)(x-2^2)(x-3^2)\dots(x-(k-1)^2). \tag{3.9.}$$

(2.10.) ile (3.9.)'u birlikte kullanırsak,

$T(n,k) = T(n-1,k-1) + k^2T(n-1,k)$

elde ederiz. Burada $n \geqslant 1, k \geqslant 1, (n,k) \neq (1,1)$. $n,k \in \mathbb{N}$ için

$T(0,k) = T(n,0) = 0$ ve $T(n,1) = 1$

dir (Srivastava and Liu 2009).

(Cigler 2015) 'de Cigler $T(n,k)$ sayıları için şu bağıntıyı vermiştir:

$$T(n,k) = \frac{1}{(2k)!}\sum_{j=0}^{2k}(-1)^j\binom{2k}{j}(j-k)^{2n}.$$

(Şimşek 2014)'de $F_T(t,k)$ fonksiyonu incelenmiş ve aşağıdaki özellikleri verilmiştir:

$F_T(0,k) = 1$

dir. Bu özellikten $T(0,0) = 1$ olur. $F_T(t,k)$ özel sayıların üreteç fonksiyonları ve hiperbolik fonksiyonlar ile bağlantılıdır. Bu nedenle şu fonksiyonel eşitlik elde edilir:

$$F_T(t,k) = \frac{2^k}{(2k)!}(\cosh(t)-1)^k$$

$F_T(t,k)$ fonksiyonu $S_2(n,k)$ ikinci tür Stirling sayılarının üreteç fonksiyonu ile de bağlantılıdır:

$$F_T(t,k) = F_S(t,2k)e^{-kt},$$

burada,

$$F_S(t,2k) = \frac{1}{(2k)!}(e^t-1)^{2k} = \sum_{n=0}^{\infty} S_2(n,2k)\frac{t^n}{n!}.$$

ve

$$F_T(t,k) = \frac{k!}{(2k)!}\sum_{j=0}^{k} F_S(t,j)F_S(-t,k-j).$$

(2.10.)'un t ye göre türevini alırsak, merkezi faktöriyel sayılarının özelliklerini ve rekürans bağıntısını bulabiliriz.

$$\frac{d}{dt}F_T(t,k) = \frac{k(2k-2)!}{(2k)!}(e^t - e^{-t})F_T(t,k-1)$$

ya da

$$\frac{d}{dt}F_T(t,k) = \frac{2k(2k-2)!}{(2k)!}F_T(t,k-1)\sinh(t).$$

Teorem 3.8.1. *(Şimşek 2014)*

$$S_2(n,2k) = n!\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{k^{n-2j}}{(2j)!(n-2j)!}T(j,k) \tag{3.10.}$$

dır.

3.8.2. Merkezi faktöriyel sayıları ve 1. tür stirling sayıları arasındaki ilişki

Teorem 3.8.2. *(Butzer, Markett and Schmidt 1991) $n,k \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere;*

$$\begin{aligned} S_1(n,k) &= (-1)^{n+k}\sum_{j=k}^{n}\binom{j-1}{k-1}(\frac{n}{2})^{j-k}t(n,j) \\ t(n,k) &= (-1)^{n+k}\sum_{j=k}^{n}\binom{j-1}{k-1}(\frac{n}{2})^{j-k}S_1(n,j) \end{aligned}$$

dir.

3.9. Bernoulli Polinomları ve Bernoulli Sayıları

Bernoulli Sayıları ve Polinomları aşağıdaki bazı özellikleri sağlarlar: (Murray 1961)

(1) $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$

(2) $B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$

(3) $B_n = B_n(0) = B_n(1)$, $B_{2n-1} = 0$, $n = 2,3,4,\ldots$

(4) $1 + \binom{n}{1}B_1 + \binom{n}{2}B_2 + \cdots + \binom{n}{n-1}B_{n-1} = 0$

(5) $B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$

(6) $\frac{te^{xt}}{e^t-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)t^n}{n!} = 1 + B_1(x)t + \frac{B_2(x)t^2}{2!} + \dots$

(7) $\frac{t}{e^t-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{B_n t^n}{n!} = 1 + B_1 t + \frac{B_2 t^2}{2!} + \dots$

(8) $\frac{x}{2} \coth \frac{x}{2} = 1 + \frac{B_2 x^2}{2!} + \frac{B_4 x^4}{4!} + \frac{B_6 x^6}{6!} + \dots$

(9) $1^r + 2^r + 3^r + \dots + (n-1)^r = \frac{(n+B)^{r+1} - B^{r+1}}{r+1}$, $r = 1, 2, 3, \dots$

(10) $\frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \dots = \frac{(-1)^{n-1} B_{2n} (2\pi)^{2n}}{2(2n)!}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

(11) $B_n(x) = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} B_1 + \binom{n}{2} x^{n-2} B_2 + \dots + \binom{n}{n} B_n$

(12) $n = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} B_{2n-1}(x) &= 2(-1)^n (2n-1)! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\pi x}{(2k\pi)^{2n-1}}, \\ B_{2n}(x) &= 2(-1)^{n-1} (2n)! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi x}{(2k\pi)^{2n}}. \end{aligned}$$

Teorem 3.9.1. *(Abramowitz and Stegun 1972) $B_n(x)$ Bernoulli polinomları için rekürans bağıntısı,*

$$\frac{dB_n}{dx} = nB_{n-1}(x)$$

ya da

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$$

dir.

Önerme 3.9.2. *(Arakawa, Ibukiyama and Kareko 2014) $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n > 1$ için,*

$$B_{2n+1} = 0$$

dır.

Önerme 3.9.3. *(Arakawa, Ibukiyama and Kareko 2014)*

$$(2n+1)B_{2n} = -\sum_{m=1}^{n-1} \binom{2n}{2m} B_{2m} B_{2(n-m)}, \ (n \geqslant 2).$$

Sonuç 3.9.4. *(Arakawa, Ibukiyama and Kareko 2014) $n \geqslant 1$ için,*

$$(-1)^{n-1} B_{2n} > 0$$

dır.

