

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BİR VE İKİ BOYUTLU MİKRO YAPILARIN YÜKSEK MERTEBEDEN
ELASTİSİTE TEORİLERİ İLE STATİK VE DİNAMİK ANALİZLERİ**

Bekir AKGÖZ

**DOKTORA TEZİ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

2016

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BİR VE İKİ BOYUTLU MİKRO YAPILARIN YÜKSEK MERTEBEDEN
ELASTİSİTE TEORİLERİ İLE STATİK VE DİNAMİK ANALİZLERİ**

Bekir AKGÖZ

**DOKTORA TEZİ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

(Bu tez TÜBİTAK tarafından 112M879 nolu proje ile desteklenmiştir.)

2016

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR VE İKİ BOYUTLU MİKRO YAPILARIN YÜKSEK MERTEBEDEN
ELASTİSİTE TEORİLERİ İLE STATİK VE DİNAMİK ANALİZLERİ

Bekir AKGÖZ

DOKTORA TEZİ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

Bu tez 8 / 12 /2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği / Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

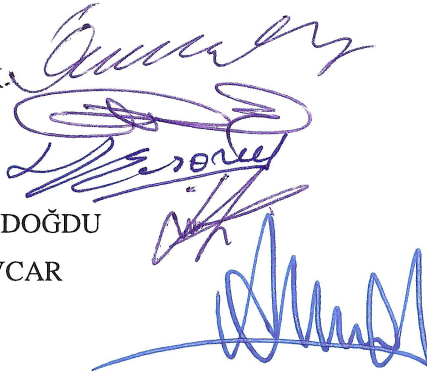
Prof. Dr. Ömer CİVALEK

Prof. Dr. Fuat DEMİR

Doç. Dr. Hakan ERSOY

Yrd. Doç. Dr. İbrahim AYDOĞDU

Yrd. Doç. Dr. Mehmet AVCAR



ÖZET

BİR VE İKİ BOYUTLU MİKRO YAPILARIN YÜKSEK MERTEBEDEN ELASTİSİTE TEORİLERİ İLE STATİK VE DİNAMİK ANALİZLERİ

Bekir AKGÖZ

Doktora Tezi, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ömer CİVALEK

Aralık 2016, 153 sayfa

Bu tez çalışmasında, son zamanlarda teknolojiye hızlı gelişmelere bağlı olarak popüler hale gelen ve nanoteknolojide geniş bir uygulama alanına sahip olan mikro boyutlu kiriş ve plak şeklindeki yapısal elemanların mekanik davranış karakteristikleri, yüksek mertebeden (klasik olmayan) elastisite teorilerine dayalı olarak incelenmiştir. Bir boyutlu yapıların modellenmesinde yaygın olarak kullanılan Bernoulli-Euler ve Timoshenko kiriş teorilerinin yanında sinüzoidal kayma deformasyonlu kiriş teorisi de kullanılmıştır. Benzer biçimde, iki boyutlu yapıların modellenmesinde yine yaygın olarak kullanılan Kirchhoff ve Mindlin plak teorilerine ek olarak sinüzoidal kayma deformasyonlu plak teorisi de kullanılmıştır. Bu yapıların elastik bir zemin üzerinde olması durumları da dikkate alınmış ve elastik zemin ile yapılar arasındaki etkileşim Winkler ve Pasternak elastik zemin modelleri ile dikkate alınmıştır. Eğilme, burkulma ve serbest titreşim için yönetici diferansiyel denklemler ile ilgili sınır koşulları varyasyonel ilke yardımıyla elde edilmiştir. Bu yapıların eğilme, burkulma ve serbest titreşim davranışları üzerindeki boyut, elastik zemin ve kayma deformasyonu etkilerini belirlemek için detaylı bir parametrik çalışma yapılmıştır. Ayrıca, fonksiyonel değişimli malzemelerden yapılmış kalın mikro kirişlerin eğilme ve burkulma davranışları incelenmiştir.

Boyut etkisinin, kalınlık (çap) ile ilave malzeme boyut ölçek parametresi birbirine yakın olduğunda daha önemli olduğu gözlemlenmiştir. Elastik zemin etkisinin hesaba katılmasıyla deplasman değerlerinin azaldığı, burkulma yükü ve doğal frekans değerlerinin ise arttığı sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca, kayma deformasyonunun etkilerinin düşük boy/kalınlık değerlerinde daha belirgin olduğu tespit edilmiştir. Dahası, yüksek mertebeden elastisite teorilerine dayalı kurulan Timoshenko kiriş ve Mindlin plak modelleri için klasik kayma düzeltme faktörlerinin yetersiz kaldığı belirlenmiş ve bu modeller için yeni boyut etkili kayma düzeltme faktörleri ilk kez önerilmiştir.

ANAHTAR KELİMELELER: Boyut etkisi, burkulma, eğilme, elastik zemin etkisi, kiriş ve plak teorileri, titreşim, yüksek mertebeden elastisite teorileri

JÜRİ: Prof. Dr. Ömer CİVALEK (Danışman)

Prof. Dr. Fuat DEMİR

Doç. Dr. Hakan ERSOY

Yrd. Doç. Dr. İbrahim AYDOĞDU

Yrd. Doç. Dr. Mehmet AVCAR

ABSTRACT

STATIC AND DYNAMIC ANALYSES OF ONE- AND TWO-DIMENSIONAL MICROSTRUCTURES BASED ON HIGHER-ORDER ELASTICITY THEORIES

Bekir AKGÖZ

PhD Thesis in Civil Engineering
Supervisor: Prof. Dr. Ömer CİVALEK
December 2016, 153 pages

In this thesis, mechanical behavior characteristics of micro-sized structural members in form of beam and plate, which have become popular and have a wide application area in nanotechnology due to the rapid developments in technology in recent times, are investigated based on higher-order (non-classical) elasticity theories. Sinusoidal shear deformable beam theory is used besides Bernoulli-Euler and Timoshenko beam theories widely used for modelling of one-dimensional structures. Similarly, sinusoidal shear deformable plate theory is employed to model two-dimensional structures in addition to the widely known Kirchhoff and Mindlin plate theories. It is considered that these structures are embedded in an elastic medium and the interactions between these structures and elastic medium are taken into consideration by Winkler and Pasternak elastic foundation models. Governing differential equations and corresponding boundary conditions for bending, buckling and free vibration are derived with the aid of variational principle with modified strain gradient elasticity theory. A detailed parametric study is performed to indicate the effects of small size, elastic foundation and shear deformation on bending, buckling and free vibration behaviors of these structures. Also, bending and buckling behaviors of thick micro beams made of functionally graded materials are investigated.

It is observed that size effect becomes more important when thickness (diameter) is close to additional material length scale parameter. By taking into account the elastic foundation effect, it is reached that there is a decrement in the displacements while there is an increment in buckling loads and natural frequency. Also, it is found that effects of shear deformation are more significant for lower values of length-to-thickness ratio. Moreover, it is determined that classical shear correction factors are inadequate for Timoshenko beam and Mindlin plate models based on higher-order elasticity theories and the new size-dependent shear correction factors are firstly proposed for these models.