Önerme 3.9.5. *(Arakawa, Ibukiyama and Kareko 2014)*

$$\begin{aligned}\tan x &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2^{2n}-1)2^{2n}B_{2n}\frac{x^{2n-1}}{2n!}, \ (|\ x\ |< \frac{\pi}{2})\\ \cot x &= \frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2^{2n}B_{2n}\frac{x^{2n-1}}{2n!}, \ (0<|\ x\ |<\pi)\end{aligned}$$

dir.

Teorem 3.9.6. *(Murray 1961)*

$$B_m(x)=\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n}{n+1}\Delta^n x^m$$

dir.

İspat. (Murray 1961)

$$B_m(x)=\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x+k)^m \tag{3.11.}$$

dır.

$$\Delta^n x^m=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}(x+k)^m \tag{3.12.}$$

özellikleri bilindiğine göre $(3.12.)$ bağıntısı $(3.11.)$ bağıntısında yerine yazılırsa istenen elde edilir. □

3.9.1. Bernoulli sayıları için üreteç fonksiyonu elde edilmesi

Bu method (Arakawa, Ibukiyama and Kareko 2014) tarafından verilmiştir.

$(2.3.)$ ispatı için $(3.13.)$ bağıntısını göstermek yeterlidir:

$$(\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!})(e^t-1)=te^t. \tag{3.13.}$$

Yukarıdaki bağıntıdan;

$$\begin{aligned}(\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!})(e^t-1) &= (\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}t^n)(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!})\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{B_i}{i!}\frac{1}{(n-i)!})t^n\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}B_i)\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

elde edilir.

$n \geqslant 1$ için, $(2.4.)$ rekürans bağıntısından aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}B_i)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{(n-1)!}=te^t$$

Bu da istenen sonucu vermiş olur.

3.9.2. Bernoulli sayıları ile Bernoulli polinomları arasındaki ilişki

Üreteç Fonksiyonu $(2.2.)$ bağıntısı düzenlenirse,

$$\begin{aligned}\frac{t}{e^t-1}e^{tx} &= (\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!})(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\frac{t^n}{n!})\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}B_k\frac{t^k}{k!}\frac{t^{n-k}}{(n-k)!}x^{n-k})\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}B_k\frac{x^{n-k}}{k!(n-k)!})t^n$$

dir. t^n lerin katsayıları karşılaştırılırsa $(2.5.)$ bağıntısı elde edilir. (Conway 1986)

3.9.3. Bernoulli sayıları ile Stirling sayıları arasındaki ilişki

Bernoulli sayıları ve 2. tür Stirling sayıları arasındaki ilişki

Teorem 3.9.7. *(Arakawa, Ibukiyama and Kareko 2014, Boyadzhiev 2012)*

$$B_n(x)=(-1)^n\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m m! S_2(n,m)}{m+1},\ (n\geqslant 0) \tag{3.14.}$$

dır.

İspat. Bu method Arakawa tarafından verilmiştir.

$(2.2.)$ bağıntısını,

$$\frac{te^t}{e^t-1}=\frac{t}{1-e^{-t}}=\frac{-\log(1-(1-e^{-t}))}{1-e^{-t}},$$

şeklinde düzenlersek ve $(1-e^{-t}=t+\dots)$ olduğundan bu ifade yerine t yazarsak,

$\ln(1+x)=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n},\ -1<x\leq 1$ olmak üzere;

$$-log(1-t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{t^m}{m!}$$

olur.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} &= \frac{-\log(1-(1-e^{-t}))}{1-e^{-t}} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1-e^{-t})^{m-1}}{m} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m(e^{-t}-1)^m}{m+1} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m m!}{m+1} \sum_{n=m}^{\infty} S_2(n,m)\frac{(-t)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m m! S_2(n,m)}{m+1})\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

Eşitliğin her iki tarafında katsayılar karşılaştırıldığında istenilen sonuç elde edilir. □

Teorem 3.9.8. *(Murray 1961) $n, k \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere;*

$$B_n(x) = \frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{n} S_2(n,k)\frac{x^{k+1}}{k+1}$$

dir.

Teorem 3.9.9. *(Weisstein 1998) Bernoulli polinomları ve 2. tür Stirling sayıları arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde verilir:*

$$B_n(x) = B_n(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} S_2(n-1,k-1)(x)^{\underline{n}}.$$

Önerme 3.9.10. *(Arakawa, Ibukiyama and Kareko 2014)*

$$a_{n,m} = (m+1)(a_{n-1,m} - a_{n-1,m+1}),\ (n \geqslant 1, m \geqslant 0)$$

koşulunu sağlayan $a_{n,m}$ dizisi tanımlı olsun. O zaman,

$$a_{n,0} = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m m! S_2(n+1,m+1)a_{0,m}$$

dır.

İspat. Bu method Arakawa tarafından verilmiştir.

$$g_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}t^m$$

üreteç fonksiyonunu kullanalım. $n \geqslant 1$ için $a_{n,m}$ dizisinin rekürans bağıntısından,

$$\begin{aligned}
g_n(t) &= \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)(a_{n-1,m} - a_{n-1,m+1})t^m \\
&= \frac{d}{dt}(\sum_{m=0}^{\infty} a_{n-1,m}t^{m+1}) - \frac{d}{dt}(\sum_{m=0}^{\infty} a_{n-1,m+1}t^{m+1}) \\
&= \frac{d}{dt}(tg_{n-1}(t)) - \frac{d}{dt}(g_{n-1}(t) - a_{n-1,0}) \\
&= g_{n-1}(t) + (t-1)\frac{d}{dt}(g_{n-1}(t)) \\
&= \frac{d}{dt}((t-1)g_{n-1}(t)).
\end{aligned}$$

Burada, $(t-1)g_n(t) = h_n(t)$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}
h_n(t) &= (t-1)\frac{d}{dt}(h_{n-1}(t)), (n \geqslant 1) \\
h_n(t) &= ((t-1)\frac{d}{dt})^n(h_0(t))
\end{aligned}$$

elde edilir. Önerme $3.3.4.(3)$'de x yerine $t-1$ yazılırsa,

$$h_n(t) = \sum_{m=0}^{n} S_2(n,m)(t-1)^m(\frac{d}{dt})^m h_0(t)$$

$t = 0$ durumunda,

$$\begin{aligned}
-a_{n,0} &= \sum_{m=0}^{n} S_2(n,m)(-1)^m m!(a_{0,m-1} - a_{0,m}) \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} S_2(n,m+1)(-1)^{m+1}(m+1)!a_{0,m} - \sum_{m=0}^{n} S_2(n,m)(-1)^m m!a_{0,m} \\
&= -\sum_{m=0}^{n}(-1)^m m!a_{0,m}((m+1)S_2(n,m+1) + S_2(n,m)) \\
&= -\sum_{m=0}^{n}(-1)^m m!S_2(n+1,m+1)a_{0,m}
\end{aligned}$$

bulunur. □

Bernoulli sayıları ve 1. tür Stirling sayıları arasındaki ilişki

(Roman 1992), 1. tür Stirling sayıları ile 2. tür Bernoulli polinomları arasında bir bağıntı vermiştir. Bu bağıntı aşağıdaki teoremde verilmiştir:

Teorem 3.9.11. *(Roman 1992) 2. tür Bernoulli sayıları ve 1. tür Stirling sayıları arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde verilir:*

$$b_n(x) = b_n(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} S_1(n-1, k-1) x^k. \tag{3.15.}$$

(3.15.) *bağıntısından aşağıdaki 2. tür Bernoulli polinomlarını elde edebiliriz:*

$$\begin{aligned} b_0(x) &= 1, \\ b_1(x) &= \frac{1}{2}(2x+1), \\ b_2(x) &= \frac{1}{6}(6x^2-1), \\ b_3(x) &= \frac{1}{4}(4x^3-6x^2+1), \\ b_4(x) &= \frac{1}{30}(30x^4-120x^3+120x^2-19), \\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

Teorem 3.9.12. *(Weisstein 1998)*

$$(x)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n+1}{k+1} S_1(n,k)(B_{k+1}(x) - B_{k+1})$$

dir.

3.9.4. Bernoulli sayıları, Genocchi sayıları ve Euler sayıları arasındaki ilişki

Literatürde Bernoulli sayıları, Euler sayıları, Genocchi sayıları ve Stirling sayıları arasında iyi bilinen birçok formül, bağıntı verilmiştir. Bunlardan birini aşağıdaki şekilde farklı bir yolla ifade edebiliriz. Yani,

(2.2.) bağıntısında t yerine $2t$, (2.3.) bağıntısında ise t yerine $2t$ ve $x = \frac{1}{2}$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{2te^t}{e^{2t}-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n B_n(\frac{1}{2}) \frac{t^n}{n!} \\ \frac{2te^t}{(e^t-1)(e^t+1)} &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n B_n(\frac{1}{2}) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{t^n}{n!} \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} B_n(1) \frac{t^n}{n!} \\ \sum_{n=0}^{\infty} 2^n B_n(\frac{1}{2}) \frac{t^{n+1}}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} G_k B_{n-k}(1)) \frac{t^n}{n!}, \ (t \neq 0) \\ \sum_{n=0}^{\infty} n B_{n-1}(\frac{1}{2}) 2^{n-1} \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} G_k B_{n-k}(1)) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $B_n(1) = B_n$ olduğundan,

$$2^{n-1} n B_{n-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} G_k B_{n-k} \quad (3.16.)$$

bulunur. Çok iyi bilinen

$$G_k = kE_{k-1}$$

bağıntısını $(3.16.)$ da yerine koyarsak,

$$\begin{aligned} B_{n-1}\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{2^{1-n}}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k E_{k-1} B_{n-k} \\ &= 2^{1-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} E_{k-1} B_{n-k} \\ &= 2^{1-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} \frac{k}{n} E_{k-1} B_{n-k} \end{aligned}$$

Buradan aşağıdaki özdeşlik bulunmuş olur.

$$B_{n-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{1-n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} E_{k-1} B_{n-k} \quad (3.17.)$$

dir (Kim 2012).

3.10. Euler Polinomları ve Euler Sayılarının Özellikleri

Euler Sayıları ve Polinomları aşağıdaki bazı özellikleri sağlarlar:(Murray 1961)

(1) $E_n'(x) = E_{n-1}(x)$

(2) $E_n(x) = (-1)^n E_n(1-x)$

(3) $E_n(0) + E_n(1) = 0,\ n = 1, 2, 3, \ldots$

(4) $E_n(0) + E_n(-1) = \frac{2(-1)^n}{n!},\ n = 1, 2, 3, \ldots$

(5) $\tan x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{T_k x^k}{k!} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \ldots$ Burada $T_k =\mid 2^k k! e^k \mid$'dır. Bu sayılar tanjant sayıları olarak adlandırılırlar.