KEYWORDS: Beam and plate theories, bending, buckling, elastic foundation effect, higher-order elasticity theories, size effect, vibration

COMMITTEE: Prof. Dr. Ömer CİVALEK (Supervisor)
Prof. Dr. Fuat DEMİR
Assoc. Prof. Dr. Hakan ERSOY
Asst. Prof. Dr. İbrahim AYDOĞDU
Asst. Prof. Dr. Mehmet AVCAR

ÖNSÖZ

Günümüzde nanoteknolojinin birçok gelişmiş ülke tarafından en kritik araştırma alanı olarak görülmesi, mikro-ve nano-elektro-mekanik sistemlerin (MEMS ve NEMS) kullanımlarındaki artışı da beraberinde getirmiştir. Kiriş ve plak gibi bir ve iki boyutlu yapılar bu sistemlerde en sık kullanılan elemanlardır. Bu yapıların uygun bir biçimde tasarlanması için mekanik davranış karakteristiklerinin çok iyi bilinmesi gerekmektedir. Çeşitli malzemeler üzerinde yapılan deneyler sonucunda mikron ve daha küçük boyutlardaki yapıların deformasyon davranışları üzerinde bir boyut etkisinin bulunduğu tespit edilmiştir. Ancak, bu boyut etkisi klasik elastisite teorisi ile dikkate alınmadığından doğru bir biçimde yorumlanamamıştır. Daha sonra en az bir tane ilave malzeme boyut ölçek parametresi içeren ve bu sayede boyut etkisini hesaba katabilen yüksek mertebeden (klasik olmayan) elastisite teorileri kullanılmaya başlanmıştır. Bu doktora tezi kapsamında, mikro kiriş, karbon nanotüp ve mikrotüpçük gibi bir boyutlu ile grafen plaka ve mikro plak gibi iki boyutlu yapıların statik ve dinamik analizleri, yüksek mertebeden (klasik olmayan) elastisite teorilerine dayalı olarak gerçekleştirilmiştir. Bu yapıların eğilme, burkulma ve titreşim davranışları üzerindeki boyut, elastik zemin ve kayma deformasyonu etkileri detaylı bir biçimde incelenmiştir. Ayrıca, fonksiyonel değişimli malzemelerden yapılmış kalın mikro kirişlerin eğilme ve burkulma davranışları da incelenmiştir.

Doktora tezim süresince değerli vaktini ve yardımlarını hiç bir zaman benden esirgemeyen, birlikte çalışmaktan büyük onur duyduğum kıymetli ve saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Ömer CİVALEK'e, desteğini ve anlayışını asla esirgemeyen sevgili eşim Arş. Gör. Ayşe AKGÖZ'e, hayatımın her aşamasında daima yanımda olan değerli aileme ve desteklerinden dolayı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırmalar Kurumu'na (TÜBİTAK) (Proje no: 112M879) en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
1.1. Nanoteknoloji	1
1.2. Mikro ve Nano Boyutlu Yapılar	1
1.2.1. Mikro kirişler ve mikro plaklar	1
1.2.2. Karbon nanotüpler	3
1.2.3. Mikrotüpçükler	4
1.2.4. Grafen plakalar	5
2. KURAMSAL BİLGİLER ve KAYNAK TARAMALARI	8
3. MATERYAL ve METOT	16
3.1. Değiştirilmiş Şekil Değiştirme Değişimi (DŞDD) Elastisite Teorisi	17
3.1.1. Mikro kiriş modelleri	19
3.1.1.1. Bernoulli-Euler mikro kiriş modeli	19
3.1.1.2. Timoshenko mikro kiriş modeli	28
3.1.1.3. Sinüzoidal mikro kiriş modeli	38
3.1.2. Mikro plak modelleri	51
3.1.2.1. Kirchhoff mikro plak modeli	51
3.1.2.2. Mindlin mikro plak modeli	62
3.1.2.3. Sinüzoidal mikro plak modeli	76
3.1.3. Fonksiyonel değişimli malzemelerden yapılmış mikro kirişler	98
4. EĞİLME, BURKULMA ve TİTREŞİM PROBLEMLERİ	105
4.1. Bir Boyutlu Yapılar	105
4.1.1. Eğilme problemi	105
4.1.2. Burkulma problemi	106
4.1.3. Serbest titreşim problemi	107
4.2. İki Boyutlu Yapılar	108
4.2.1. Eğilme problemi	108
4.2.2. Burkulma problemi	110
4.2.3. Serbest titreşim problemi	112
4.3. Homojen Olmayan Mikro Kirişlerin Analizi	113
4.3.1. Eğilme davranışı	114
4.3.2. Burkulma davranışı	115
5. BULGULAR ve TARTIŞMA	116
6. SONUÇ	145
7. KAYNAKLAR	147
ÖZGEÇMİŞ	

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

a	Plak boyu
b	Kiriş/Plak genişliği
A	En kesit alanı
D	Plak eğilme rijitliği
D_i	İç çap
D_d	Dış çap
E	Elastisite modülü
e_{ijk}	Permütasyon sembolü
$f(x, t)$	Eksenel doğrultuda yayılı dış yük
h	Kiriş/Plak yüksekliği
U_m, H_m, W_m	Fourier katsayıları
I	Eylemsizlik momenti
k	Malzeme özelliği değişim indeksi
k_w	Winkler zemin parametresi
Kw	Boyutsuz Winkler zemin parametresi
k_s	Kayma düzeltme faktörü
k_s^*	Yeni kayma düzeltme faktörü
k_p	Pasternak zemin parametresi
Kp	Boyutsuz Pasternak zemin parametresi
L	Kiriş boyu
l_0, l_1, l_2	İlave malzeme boyut ölçek parametreleri
M	Eğilme momenti
M^{nc}	Klasik olmayan eğilme momenti
N	Normal kuvvet
P	Çubuğa etkiyen aksenal basınç yükü
$p_i, \tau_{ijk}^{(1)}, m_{ij}^s$	Yüksek mertebeden gerilme tansörlerinin bileşenleri
P_{kr}	Kritik burkulma yükü
P_x, P_y, P_{xy}	x ve y doğrultularında uygulanan basınç ve kesme kuvvetleri
$q(x, t)$	Enine doğrultuda yayılı dış yük
\hat{Q}_i	Kiriş uçlarındaki kuvvet ve momentler
Q_m	Kirişte yük için Fourier katsayısı
Q_{mn}	Plakta yük için Fourier katsayısı
r	Kayma modülü oranı
T	Zaman değişkeni
u	Tarafsız eksen üzerindeki herhangi bir noktanın boyuna deplasmanı
U	Toplam şekil değiştirme enerjisi
u_1, u_2, u_3	Deplasman vektörünün sırasıyla x , y ve z bileşenlerini
u_i	Deplasman vektörü bileşenleri
u_s	Toplam şekil değiştirme enerji yoğunluğu
V	Kesme kuvveti
V_m	Metal bileşene ait hacim fraksiyonu
V_s	Seramik bileşene ait hacim fraksiyonu

w	Tarafsız eksen üzerindeki herhangi bir noktanın enine deplasmanı
γ_i	Dilatasyon (genleşme) değişimi vektörü bileşenleri
ε_{ij}	Şekil değiştirme tansörü bileşenleri
δ_{ij}	Kronecker delta sembolü
$\eta_{ijk}^{(1)}$	Deviatorik uzama değişimi tansörü bileşenleri
θ_i	Dönme vektörü bileşenleri
λ, μ	Lamé sabitleri
ν	Poisson oranı
ρ	Kütle yoğunluğu
σ_{ij}	Gerilme tansörü bileşenleri
φ	Kiriş en kesitinin y eksenine etrafında dönme açısı
φ_1, φ_2	Plak orta düzleminin sırasıyla y ve x eksenine etrafındaki dönme açıları
χ_{ij}^s	Simetrik dönme değişimi tansörü bileşenleri
ω	Açısal frekans

Kısaltmalar

AKM	Atomik Kuvvet Mikroskobu
ÇKKNT	Çok Katmanlı Karbon Nanotüp
DGÇ	Değiştirilmiş gerilme çifti elastisite teorisi
DŞDD	Değiştirilmiş şekil değiştirme değişimi elastisite teorisi
EBT	Bernoulli-Euler kiriş teorisi
FDM	Fonksiyonel değişimli malzeme
KNT	Karbon Nanotüp
KPT	Kirchhoff plak teorisi
KT	Klasik (Cauchy) elastisite teorisi
MEMS	Mikro elektro-mekanik sistemler
MPT	Mindlin plak teorisi
MPT*	Mindlin plak teorisi (yeni kayma düzeltme faktörlü)
NEMS	Nano elektro-mekanik sistemler
SBT	Sinüzoidal kiriş teorisi
SPT	Sinüzoidal plak teorisi
TBT	Timoshenko kiriş teorisi
TBT*	Timoshenko kiriş teorisi (yeni kayma düzeltme faktörlü)
TKKNT	Tek Katmanlı Karbon Nanotüp