(6) $E_{2n} = 2^{2n}(2n)! E_{2n}(\frac{1}{2}) = 0,\ n = 1, 2, 3, \ldots$

(7) $E_{2n}(0) = E_{2n}(1) = e_{2n} = 0,\ n = 1, 2, 3, \ldots$

(8) $\frac{2e^{xt}}{e^t+1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} E_k(x) t^k = 1 + E_1(x) + E_2(x)t^2 + \ldots$

(9) $\frac{1}{1^{2n+1}} - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \ldots = \frac{(-1)^n E_{2n} \pi^{2n+1}}{2^{2n+2}(2n)!},\ n = 1, 2, 3, \ldots$

(10) $\sec x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{|E_{2k}| x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \ldots$

(11) $E_n(x) = \frac{e_0 x^n}{n!} + \frac{e_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + e_{n-1}x + e_n$ koşulunu sağlar. Burada $e_n + \frac{1}{2}[\frac{e_0}{n!} + \frac{e_1}{(n-1)!} + \frac{e_2}{(n-2)!} + \cdots + \frac{e_{n-1}}{1!}] = 0$'dır. Birkaç e_k değeri ise $e_0 = 1$, $e_1 = \frac{-1}{2}$, $e_2 = 0$, $e_3 = \frac{1}{24}$, $e_4 = 0$, $e_5 = \frac{-1}{240}$ şeklindedir.

(12) $\tan x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{T_k x^k}{k!} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \ldots$ Burada $T_k = \mid 2^k k! e^k \mid$'dır. Bu sayılar tanjant sayıları olarak adlandırılırlar.

(13) $n = 1, 2, 3, \ldots$ ve $0 \leqq x \leqq 1$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} E_{2n-1}(x) &= \frac{4(-1)^n}{\pi^{2n}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^{2n}} \\ E_{2n}(x) &= \frac{4(-1)^n}{\pi^{2n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\pi x}{(2k+1)^{2n+1}} \end{aligned}$$

Bu polinomlar birçok matematikçi tarafından matematiğin değişik alanlarında çalışılmıştır (Euler 1738, Abramowitz ve Stegun 1972, Carlitz 1959, Comtet 1974, Srivastava 2011, Shiratani 1975, Şimşek 2004, 2005, 2006, 2010, 2011, Srivastava, Kim ve Şimşek 2005, Özden ve Şimşek 2008, Agoh ve Dilcher 2009, Özden vd 2010).

Bernoulli polinomları ve Euler polinomlarını farklı şekilde ifade etmek mümkündür. (Chang and Ha 2001) Bu polinomlar daha açık bir şekilde aşağıdaki gibi verilebilir: (Gould 2010)

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (x+j)^n$$

ve

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (x+j)^n$$

dir.

Uyarı 3.10.1. *Özel olarak $x = 0$ için $B_n(0) = B_n$ ve $E_n(0) = E_n$'dir.*

Bernoulli polinomları ve Euler polinomlarının en önemli özelliklerinden birisi de Raabe bağıntısıdır. Bu bağıntılar aşağıdaki gibi verilir (Raabe 1851, Carlitz 1953, Abramowitz ve Stegun 1972, Walum 1991):

$$B_n(x) = m^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} B_n\left(\frac{x+k}{m}\right), (\forall m \geqslant 1, \forall n \in \mathbb{N}).$$

$$\begin{aligned} E_n(x) &= m^n \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k E_n\left(\frac{x+k}{m}\right), \\ (\forall m(\text{tek sayı}) &\geqslant 1, \forall n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_n(x) &= -\frac{2}{n+1} m^n \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k B_{n+1}\left(\frac{x+k}{m}\right), \\ (\forall m(\text{çift sayı}) &\geqslant 1, \forall n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

3.10.1. Euler polinomları ve 2. tür Stirling sayıları arasındaki ilişki

Teorem 3.10.2. *(Roman 1992)*

$$E_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} \binom{-1}{j} \frac{1}{2^j} (k)_{\underline{j}} S_2(n,k) x^{k-j}$$

dir.

3.11. Genocchi Polinomları ve Genocchi Sayıları

Genocchi polinomları ve sayıları Analitik sayılar teorisinde kullanılan önemli polinomlardandır. Genocchi polinomları ve sayıları üzerinde q-analiz ve p-adik analizin özellikleri uygulanmış ve geniş bir çalışma alanı oluşturduğu bir çok matematikçi tarafından görülmüştür.Bu bölümde Genocchi polinomları ve sayıları tanımlanacak ve Genocchi polinomları ve sayılarının önemli özellikleri üzerinde durulacaktır. Genocchi polinomları ve sayılarının Analitik sayılar teorisindeki bazı önemli teoremleri ve ispatlarına da bu bölümde yer verilecektir.

Teorem 3.11.1. *(Kim 2007)* $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$ *olmak üzere;*

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{G_{k+1}}{k+1} x^{n-k} \tag{3.18.}$$

dır.

Teorem 3.11.2. *(Kim 2007)*

$$G_{n+1} = (n+1)E_n$$

dir.

İspat. (Kim 2007) (3.16.) bağıntısında $x = 1$ alınırsa,

$$E_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{G_{k+1}}{k+1} 1^{n-k}$$

$n = k$ durumunda ise

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{G_{n+1}}{n+1} \\ G_{n+1} &= (n+1)E_n \end{aligned}$$

elde edilir. □

4. BULGULAR

Teorem 3.4.1.'in çok önemli sonuçları vardır. Şimdi teoremde verilen bilgiler doğrultusunda x yerine değerler vererek birkaç toplam formülünü vereceğiz:

- $x=-2$ için;

$$P_n(-2)=\sum_{k=0}^{n} S_1(n,k)(-2)^k=0$$

- $x=1-n$ için;

$$P_n(1-n)=0$$

olduğundan aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.0.3.

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}S_1(n,k)=0$$

dır.

- $x=n+1$ için;

$$P_n(n+1)=\sum_{k=0}^{n} S_1(n,k)(n+1)^k$$

$$(n+1).(n+2)\dots(n+1+n-1)=\frac{1}{n}(n)^{\overline{n}}$$

olduğundan;

$$\prod_{j=0}^{n-1}(n+j+1)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}S_1(n,k)$$

elde edilir. Buradan aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 4.0.4.

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}S_1(n,k)=\frac{1}{n}(n)^{\overline{n}}$$

dir.

- $x = 2$ için;

$$\begin{aligned} P_n(2) &= 2.(2+1).(2+2)\ldots(2+n-1) = \sum_{k=0}^{n} S_1(n,k)(2)^k \\ &= 2.3.4\ldots(n+1) = \sum_{k=0}^{n} S_1(n,k)(2)^k \\ \Longrightarrow & \sum_{k=0}^{n} S_1(n,k)(2)^k = (n+1)! \end{aligned}$$

bulunur.

- $x = 3$ için;

$$P_n(3) = 3.(3+1).(3+2)\ldots(3+n-1) = \frac{(n+2)!}{2!}$$

dir.

- $x = 4$ için;

$$P_n(4) = 4.(4+1).(4+2)\ldots(4+n-1) = \frac{(n+3)!}{3!}$$

dir.

- $x = m$ için;

$$\begin{aligned} P_n(m) &= m.(m+1).(m+2)\ldots(m+n-1) = \sum_{k=0}^{n} S_1(n,k)m^k \\ &= \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!} \end{aligned}$$

dir.

Şimdi faktöriyel fonksiyonunun bazı özelliklerini verelim:

$x^{(k)} = x.(x-h).(x-2h)\ldots(x-h\,(m-1)),$

$h = 1$ için;

$x^{(k)} = x.(x-1).(x-2)\ldots(x-(m-1)),$

$m^{(m)} = m(m-1)\ldots(m-m+1) = m!,$

$q_m(x) = x.(x-1)\ldots(x-m+1) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k S_1(n,k)x^k,$

$$\begin{aligned} q_m(1) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k S_1(n,k) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$q_n(n) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k S_1(n,k) n^k = n!$$

bulunur.

Teorem 4.0.5. *(Arakawa, Ibukiyama and Kareko 2014, Murray 1961)*

$$\begin{aligned} S_2(n,k) &= \frac{1}{k!}\Delta^k x^n \mid_{x=0} = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j} j^n \\ &= \frac{1}{k!}\Delta^k 0^n \end{aligned} \tag{4.1.}$$

İspat. (Murray 1961) Teorem 3.6.1.(2)'den

$$\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}e^{tj} = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=k}^{\infty} S_2(n,k)\frac{t^n}{n!}$$

yazılır. Buradan $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları eşitlenirse ispat biter. □

Teorem 4.0.6. *(Boyadzhiev 2012)*

$$\begin{aligned} B_n^m &= S_2(m,n) \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}k^m \end{aligned}$$

olur. Ayrıca, $S_2(m,n) = 0$, $m < n$ olduğunda ve $S_2(n,n) = 1$'dir. Bu polinom,

$\varphi_n(x) = S_2(n,0) + S_2(n,1)x + \cdots + S_2(n,n)x^n$, $n = 0,1,2,\ldots$ exponansiyel polinom olarak adlandırılır. Bu polinomlar şu eşitlik ile tanımlanır:

$\varphi_n(x) = e^{-x}(x\frac{d}{dx})^n e^x$ ya da üreteç fonksiyonu $e^{x(e^t-1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)}{n!}t^n$

İlk 5 tanesini bulalım:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= 1 \\ \varphi_1(x) &= x \\ \varphi_2(x) &= x^2 + x \\ \varphi_3(x) &= x^3 + 3x^2 + x \\ \varphi_4(x) &= x^4 + 6x^3 + 7x^2 + x \end{aligned}$$

a herhangi bir sabit olduğunda şu şekilde yazılabilir:

$$(x\frac{d}{dx})^n e^{ax} = \varphi_n(ax)e^{ax}$$

olur.

Lemma 4.0.7. *(Chang and Ha 2001)* $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ *için;*

$$H_n(\alpha \mid x) = \sum_{k=0}^{n} k! S_k^n(x) \frac{1}{(\alpha-1)^k} \tag{4.2.}$$

olur.

İspat. (Chang and Ha 2001) Frobenious-Euler sayılarının üreteç fonksiyonu:

$\frac{1-\alpha}{e^t-\alpha}e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(\alpha \mid x)\frac{t^n}{n!}$'dır.

$$S_k^n(x) = \tfrac{1}{k!}\Delta^k x^n \equiv \tfrac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\tbinom{k}{j}(x+j)^n$$

özelliğinden,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} S_k^n(x)\frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\sum_{n=0}^{\infty}(x+j)^n\frac{t^n}{n!} \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}e^{(x+j)t} \\
&= \frac{1}{k!}(e^t-1)^k e^{xt}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece;

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} H_n(\alpha \quad | \quad x)\frac{t^n}{n!} &= \frac{\alpha-1}{\alpha-e^t}e^{xt} \\
&= (1-\frac{e^t-1}{\alpha-1})^{-1}e^{xt}, (\mid \frac{e^t-1}{\alpha-1} \mid < 1 \text{ olduğunu varsayalım.}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{e^t-1}{\alpha-1})^k e^{xt} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{(\alpha-1)^k}S_k^n(x)\frac{t^n}{n!}, n > k \text{ ise } S_k^n(x) = 0\text{'dır.} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k}\frac{k!}{(\alpha-1)^k}S_k^n(x)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

bulunur. □

Teorem 4.0.8.

$$H_n(\alpha \mid x) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{k+m-1}{m} \alpha^m \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} (x+j)^n$$

dir.