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. Tipik bir mikro anahtar (Lai ve Tsou, 2011)	1
Şekil 1.2. Karbon nanotüpün bir köprü olarak kullanılması (Sandia National Laboratories, 2015)	2
Şekil 1.3. Tipik bir mikro rezonatör (Telaviv University, 2015)	2
Şekil 1.4. Titreşim şok sensörüne ait şematik gösterim (Hu vd., 2013)	2
Şekil 1.5. Atomik Kuvvet Mikroskobu probu (Nanotechmag, 2015)	3
Şekil 1.6. Tek katmanlı karbon nanotüpler a) Koltuk b) Zikzak c) Kiral	4
Şekil 1.7. 13 paralel protofilamandan oluşan tipik bir mikrotüpçük	5
Şekil 1.8. Bal peteği görünümündeki grafen plaka	5
Şekil 3.1. İki-parametrelilik elastik zemin üzerindeki tek katmanlı karbon nanotüpün giriş modeli	16
Şekil 3.2. İki-parametrelilik elastik zemin üzerindeki mikrotüpçüğün giriş modeli	16
Şekil 3.3. a) Grafen plakamın sürekli plak biçiminde modellenmesi b) İki-parametrelilik elastik zemin üzerindeki tek katmanlı grafen plaka	17
Şekil 3.4. Fonksiyonel değişimli malzemeden yapılmış aksenal yüklü girişin şematik gösterimi	99
Şekil 3.5. Metal bileşene ait hacim fraksiyonunun mikro giriş yüksekliği boyunca değişimi	99
Şekil 5.1. Mikro girişte oluşan en büyük deplasman değerinin kalınlığa bağlı değişimi ($L = 6h$) a) DGÇ b) DŞDD	118
Şekil 5.2. Mikro girişte oluşan en büyük deplasman değerinin kalınlığa bağlı değişimi ($L = 20h$) a) DGÇ b) DŞDD	119
Şekil 5.3. Mikro girişe ait kritik burkulma yükü değerinin kalınlığa bağlı değişimi ($L = 6h$) a) DGÇ b) DŞDD	120
Şekil 5.4. Mikro girişe ait kritik burkulma yükü değerinin kalınlığa bağlı değişimi ($L = 20h$) a) DGÇ b) DŞDD	121
Şekil 5.5. Mikro girişe ait temel frekans değerinin kalınlığa bağlı değişimi ($L = 6h$) a) DGÇ b) DŞDD	123

Şekil 5.6. Mikro kirişe ait temel frekans değerinin kalınlığa bağlı değişimi ($L = 20h$) a) DGÇ b) DŞDD	124
Şekil 5.7. Mikro plakta oluşan en büyük deplasman değerinin kalınlığa bağlı değişimi ($a = b = 6h$) a) DGÇ b) DŞDD	125
Şekil 5.8. Mikro plakta oluşan en büyük deplasman değerinin kalınlığa bağlı değişimi ($a = b = 20h$) a) DGÇ b) DŞDD	126
Şekil 5.9. Mikro plağa ait kritik burkulma yükü değerinin kalınlığa bağlı değişimi ($a = b = 6h$) a) DGÇ b) DŞDD	127
Şekil 5.10. Mikro plağa ait kritik burkulma yükü değerinin kalınlığa bağlı değişimi ($a = b = 20h$) a) DGÇ b) DŞDD	128
Şekil 5.11. Mikro plağa ait temel frekans değerinin kalınlığa bağlı değişimi ($a = b = 6h$) a) DGÇ b) DŞDD	129
Şekil 5.12. Mikro plağa ait temel frekans değerinin kalınlığa bağlı değişimi ($a = b = 20h$) a) DGÇ b) DŞDD	130
Şekil 5.13. Elastik zemin parametrelerinin karbon nanotüpte meydana gelen deplasman değerleri üzerindeki etkisi ($L = 8d$) a) KT b) DŞDD	132
Şekil 5.14. Elastik zemin parametrelerinin karbon nanotüpe ait burkulma yükü değeri üzerindeki etkisi ($L = 8d$) a) KT b) DŞDD	133
Şekil 5.15. Elastik zemin parametrelerinin karbon nanotüpe ait doğal frekans değeri üzerindeki etkisi ($L = 8d$) a) KT b) DŞDD	134
Şekil 5.16. Elastik zemin parametrelerinin grafen plakanın orta noktasındaki deplasman değeri üzerindeki etkisi ($a = b = 8h$) a) KT b) DŞDD	135
Şekil 5.17. Elastik zemin parametrelerinin grafen plakaya ait burkulma yükü değeri üzerindeki etkisi ($a = b = 8h, m = n = 1$) a) KT b) DŞDD	136
Şekil 5.18. Elastik zemin parametrelerinin grafen plakaya ait doğal frekans değeri üzerindeki etkisi ($a = b = 8h, m = n = 1$) a) KT b) DŞDD	137
Şekil 5.19. Düzgün yayılı yük altındaki FDM'den yapılmış mikro kirişin boyutsuz deplasman değerleri üzerinde L/h ve l/h etkileri ($k = 1$) a) W_{TBT}/W_{EBT} b) W_{TBT}^*/W_{EBT} c) W_{SBT}/W_{EBT}	141
Şekil 5.20. Boyutsuz burkulma yükü değerinin L/h 'a bağlı olarak değişimi ($k = 0,5$) a) KT b) DGÇ c) DŞDD	143
Şekil 5.21. Boyutsuz burkulma yükü değerinin L/h 'a bağlı olarak değişimi ($k = 2$) a) KT b) DGÇ c) DŞDD	144

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 5.1. İki ucu basit mesnetli epoksi mikro kirişe ait boyutsuz kritik burkulma yükü ($\bar{P}_{cr} = P_{cr}L^2/EI$) değerlerinin karşılaştırılması ($L = 20h$)	117
Çizelge 5.2. Basit mesnetli epoksi mikro plağa ait ilk üç doğal frekans (MHz) değerlerinin karşılaştırılması ($a = b, h = 2l$)	117
Çizelge 5.3. Tekil yük etkisi altındaki mikrotüpçüğün en büyük deplasman değerleri (μm) ($Q_0 = 0.01 nN, l = D_o$)	138
Çizelge 5.4. Tekil yüke maruz kalan elastik zemin üzerindeki mikrotüpçüğün en büyük deplasman değerleri (μm) ($Q_0 = 0.01 nN, l = D_o, Kw = 100, Kp = 10$)	138
Çizelge 5.5. Mikrotüpçük için kritik burkulma yükü (nN) değerleri ($l = D_o$)	138
Çizelge 5.6. Elastik zemin üzerindeki mikrotüpçük için kritik burkulma yükü (nN) değerleri ($l = D_o, Kw = 100, Kp = 10$)	139
Çizelge 5.7. Mikrotüpçüğe ait temel frekans (MHz) değerleri ($l = D_o$)	139
Çizelge 5.8. Elastik zemin üzerindeki mikrotüpçüğe ait temel frekans (MHz) değerleri ($l = D_o, Kw = 100, Kp = 10$)	139

1. GİRİŞ

1.1. Nanoteknoloji

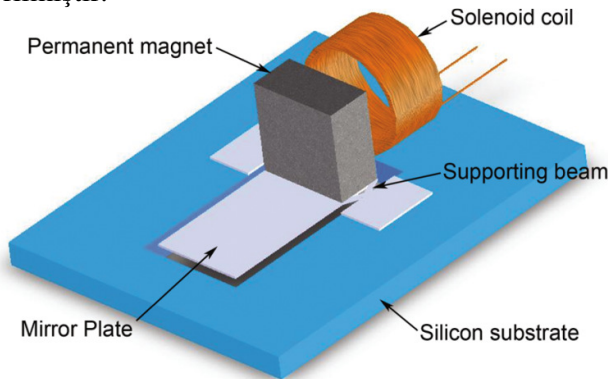
“*Nano*” kelimesi Yunancada cüce anlamına gelmekte olan “*nannos*” sözcüğünden türetilmiş olup nano ile tanımlanan ifadeler, herhangi bir ölçü biriminin milyarda birine karşılık gelmektedir. Örneğin; bir nanometre (nm) 10^{-9} metredir. Nano değeri, maddenin atomdan önceki son basamağını gösterir. 1 nm içinde yan yana en fazla 2–3 atom dizilebilir. Yaklaşık olarak 100 ila 1000 atom bir araya gelerek nano ölçeklerde bir nesne oluşturabilir.

Nanoteknoloji veya nano bilim, genel görüşe göre 1–100 nm boyutlarındaki maddelerin anlaşılması, kontrol edilmesi ve atomsal seviyede değiştirilip işlevsel hale getirilmesi olarak tarif edilmektedir. Nanoteknoloji, üç atomlu küçük bir su molekülünden hemoglobin gibi oksijen taşıyan çok daha büyük bir protein molekülüne veya daha da büyük DNA zincirine kadar çok geniş bir alanı kapsamaktadır. Nano bilim; fizik, kimya, biyoloji ve mühendislik gibi disiplinler arası bir konuma sahip olmasının yanı sıra, endüstri, uçak-uzay, elektronik, tarım ve sağlık gibi çeşitli alanlara potansiyel etkileri bulunmaktadır. Bu nedenle birçok gelişmiş ülke tarafından, en kritik araştırma alanı olarak desteklenmektedir.

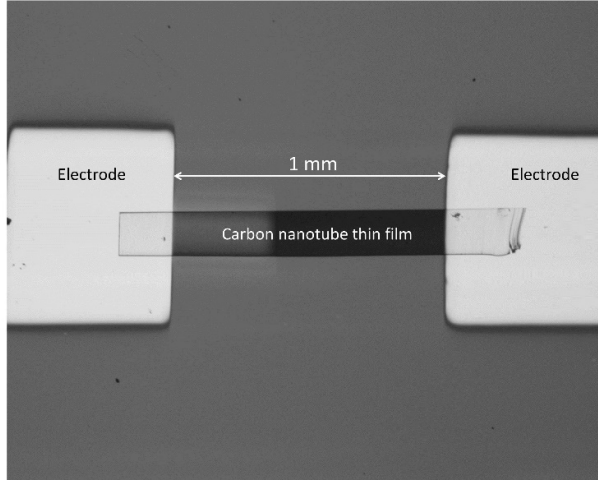
1.2. Mikro ve Nano Boyutlu Yapılar

1.2.1. Mikro kırımlar ve mikro plaklar

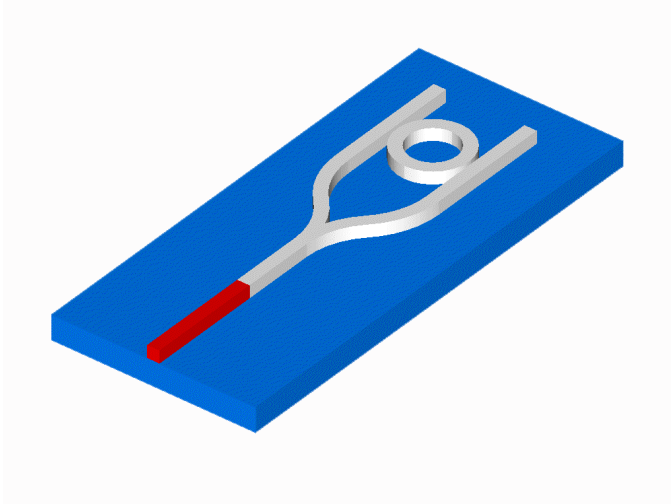
Son zamanlarda teknolojiye hızlı gelişmelere bağlı olarak mikron (10^{-6} m) ve daha küçük boyutlu çubuk, kırım, plak ve kabuk gibi yapıların kullanım alanları da artmıştır. Bu tip yapılara sıklıkla mikro anahtarlar (Batra vd 2008), mikro köprüler (Rahaeifard vd 2012), mikro rezonatörler (Zook vd 1992) titreşim şok önleyiciler (Lun vd 2006), şekil hafızalı alaşımlar (Fu vd 2003) gibi mikro/nano elektro-mekanik sistemlerde (MEMS/NEMS) ve Atomik Kuvvet Mikroskobu’nda (AKM) (Turner ve Wiehn 2001, Mahdavi vd 2008) rastlanılır. Şekiller 1.1–1.5’te bu yapılara örnek verilmiştir.



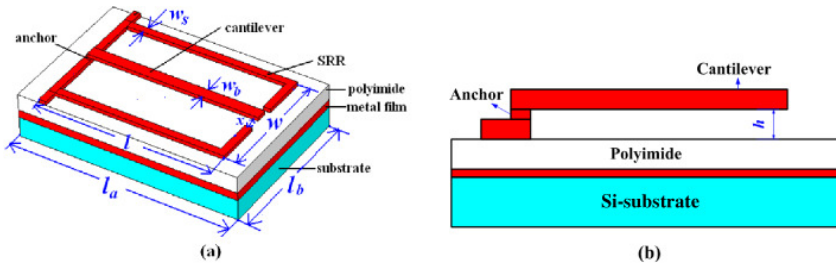
Şekil 1.1. Tipik bir mikro anahtar (Lai ve Tsou 2011)



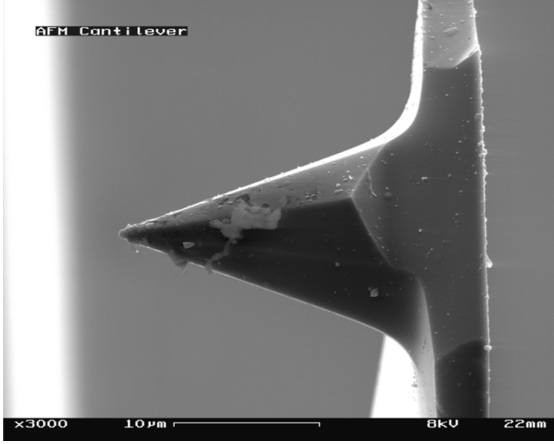
Şekil 1.2. Karbon nanotüpün bir köprü olarak kullanılması (Sandia National Laboratories 2015)



Şekil 1.3. Tipik bir mikro rezonatör (Telaviv University 2015)



Şekil 1.4. Titreşim şok sensörüne ait şematik gösterim (Hu vd 2013)



Şekil 1.5. Atomik Kuvvet Mikroskobu probu (Nanotechmag 2015)

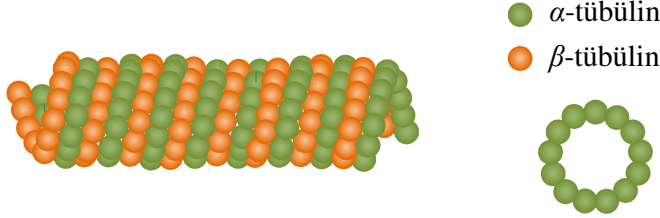
1.2.2. Karbon nanotüpler

Karbon nanotüp (KNT), silindir şeklindeki bir karbon allotropudur ve yapısında sadece karbon atomu bulunur. 1985 yılında 60 karbon atomunun birleştirilmesiyle oluşan futbol topu şeklindeki moleküllerin bulunması, karbon nanotüplerin ortaya çıkmasına zemin hazırlamıştır (Kroto vd 1985). Bu toplara fulleren (“*Buckyballs*”) denilmektedir. İlk olarak 1991 yılında Japon Sumio Iijima, fullerenlerin ark-buharlaşması sentezi sırasında katodda toplanan malzemeyi araştırırken tüp şeklindeki molekülleri keşfetmiştir (Iijima 1991).