İspat. Lemma (Chang and Ha 2001)'dan ve

$$\frac{1}{(1-\alpha)^k} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{k+m-1}{m} \alpha^m, \ \mid \alpha \mid < 1$$

bağıntısında $k = 1$ için

$$\frac{1}{1-\alpha} = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^m$$

geometrik seridir. $\mid \alpha \mid < 1$ ise $(4.2.)$ bağıntısında yerine koyalım.

$$\begin{aligned} H_n(\alpha \quad \mid \quad x) &= \sum_{k=0}^{n} k! S_k^n(x) \sum_{m=0}^{\infty} \binom{k+m-1}{m} \alpha^m \\ &= \sum_{k=0}^{n} k! \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} (x+j)^n \sum_{m=0}^{\infty} \binom{k+m-1}{m} \alpha^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{k+m-1}{m} \alpha^m \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} (x+j)^n \end{aligned}$$

elde edilir. □

Sonuç 4.0.9. $x = 0$ *alınırsa,*

$$H_n(\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k+m-1}{m} \binom{k}{j} \alpha^m j^n$$

bulunur.

Sonuç 4.0.10.

$$H_n(\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{k+m-1}{m} \alpha^m S_2(n,k)$$

elde edilir.

Sonuç 4.0.11. n *çift bir doğal sayı olmak üzere;*

$$H_n(\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{2k+m-1}{m} \alpha^m S_2(n,2k) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{2k+m}{m} \alpha^m S_2(n,2k+1)$$

(3.10.) *bağıntısından,*

$$\begin{aligned} H_n(\alpha) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{2k+m-1}{m}\alpha^m n!\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{k^{n-2j}}{(2j)!(n-2j)!}T(j,k) \\ &+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{2k+m}{m}\alpha^m S_2(n,2k+1) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.0.12. *(Arakawa, Ibukiyama and Kareko 2014)*

$$B_m=\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\frac{n!}{n+1}S_2(m,n)$$

dir.

Teorem 4.0.13.

$$\Delta^{2k}x^n\mid_{x=0}=(2k)!n!\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{k^{n-2j}}{(2j)!(n-2j)!}T(j,k)$$

dir.

İspat. Teorem 3.6.1.(2)' de verilen bağıntıda k yerine $2k$ konulursa,

$$S_2(n,2k)=\frac{1}{(2k)!}\Delta^{2k}x^n\mid_{x=0}$$

elde edilir. (3.10.) bağıntısında yerine yazılırsa;

$$S_2(n,2k)=n!\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{k^{n-2j}}{(2j)!(n-2j)!}T(j,k)$$

olduğundan;

$$\Delta^{2k}x^n\mid_{x=0}=(2k)!n!\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{k^{n-2j}}{(2j)!(n-2j)!}T(j,k)$$

bulunur. □

Sonuç 4.0.14. *(Roman 2005)* $n>1$ *olsun.*

$$b_n(0)=(\frac{3-n^2}{2})b_{n-1}(0)+\sum_{k=2}^{n}\frac{n-1}{k(k-1)}S_1(n-2,k-2)B_k$$

dir.

İspat. (Roman 2005) tarafından aşağıdaki bağıntı verilmiştir. Bu bağıntıyı düzenleyelim.

$$\begin{aligned}
b_n(x) &= (1-n)b_n(0) + n(2-n)b_{n-1}(0) + nb_{n-1}(0)B_1(x) \\
&+ \sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)}{k(k-1)} S_1(n-2,k-2)B_k(x) \\
b_n(0) &= (1-n)b_n(0) + n(2-n)b_{n-1}(0) + nb_{n-1}(0)B_1 \\
&+ \sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)}{k(k-1)} S_1(n-2,k-2)B_k \\
b_n(0) &= (1-n)b_n(0) + (n(2-n) - \frac{n}{2})b_{n-1}(0) + nb_{n-1}(0) \\
&+ \sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)}{k(k-1)} S_1(n-2,k-2)B_k \\
b_n(0) &= (\frac{3-n^2}{2})b_{n-1}(0) + \sum_{k=2}^{n} \frac{n-1}{k(k-1)} S_1(n-2,k-2)B_k, \; n > 1
\end{aligned}$$

□

Örnek 4.0.15. $n = 2$ için;

$$\begin{aligned}
b_2(0) &= \frac{-1}{2} b_1(0) + \frac{1}{2.1} S_1(0,0)B_2 \\
&= \frac{-1}{4} + \frac{1}{2}.\frac{1}{6} \\
&= \frac{-1}{4} + \frac{1}{12} \\
&= -\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

dır. $n = 1, 2, 3, \ldots$ için yukarıdaki bağıntı yardımıyla tüm ikinci tür Bernoulli sayıları bulunabilir.

Teorem 4.0.16. *(Roman 2005)*

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k(0) \frac{t^k}{k!} = \frac{t}{\ln(t+1)}$$

İspat. (2.6.) ve (2.1.) formüllerinden,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} b_k(0) \frac{t^k}{k!} &= \frac{t}{\ln(t+1)} \\
&= b_0(0) + b_1(0)t + b_2(0)\frac{t^2}{2!} + \cdots + b_n(0)\frac{t^n}{n!} \\
&= \frac{t}{t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} - \ldots} \\
&= 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{4}t^3 - \frac{19}{30}t^4 + \ldots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(0)t^n
\end{aligned}$$

□

$u_n(0) = \frac{b_n(0)}{n!}$ elde edilir. Burada $u_n(0)$ ikinci tür Bernoulli polinomlarıdır. $b_n(0)$ sayılarına aynı zamanda 1. tür Cauchy sayıları da denir ve aşağıdaki şekilde de tanımlanabilir:

$$b_n(0) = c_n = \int_0^1 x^{\underline{n}} dx$$

dir.

Örnek 4.0.17. $n = 2$ için,

$$b_2(0) = \int_0^1 x(x-1)dx = -\frac{1}{6}$$

bulunur. $n = 3$ için,

$$\begin{aligned} b_3(0) &= \int_0^1 x^{\underline{3}} dx \\ &= \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 4.0.18.

$$B_{n-1}(\frac{1}{2}) = 2^{1-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k-1} E_{k-1}(-1)^{n-k} \sum_{m=0}^{n-k} \frac{(-1)^m m! S_2(n,m)}{m+1}$$

dir.