Karbon nanotüplerin yapısını incelemek amacıyla yapılan deneyler sonucunda nanotüplerin, kristal grafitlerden oluşan hegzagonal örgüdeki karbon atomlarının oluşturduğu silindirik yapılar olduğu anlaşılmıştır. Karbon nanotüpler, tek katmanlı ve çok katmanlı nanotüpler olarak ikiye ayrılabilir.

Karbon nanotüp, kıvrılmış grafen yüzeyi gibi düşünüldüğünde sadece bir grafen yüzeyinin kıvrılmasıyla elde edilen nanotübe “tek katmanlı karbon nanotüp (TKKNT)” denir. Tek katmanlı karbon nanotüpler genelde 0,4–20 nm çapında ve 100 nm–10 µm uzunluğundadır. Tek katmanlı karbon nanotüpler, grafen plakanın kıvrılma doğrultusuna bağlı olarak üç farklı şekilde olabilir: armchair (koltuk), zigzag (zikzak) ve chiral (kiral) (Şekil 1.6).

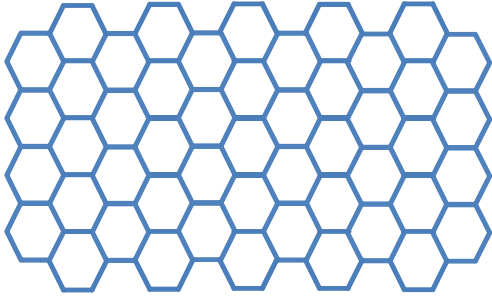
genelde 25 nm dış çapa ve 15 nm iç çapa sahiptirler (Amos ve Amos 1991). Yukarıda bahsedilen hücre içi görevlerinin mikrotüpçüklerin mekanik özellikleri ile ilişkili olmasından dolayı araştırmacılar tarafından birçok deneysel (Kikumoto vd 2006, Vinckier vd 1996) ve teorik (Kasas vd 2004, Li vd 2006, Wang vd 2006) çalışma gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmalarda bitişik protofilamanlar arasındaki bağlar yanıl doğrultuda boyuna doğrultudakine nazaran daha zayıf olduğu tespit edilmiştir.



Şekil 1.7. 13 paralel protofilamandan oluşan tipik bir mikrotüpçük

1.2.4. Grafen plakalar

Grafen plakalar ise tamamıyla karbon atomlarından oluşan iki boyutlu hegzagonal yapıda bal peteği biçimindeki nano boyutlu yapılardır. Grafen plakalar, karbon nanotüpler gibi mükemmel özelliklere sahip olup kıvrılmalarıyla karbon nanotüp elde edilebilmektedir.



Şekil 1.8. Bal peteği görünümündeki grafen plaka

Bu yapılardan en iyi verimi elde etmek için tasarım aşamasında mekanik davranış özelliklerinin çok hassas bir biçimde bilinmesi gerekir. Bu tip yapıların analizinde iki temel yaklaşım, atomik düzeyde oluşturulan modeller ve sürekli ortam mekaniği modellemesidir. Moleküler dinamik simülasyonu gibi atomik seviyede oluşturulan modellerle bazı malzemelerin davranışları incelenmiştir. (Iijima vd 1996, Yakobson vd 1997). Moleküler dinamik simülasyonu yönteminde her bir molekül ve onun karşılıklı olarak gerçekleştirdiği mekanik ya da kimyasal etkileşimleri dikkate alınmaktadır. Dolayısıyla hesaplamalar oldukça uzun sürmekte ve yöntemin uygulama alanı belirli sayıda atom veya molekül içeren sistemlerle sınırlı olmaktadır. Çeşitli malzemeler üzerinde yapılan mikro burulma (Fleck vd 1994) ve mikro eğilme (Stölken ve Evans 1998, Lam vd 2003, McFarland ve Colton 2005) gibi deneyler sonucunda malzemenin mekanik özelliklerinde boyut etkisinin varlığı tespit edilmiştir. Örneğin,

Fleck vd (1994), ince bakır tellerin burulma testinde tel çapının $170 \mu\text{m}$ 'den $12 \mu\text{m}$ 'ye düşürülmesiyle burulma dayanımının 3 kat arttığını gözlemlemişlerdir. Lam vd (2003) tarafından epoksi kirişlerin eğilme testi gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmalarında kiriş kalınlığı $115 \mu\text{m}$ 'den ve $20 \mu\text{m}$ 'ye düşürüldüğünde normalize edilmiş eğilme rijitliğinin yaklaşık 2,4 kat arttığını tespit etmişlerdir. Benzer biçimde McFarland ve Colton (2005), polipropilen kirişlerin eğilme testinde ölçülen rijitlik değerinin klasik kiriş teorisi ile hesaplanan değerden en az 4 kat daha fazla olduğunu belirtmişlerdir. Ancak, bu boyutlarda her bir malzeme ve farklı koşullar için deneysel çalışma yapmanın çok zor ve pahalı olmasından dolayı son zamanlarda bu boyuttaki yapılar üzerinde çalışan araştırmacılar, sürekli ortam mekaniği yaklaşımlarına yönelmişlerdir. Çubuk, kiriş, plak, membran ve kabuk gibi modellemelerin yapıldığı sürekli ortam mekaniği yaklaşımlarında ise nispeten çok daha kısa sürede gerçekleştirilen sayısal hesaplama ile milyonlarca atom veya molekülden oluşan büyük nano/mikro sistemlerin analizi gerçekleştirilebilmektedir.

Fakat herhangi bir malzeme boyut parametresi içermeyen klasik teoriler ile bu boyut etkisi dikkate alınmamıştır. Bu nedenle, mikro ve nano boyutlu yapıların modellenmesinde malzemeye ait çeşitli sayıda ilave boyut ölçek parametrelerine sahip yüksek mertebeden (klasik olmayan) elastisite teorileri kullanılmaya başlanmıştır. Bu teorilerin en yaygın olanları Cosserat (Mikropolar) elastisite (Eringen 1967), lokal olmayan elastisite (Eringen 1972, 1983), gerilme çifti elastisite (Mindlin ve Tiersten 1962, Koiter 1964, Toupin 1964), yüzey enerjili basit şekil değiştirme değişimi (Vardoulakis ve Sulem, 1995) ve şekil değiştirme değişimi elastisite (Mindlin 1965, Aifantis 1999, Fleck ve Hutchinson 1993, 2001) teorileridir. Sonraları bu teorileri daha basit ve kullanışlı hale getirmek için daha az sayıda ilave malzeme boyut ölçek parametresi içeren değiştirilmiş halleri önerilmiştir. Bunlardan birisi olan değiştirilmiş şekil değiştirme değişimi elastisite teorisi (DŞDD), Lam vd (2003) tarafından geliştirilmiştir. Bu teoride kuvvetlerin ve kuvvetlerin momentlerinin klasik denge denklemlerine ek olarak yüksek mertebeli gerilmeleri ve çiftlerin momentlerinin dengesini yöneten yeni bir ilave denge denklemi ile doğrusal elastik izotropik malzemeler için 2 klasik malzeme parametresine ek olarak 3 ilave malzeme boyut ölçek parametresi bulunmaktadır. Ayrıca, dilatasyon (genleşme) değişimi ve deviatorik uzama değişimi ihmal edildiğinde Yang vd (2002) tarafından önerilen değiştirilmiş gerilme çifti elastisite teorisine (DGÇ) ait yönetici denklemler ve ilgili sınır koşullarına ulaşılır.

Bu doktora tezi kapsamında, yukarıda bahsedilen karbon nanotüp, mikrotüpçükler, grafen plakalar, mikro kirişler ve mikro plaklar gibi yapıların statik ve dinamik analizleri yüksek mertebeden elastisite teorilerine dayalı olarak incelenmiştir. Karbon nanotüpler ve mikrotüpçükler kiriş; grafen plakalar ise plak olarak modellenmiştir. Bir boyutlu yapıların modellenmesinde yaygın olarak kullanılan Bernoulli-Euler ve Timoshenko kiriş teorilerinin yanında sinüzoidal bir kayma deformasyonlu kiriş teorisi kullanılmıştır. Benzer biçimde, iki boyutlu yapıların modellenmesinde yine yaygın olarak kullanılan Kirchhoff ve Mindlin plak teorilerine ek olarak sinüzoidal kayma deformasyonlu plak teorisi de kullanılmıştır. Bu yapıların elastik bir zemin üzerinde olduğu dikkate alınmış ve elastik zemin ile yapılar arasındaki etkileşim bir ve iki parametrelilik elastik zemin modelleri ile simüle edilmiştir. Eğilme, burkulma ve serbest titreşim için yönetici diferansiyel denklemler ve ilgili sınır koşulları varyasyonel ilke ile değiştirilmiş şekil değiştirme değişimi elastisite teorisine dayalı

olarak elde edilmiştir. Bu yapıların eğilme, burkulma ve serbest titreşim davranışları üzerindeki boyut, elastik zemin ve kayma deformasyonu etkilerini belirlemek için detaylı bir parametrik çalışma yapılmıştır. Bunlara ek olarak, fonksiyonel değişimli malzemelerden (FDM) yapılmış kalın mikro kirişlere ait sinüzoidal kayma deformasyonlu kiriş modeli geliştirilmiş olup bu tip homojen olmayan mikro kirişlerin eğilme ve burkulma davranışları da incelenmiştir.

2. KURAMSAL BİLGİLER ve KAYNAK TARAMALARI

Günümüze değin yapılan çalışmalara bakıldığında, mikro ve nano boyutlu yapıların mekanik davranış karakteristikleri bazı deneysel çalışmalar ile atomik seviyede kurulan modellerle belirlenmeye çalışıldığı görülmektedir. Yapılan deneysel çalışmalara örnek olarak Fleck vd (1994) ve Lam vd (2003) tarafından gerçekleştirilen sırasıyla ince bakır tellerin burulma testi ve epoksi kirişlerin eğilme testi verilebilir. Burulma testi sonucunda tel çapının $170 \mu\text{m}$ 'den $12 \mu\text{m}$ 'ye düşürülmesiyle burulma dayanımının 3 kat arttığı gözlemlenmiştir. Eğilme testi neticesinde ise kiriş kalınlığı $115 \mu\text{m}$ 'den ve $20 \mu\text{m}$ 'ye düşürüldüğünde normalize edilmiş eğilme rijitliğinin yaklaşık 2,4 kat arttığı tespit edilmiştir. Diğer taraftan karbon nanotüplerin yapısal davranış özellikleri atomik simülasyon yöntemi ile belirlenmeye çalışılmıştır (Iijima vd 1996). Ancak deneysel çalışmalar için gelişmiş donanıma sahip laboratuvarlara ve çok hassas ekipmanlara ihtiyaç duyulması nedeniyle çalışmaların maliyetleri oldukça yüksek olmaktadır. Ayrıca, atomik düzeydeki yaklaşımlarda (atomistik, hibrid atomistik-sürekli mekanik, moleküler dinamik benzetimi gibi) her bir molekül ve onun karşılıklı olarak gerçekleştirdiği mekanik ya da kimyasal etkileşimleri dikkate alınmaktadır. Dolayısıyla hesaplamalar oldukça uzun sürmekte ve yöntemin uygulama alanı belirli sayıda atom veya molekül içeren sistemlerle sınırlı kalmaktadır. Bu nedenle bu konu ile ilgilenen araştırmacılar kiriş, plak ve kabuk şeklinde modellemelerin yapıldığı sürekli ortam mekaniği yaklaşımlarına yönelmişlerdir. Bu yaklaşımlara ait literatürdeki mevcut bazı önemli çalışmalar özet halde kronolojik olarak aşağıda sunulmuştur.

Papargyri-Beskou vd (2003a), yüzey enerjili basit şekil değiştirme değişimi elastisite teorisine (Vardoulakis ve Sulem 1995) göre Bernoulli-Euler kiriş modeline ait eğilme ve burkulma analizlerini yapmışlardır. Yönetici denklemleri elde ederken varyasyonel bağıntı ve temel denklemlerden faydalanmışlardır. Düzgün yayılı yük altında bir ucu ankastre mesnetli diğer ucu serbest bir kirişe ait eğilme davranışını ve her iki ucu basit mesnetli kirişin burkulma davranışını incelemişlerdir. İlave değişim katsayısının değeri arttıkça kirişin deplasman değerlerinin azaldığını fakat bu değer artmasıyla kritik burkulma yükü değerinin arttığını ifade etmişlerdir.

Papargyri-Beskou vd (2003b) ise yine aynı teoriye göre Bernoulli-Euler kiriş modelinin dinamik analizini gerçekleştirmişlerdir. Yönetici denklemleri ve ilgili sınır koşullarını varyasyonel ilke yardımıyla elde etmişlerdir. Bu çalışmalarında sonsuz uzunluktaki bir kirişe ait dalga yayılımını, her iki ucu basit mesnetli bir kiriş için serbest titreşim, bir ucu ankastre diğer ucu serbest kiriş için de zorlanmış titreşim durumlarını incelemişlerdir. Zorlanmış titreşim durumunda çözümü Laplace dönüşümü yardımıyla gerçekleştirmişlerdir. Dalga yayılımının klasik teoriden farklı bir karakteristiğe sahip olduğunu ve doğal frekans değerlerinin değişim katsayısının artmasına bağlı olarak arttığını belirtmişlerdir. Bunlara ilave olarak yüksek modlarda bu katsayının daha fazla etkiye sahip olduğunu vurgulamışlardır.

Peddieson vd (2003), lokal olmayan elastisite teorisine dayanarak Bernoulli-Euler kiriş modeline ait yönetici denklemleri çıkartmışlardır. Her iki ucu basit mesnetli ve bir ucu ankastre diğer ucu serbest kirişler için eğilme problemini dikkate almışlardır. Lokal olmayan etkilerin özellikle nanometre boyutlarındaki yapıların üzerinde çok önemli etkilere sahip olduklarını vurgulamışlardır.

Park ve Gao (2006), değiştirilmiş gerilme çifti (DGÇ) elastisite teorisini (Yang vd 2002) Bernoulli-Euler kirişine uygulamışlardır. Minimum toplam potansiyel enerji ilkesi yardımıyla yönetici denklemleri elde etmişlerdir. Bu yönetici denklemler klasik teoriye benzer biçimde dördüncü mertebeden olmaktadır. Fakat klasik teoriden farklı olarak kirişin eğilme rijitliği ilave malzeme parametresine bağlı olarak artmaktadır. Serbest ucunda statik tekil bir yüke maruz konsol bir mikro kirişin eğilme problemini dikkate almışlardır. İlave boyut parametresinin eğilme davranışı üzerine olan etkisini inceleyerek sonuçları grafiksel halde sunmuşlardır. İlave boyut parametresi değerinin artmasıyla deplasman değerlerinin azaldığını ve bununla birlikte kiriş kalınlığının küçük olduğu durumlarda DGÇ ile elde edilen deplasman değerleri ile klasik teoriye bağlı değerler arasındaki farkın önemli olduğunu tespit etmişlerdir.