İspat. (Arakawa, Ibukiyama and Kareko 2014) tarafından verilen (3.14.) bağıntısı

$$B_n = (-1)^n \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{m! S_2(n,m)}{m+1}$$

dir. (3.16.) bağıntısını (3.17.) de yerine koyarsak Teorem 4.0.18. ispatlanmış olur. □

Teorem 4.0.19.

$$B_{2m} = (2m)! \sum_{j=0}^{d+1} \sum_{k=0}^{m} \frac{(2j)^{2m-2k}}{(2k)!(2m-2k)!(2j+1)} T(k,2j) - \sum_{j=0}^{d} \frac{(2j-1)!}{2j} S_2(2m, 2j-1)$$

dir.

İspat.

$$a_{n,m} = (-1)^n \frac{n!}{n+1} S_2(m,n)$$

olmak üzere,

$$B_m = \sum_{n=0}^{m} a_{n,m}$$

olarak ele alalım.

$$B_m = a_{0,m} + a_{2,m} + \cdots + a_{2k,m} + \cdots + a_{2d,m} + a_{1,m} + a_{3,m} + \cdots + a_{2d-1,m}$$

Bu seri toplamı tek ve çift indislerine göre ayrırsak,

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=0}^{d+1} a_{2j,m} + \sum_{j=1}^{d} a_{2j-1,m} \\ B_m &= \sum_{j=0}^{d+1} (-1)^{2j} \frac{(2j)!}{2j+1} S_2(m,2j) + \sum_{j=1}^{d} (-1)^{2j-1} \frac{(2j-1)!}{2j} S_2(m,2j-1) \end{aligned}$$

elde edilir. $(3.14.)$ bağıntısında $n = 2d$ şeklinde bir çift tamsayı ise o zaman;

$$B_n = \sum_{j=0}^{d+1} \frac{(2j)!}{2j+1} S_2(n,2j) - \sum_{j=1}^{d} \frac{(2j-1)!}{2j} S_2(n,2j-1) \tag{4.3.}$$

dir. Eğer $n = 2d+1$ şeklinde bir tek tamsayı ise o zaman $(3.14.)$ bağıntısı aşağıdaki şekilde yazılır:

$n \geqslant 1$ için $B_{2n+1} = 0$ ve

$$(-1)^{2n+1} \sum_{m=0}^{2n+1} (-1)^m \frac{m!}{m+1} S_2(2n+1,m) = 0$$

elde edilir.

$$B_n = \sum_{j=0}^{d} \frac{(2j)!}{2j+1} S_2(m,2j) - \sum_{j=1}^{d+1} \frac{(2j-1)!}{2j} S_2(m,2j-1) \tag{4.4.}$$

Eğer $n = 2m$, $d \geqslant 1$ için bir çift tam sayı ise o zaman,

$$B_{2m} = \sum_{j=0}^{d+1} \frac{(2j)!}{2j+1} S_2(2m,2j) - \sum_{j=1}^{d} \frac{(2j-1)!}{2j} S_2(2m,2j-1), \tag{4.5.}$$

Burada $d+1 = [| \frac{n}{2} |] + 1$, $d = [| \frac{n}{2} |]$ dir.

$(3.10.)$ bağıntısını $(4.5.)$ bağıntısında yerine koyarsak aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$B_{2m} = (2m)! \sum_{j=0}^{d+1} \sum_{k=0}^{m} \frac{(2j)^{2m-2k}}{(2k)!(2m-2k)!(2j+1)} T(k,2j) - \sum_{j=0}^{d} \frac{(2j-1)!}{2j} S_2(2m,2j-1).$$

□

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında Merkezi Faktöriyel sayılarının kullanım alanlarından bahsedilmiş, uygulama olarak da Bernoulli, Euler, Grünert, Frobenious-Euler ve Genocchi polinomları gibi polinom aileleri ile Euler sayıları,1. ve 2. tür Bernoulli sayıları, 1. tür ve 2. tür Stirling sayıları, Frobenious-Euler sayıları ve Genocchi sayıları incelenmiştir.

Klasik analiz metotlarıyla da ispatlanabilen bazı temel özelliklerin farklı polinomlar ailesi ve sayılar kullanılarak ispatları da verilmiştir.

Ayrıca;

(1) 1. tür ve 2. tür Stirling sayıları, Grünert, Genocchi,Bernoulli ve Euler polinomlarının rekürans ve üreteç bağıntıları farklı metotlarla ispatlanmıştır.

(2) Genocchi, Euler ve Bernoulli polinomları için bazı özdeşlikler ve bu polinomların diğer analitik sayılar ile arasındaki bağıntıların farklı ispatları verilmiştir.

(3) Analitik sayılar ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.

(4) Bu tezde bazı özel sonuçlar da verilmiştir.

6. KAYNAKLAR

ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, I. A. 1972. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. Dover Publication, pp. 803-821, New York.

APOSTOL, T.M. 1976. Introduction to Analytic Number Theory. Springer-Verlag, pp. 265-267, New York.

ARAKAWA, T., IBUKIYAMA T. and KAREKO, M. 2014. Bernoulli Numbers and Zeta Functions. Springer, pp. 25-34, Japan.

BAYAD, A., ŞİMŞEK, Y. and SRIVASTAVA H.M. 2014. Some array type polynomials associated with special numbers and polynomials. *Applied Mathematics and Computation,* 244: 149-157.

BOYADZHIEV, K.N. 2012. Close Encounters with the Stirling Numbers of the Second Kind. *Mathematics Magazine,* 85: 252-266.

BUTZER, P.L., MARKETT C. and SCHMİDT M. 1991. Stirling Numbers, Central Factorial Numbers and Representation of the Riemann Zeta Function. *Results in Mathematics*, 19: 257-274.

CAMERON, P.J. 1994. Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms. Cambridge University Press, pp. 75-87, Australia.