Reddy (2007), lokal olmayan elastisite teorisine (Eringen 1983) göre her iki ucu basit mesnetli bir kirişin eğilme, burkulma ve titreşim analizlerini gerçekleştirmiştir. Modellemede Bernoulli-Euler, Timoshenko, Reddy ve Levinson kiriş teorilerini kullanmıştır. Elde ettiği sonuçları boyutsuz biçimde karşılaştırmalı olarak tablolar halinde sunmuştur. Bu sonuçlara göre lokal olmayan parametrenin değeri arttıkça eğilmede deplasman değerleri artmakta iken burkulma yükü ve doğal frekans değerleri azalmaktadır.

Papargyri-Beskou ve Beskos (2008), yüzey enerjili basit şekil değiştirme değişimi elastisite teorisine göre ince plakların eğilme, titreşim ve burkulma problemini incelemişlerdir. Kirchhoff plak teorisine göre klasik durumdan farklı olarak yönetici denklemleri altıncı mertebeden elde etmişlerdir. Bütün kenarları basit mesnetli dikdörtgen bir plak için statik ve dinamik analizleri gerçekleştirmişlerdir. İlave malzeme parametresinden dolayı plak eğilme rijitliğinin arttığını ve buna bağlı olarak eğilmede deplasman değerleri azalırken kritik burkulma ve doğal frekans değerlerinin arttığını gözlemlemişlerdir.

Reddy ve Pang (2008), karbon nanotüpü lokal olmayan Bernoulli-Euler ve Timoshenko kiriş teorileri ile modelleyerek statik ve dinamik analizlerini yapmışlardır. Her iki ucu basit mesnetli, her iki ucu ankastre mesnetli, bir ucu ankastre mesnetli diğer ucu serbest ve bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli olmak üzere dört farklı durum için sonuç elde etmişlerdir. Bu sonuçlar incelendiğinde lokal olmayan ve kayma deformasyonu parametreleri değerleri arttığında bir ucu ankastre diğer ucu serbest kiriş hali dışında diğer durumlar için eğilmede deplasman değerleri artmakta, burkulma yükü ve doğal frekans değerleri ise tüm durumlar için azalmaktadır.

Kong vd (2008) tarafından DGÇ teorisi ile Bernoulli-Euler kiriş modelinin Hamilton prensibi yardımıyla serbest titreşim analizi gerçekleştirilmiştir. Her iki ucu basit mesnetli ve bir ucu ankastre diğer ucu serbest durumları için doğal frekans değerleri elde etmişlerdir. Her iki durum için de ilave boyut parametresi değerinin artmasıyla doğal frekans değerlerinin de arttığını göstermişlerdir.

Ma vd (2008) ise DGÇ teorisine dayalı her iki ucu basit mesnetli Timoshenko kiriş modeline ait eğilme ve titreşim analizlerini gerçekleştirmişlerdir. Formülasyonda Hamilton prensibini kullanmışlardır. Ayrıca denklemlerde Poisson etkisini de dikkate almışlar ve Poisson etkisinin deplasman, dönme ve doğal frekans değerleri üzerinde

etkili olduğunu belirlemişlerdir. DGÇ teorisine göre elde edilen deplasman ve dönme değerlerinin klasik teoriye göre daha az olduğunu ancak doğal frekans değerlerinin daha yüksek olduğunu tespit etmişlerdir.

Kong vd (2009), Bernoulli-Euler kiriş teorisine göre eğilme ve titreşim analizlerini gerçekleştirmişlerdir. Değiştirilmiş şekil değiştirme değişimi (DŞDD) elastisite teorisine (Lam vd 2003) dayalı mikro kirişe ait yönetici denklemleri ve sınır koşullarını temel denklemler ve varyasyonel ifade yardımıyla elde etmişlerdir. Epoksiden yapılmış bir ucu ankastre mesnetli diğer ucu serbest kirişin statik yoğunlaştırılmış uç yük altındaki eğilme davranışını ve serbest titreşim hareketini incelemişlerdir. Elde ettikleri sonuçları DGÇ ve klasik teori sonuçlarıyla karşılaştırmışlar ve kiriş boyutlarının artmasıyla sonuçlar arasındaki farkın neredeyse kaybolduğunu ortaya koymuşlardır.

Lazopoulos (2009), yüzey enerjili basit şekil değiştirme elastisite teorisini Kirchhoff plak teorisine uygulayarak mikro plakların eğilme davranışını incelemiştir. Yönetici denklemleri ve sınır koşullarını varyasyonel ifade ile çıkartmıştır. Papargyri-Beskou ve Beskos (2008) çalışmalarından farklı olarak yönetici denklemlere ilave malzeme parametresinin plak kalınlığına oranı şeklindeki terimi ilave etmiştir. Bu terimin özellikle plak kalınlığının küçük ve ilave malzeme parametresinin bu plak kalınlığına yakın değerlerde olması durumunda önemli bir etkiye sahip olduğunu vurgulamıştır.

Murmu ve Pradhan (2009), lokal olmayan elastisite teorisi ile boyut etkisini dikkate alarak, tek katmanlı karbon nanotüpün elastik bir zemin üzerindeki burkulma analizini gerçekleştirmişlerdir. Bu çalışmada, karbon nanotüp kiriş biçiminde modellenmiş ve bu aşamada Timoshenko kiriş teorisi kullanılmıştır. Elastik zeminin modellenmesinde hem Winkler hem de Pasternak tipi zemin modelleri uygulanmıştır. Elde edilen yönetici denklemler, her iki ucun basit mesnetli olması durumu için diferansiyel kuadratür yöntemiyle çözülmüştür. Sonuç olarak, hem uzunluk/çap değerindeki hem de boyut parametresi değerindeki artışa bağlı olarak kritik burkulma yükü değerlerinin azaldığı, Winkler ve Pasternak zemin parametreleri değerlerinin artmasıyla kritik burkulma yükü değerlerinin arttığı tespit edilmiştir. Ayrıca, uzunluk/çap oranının küçük olduğu durumlarda boyut parametresinin kritik burkulma yükü üzerindeki etkisinin önemli olduğu ve bu oranın artmasıyla etkisinin neredeyse kaybolduğu vurgulanmıştır.

Pradhan ve Phadikar (2009) tarafından çok katmanlı grafen plakaların serbest titreşim analizlerini lokal olmayan elastisite teorisine dayalı olarak gerçekleştirmişlerdir. Grafen plakaların polimer bir matris içerisinde olduğunu dikkate alarak bunları ortotropik ince plak gibi modellemişlerdir. Titreşimde, lokal olmayan etkinin yüksek modlarda daha etkin olduğunu, ayrıca polimer matrisin rijitliği arttıkça lokal olmayan etkilerin azaldığını ve kayma tabakasının etkisinin Winkler tabakasından daha fazla olduğunu belirtmişlerdir.

Tsiatas (2009) tarafından DGÇ teorisiyle mikro plakların Kirchhoff plak teorisine göre modellenmesi yapılmıştır. Yönetici denklemleri ve sınır koşullarını minimum toplam potansiyel enerji ilkesi yardımıyla çıkartmıştır. Çeşitli sınır

koşullarındaki dikdörtgensel ve eliptik plakların eğilme analizlerini yaparak ilave boyut parametresinin davranış üzerine etkisini incelemiştir. İlave malzeme parametresinin artmasıyla plağın deplasman değerlerinin azaldığını ve bunun sadece Poisson oranına bağlı olduğunu ifade etmiştir. Bununla birlikte, bu değişimin plağın sınır koşullarından ve en/boy oranından tamamen bağımsız olduğunu vurgulamıştır. Poisson oranının artmasının deplasman değerlerinin azalmasına neden olduğunu belirtmiştir.

Asghari vd (2010) tarafından DGÇ teorisini kullanarak fonksiyonel değişimli malzemedeki yapılmış mikro boyutlu kirişlerin statik eğilme ve serbest titreşim analizleri gerçekleştirilmiştir. Bernoulli-Euler kiriş teorisine göre eğilmede bir ucu ankastre diğer ucu serbest bir mikro kiriş için çözüm elde edilmiş olup serbest titreşim problemi için ise mikro kirişin hem bir ucu ankastre mesnetli diğer ucu serbest hem de iki ucu basit mesnetli olması durumlarına ait çözüm gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın sonucunda, ele alınan kirişin kalınlığı ile ilave malzeme boyut parametresi arasındaki oranın bire yakın olduğu durumlarda hem eğilme hem de titreşim durumu için ulaşılan sonuçlar ile klasik sonuçlar arasında önemli bir fark bulunduğu tespit edilmiştir. Bunun dışında, mikro kirişin doğrusal homojen olması durumundaki gibi bu oranın artmasıyla sonuçlar arasındaki farkın da giderek azaldığına dikkat çekilmiştir. Aynı yazarlar tarafından yapılan bir başka çalışmada aynı analizler bu kez Timoshenko kiriş teorisini kullanarak gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçlar Bernoulli-Euler kirişine ait sonuçlarla karşılaştırılabilir olarak şekiller yardımıyla gösterilmiş ve bu değerler arasındaki fark irdelenmiştir (Asghari vd 2011).

Fu ve Zhang (2010) mikrotüpçüğü Timoshenko kiriş modeliyle DGÇ teorisine göre modellemiştir. Minimum toplam potansiyel enerji ilkesi yardımıyla eğilme ve burkulmaya ait denklemleri çıkartmışlardır. Mikrotüpçüğün visko-elastik bir zemin içerisinde olması halinde, ilave malzeme parametresinin kararlılık boyu, burkulma artış oranı ve burkulma genliği üzerindeki etkisini irdelenmiştir. Sonuç olarak, ilave malzeme parametresinin çeşitli değerleri için uzun mikrotüpçüklerin kararlılık boyunun diğer lokal olmayan modellerdekinden farklı olduğunu ve ilave malzeme parametresinin değerinin artmasıyla burkulma genliğinin azaldığını belirtmişlerdir.

Heireche vd (2010) tarafından mikrotüpçüklerin titreşimi yerel olmayan elastisite teorisine bağlı olarak incelenmiştir. Mikrotüpçüklerin sürekli ortam modellenmesinde Timoshenko kiriş teorisini kullanılmıştır. Yerel olmayan parametre, kayma deformasyonu ve mikrotüpçüğün anizotropik yapısının doğal frekans değerleri üzerindeki etkilerini araştırmışlardır.

Lazopoulos ve Lazopoulos (2010) da yukarıdaki teoriyi kullanarak Bernoulli-Euler kirişi için eğilme ve burkulma analizi yapmışlardır. Fakat Papargyri-Beskou vd (2003)'ten farklı olarak yönetici denklemlerde enkesit alanından dolayı oluşan terimleri de dikkate almışlardır. Elde ettikleri sonuçlara göre bu terimlerin kiriş kalınlığının azalmasıyla daha önemli hale geldiğini belirtmişlerdir.

Pradhan ve Kumar (2010), çeşitli sınır koşullarındaki tek katmanlı ortotropik grafen plakaların elastik zemin üzerindeki titreşim analizlerini yapmışlardır. Yönetici denklemlerin çıkartılmasında ve çözümünde lokal olmayan elastisite ve Kirchhoff plak teorisini ile diferansiyel kuadratür yöntemini kullanmışlardır. Elastik zemini, Winkler ve

Pasternak zemin modelleri olarak hesaba dahil etmişlerdir. Lokal olmayan etkilerin elastik zemine bağlı olduğunu ve elastik zeminin rijitliği arttıkça bu etkilerin azaldığını belirtmişlerdir. Buna ilave olarak, grafen plakının boyutlarının azalmasıyla lokal olmayan etkilerin arttığı sonucuna varmışlardır.

Wang vd (2010) ise bir mikro kirişin eğilme ve titreşim analizini DŞDD teorisine dayalı Timoshenko kiriş modelini oluşturmuşlardır. Poisson etkisini de dikkate alarak her iki ucu basit mesnetli mikro kiriş için çözüm elde etmişlerdir. Çözümde Fourier serisi açılımını kullanmışlardır. Elde ettikleri sonuçları, DGÇ ve klasik sonuçlarla karşılaştırmışlardır. Deplasman ve dönme değerlerinin DGÇ teorisi sonuçlarından da küçük ve doğal frekans değerlerinin de DGÇ teorisine kıyasla daha büyük olduğunu tespit etmişlerdir. Ayrıca, Poisson etkisinin de klasik Timoshenko kiriş modelinden farklı olduğunu vurgulamışlardır.

Akgöz ve Civalek (2011a) tarafından ise DŞDD ve DGÇ teorilerine dayalı bir mikro kirişin burkulma problemi incelenmiştir. Bernoulli-Euler kiriş modeline göre her iki ucu basit mesnetli ve bir ucu ankastre diğer ucu serbest durumlar için burkulma yükü değerleri elde etmişlerdir. Elde ettikleri sonuçları hem grafiksel hem de sayısal olarak sunmuşlardır. İlave boyut parametrelerinin burkulma davranışı üzerindeki etkilerini irdelemişlerdir. Bu parametrelerin değerleri arttıkça burkulma yükü değerlerinin de artmakta olduğunu ve kiriş boyutlarının artmasıyla üç model arasındaki farkın giderek azaldığını belirtmişlerdir.

Akgöz ve Civalek (2011b), DŞDD teorisini mikrotüpçüğün burkulma analizine uygulamışlardır. Mikrotüpçüğü, Bernoulli-Euler kiriş teorisine göre modellemişlerdir. Her iki ucu basit mesnetli durum için elde edilen sonuçlar hem grafiksel hem de sayısal olarak tablolar halinde sunulmuştur. Bu sonuçları lokal olmayan elastisite, DGÇ ve klasik sonuçlarla karşılaştırmışlardır. DGÇ ile elde edilen sonuçların yüksek modlarda ve mikrotüpçüğün boyunun kısa olması durumlarında klasik sonuçlara yakın olduğunu tespit etmişlerdir. Bu nedenle böyle durumlar için DŞDD teorisinin daha uygun ve gerçeğe yakın sonuçlar verebileceğini vurgulamışlardır.

Ansari vd (2011), Timoshenko kiriş teorisine göre homojen olmayan mikro kirişe ait yönetici denklemleri DŞDD teorisine dayalı elde etmişler ve her iki ucu basit mesnetli durum için serbest titreşim problemini çözmüşlerdir. Elde ettikleri sonuçları DGÇ ve klasik sonuçlar ile karşılaştırmışlardır. Bernoulli-Euler kiriş teorisindeki sonuçlara benzer olarak bu teoriye göre elde edilen boyutsuz frekans değerlerinin DGÇ ve klasik teorilerdeki değerlerden daha büyük olduğunu belirtmişlerdir.

Jomehzadeh vd (2011) ise Kirchhoff plak teorisine göre mikro plakların DGÇ teorisine dayalı titreşim analizini gerçekleştirmişlerdir. Harekete ait yönetici denklemleri Hamilton prensibi yardımıyla türetmişlerdir. Plak geometrisinin dikdörtgen ve dairesel olması durumlarını göz önüne almışlardır. Farklı sınır koşullarında, çeşitli ilave malzeme parametresi ve en/boy değerleri için doğal frekanslar ait sonuçlar elde etmişlerdir. Elde ettikleri sonuçları hem grafiksel hem de tablolar halinde karşılaştırmalı olarak sunmuşlardır. Plak kalınlığı/boy oranının küçük olduğu durumlarda boyut etkisinin önemli olduğunu ifade etmişlerdir.

Ma vd (2011) tarafından yapılan çalışmada, mikro plakların DGÇ teorisine dayalı olarak Mindlin plak teorisine göre Hamilton prensibi yardımıyla hareket denklemi çıkartılmıştır. Bütün