CARLITZ, L. 1953. A note on the multiplication formulas for Bernoulli and Euler polynomials. *Proceedings of the Amerikan Mathematical Society*, 4: 184-188.

CARLITZ, L. 1960. Note on Nörlund's Polynomial $B_n^{(z)}$. *Proceedings of the Amerikan Mathematical Society*, 11: 452-455.

CARLITZ, L. 1963. The product of two Eulerian polynomials. *Mathematics Magazine*, 32: 247-260.

CARLITZ, L. 1968. Bernoulli Numbers. *Fibonacci Quarterly*, 6: 71-85.

CARLITZ, L. 1969. Generating Functions. *Fibonacci Quarterly*, 7: 359-393.

CHANG, C.H. and HA, C.W. 2001. Eulerian Polynomials and Related Explicit Formulas. *Fibonacci Quarterly,* 38: 399-404.

CHANG, C.H. and HA, C.W. 2005. A multiplication theorem for the Lerch zeta function and explicit representations of the Bernoulli and Euler polynomials. *J. Math. Anal. Appl.*, 315: 758-767.

CIGLER, J. 2015. Fibonacci Polynomials and Central Factorial Numbers. Http://homepage.univie.ac.at/johann.cigler/preprints/central-factorial.pdf. [Son erişim tarihi: 17.01.2016]

CONWAY, J.B. 1986. Functions of One Complex Variable. Springer-Verlag, pp. 330- 344, New York.

CONWAY, J.B. and GUY, R.K. 1996. The Book of Numbers. Springer-Verlag, pp. 107-109, New York.

ÇAM, Ş. 2005. Stirling Sayıları. *Matematik Dünyası Dergisi*, 2005 Bahar, pp. 30-34, İstanbul.

ÇAPKIN, M. 2009. Bernoulli Sayıları, Polinomları ve Özellikleri. Yüksek lisans tezi, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Bursa.

DERE, R. 2011. Umral Cebir Üzerinde Bazı Özel Polinomların Üreteç Fonksiyonları ve Uygulamaları. Yüksek lisans tezi, Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Antalya.

DERE, R. and ŞİMŞEK, Y. 2011. Genocchi Polynomials associated with the Umbral algebra. *Applied Mathematics and Computation*, 218: 756-761.

ERDELYI, A. 1953. Higher Transcendental Functions. The bateman Manuscript Procect, Vols I-III. McGraw-Hill, pp. 283-292, New York.

GOULD, H.W. 2010. Table for Combinatorial Numbers and Associated Identities: Table 2, From the seven unpublished manuscripts of H. W. Gould. Edited and Compiled by Jocelyn Quaintance. Http://www.math.wvu.edu/~gould/. [Son erişim tarihi: 17.01.2016]

İBİŞ, B. 2005. Birleşik Analizde Stirling Sayıları ve Uygulamaları. Yüksek lisans tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

KARAKAŞ, H.İ. 1998. Soyut Cebire Giriş, Matematik Vakfı, Ankara.

KIM, T. 2012. Identities involving Frobenious- Euler polynomials arising from nonlinear differential equations. *Journal of Number Theory,* 132: 2854-2865.

KIM, T. 2007. A note on the q-Genocchi Numbers and Polynomials. *Hindawi Publishing Corporation Journal of Inequalities and Applications*, Volume 2007: 1-8.

MICHAELS, J.G. and ROSEN, K.H. 1991. Applications of Discrete Mathematics. McGraw-Hill Higher Education.

MOND, D. and KRAMMER, D. 2004. Combinatorics Lecture Notes, Warwick Mathematics Institute.

MURRAY, R. S. 1961. Schaum's Outline of Theory and Problems of Calculus of Finite Differences and Different Equations. McGraw-Hill Book Company, New York.

NIELSEN, N. 1965. Die Gammafunktion. Chelsea Publishing Company, New York.

RAABE, J.L. 1851. Zurückführung einiger summen and bestimmten integrale auf die Jacob Bernoullische function. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 42: 348-376.

RAINVILLE, E.D. 1960. Special Functions. The Macmillan Company, New York.

ROMAN, S. 1992. Advanced Linear Algebra. Springer-Verlag, New York.

ROMAN, S. 2005. The Umbral Calculus. Dover Publications Inc, New York.

SAXL, J. 1995. Discrete Mathematics, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, Cambridge University.

SRIVASTAVA, H.M. and LIU, G-D. 2009. Some Identities and Congruences Involving a Certain Family of Numbers. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 16: 536-542.

SRIVASTAVA, H.M., OZARSLAN, M.A.and KAANOGLU, C. 2010. Some Families of Generating Functions for a Certain Class of Three-Variable Polynomials. *Integral Transforms and Special Functions*, 21: 885-896.

ŞİMŞEK, Y. 2014. Special Numbers on Analytic Functions. *Applied Mathematics*, 5: 1091-1098.

ŞİMŞEK, Y. 2013. Generating functions for generalized Stirling type numbers, Array type polynomials, Eulerian type polynomials and their applications. *Fixed Point Theory and Applications*, 87: 1-28.

ŞİMŞEK, Y. 2009. A New Approach to q-Genocchi Numbers and Their Interpolation Functions. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 71: 793-799.

WALUM, H. 1991. H. Walum, Multiplication formulae for periodic function. *Pasific Journal of Mathematics*, 149: 383-396.

WEISSTEIN, E. W. 1998. Crc Concise Encyclopedia of Mathematics. A Crc Press Company, New York.

WILF, H. S. 1990. Generatingfunctionology. Department of Mathematics of University of Pennsylvania, Philadelphia, Pennsylvania.

ÖZGEÇMİŞ

Ülker BAŞAR 1991 yılında Manisa ili Turgutlu ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Turgutlu'da tamamladı. 2009 yılında girdiği Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2013 yılında Matematikçi olarak mezun oldu. Eylül 2013'te Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı.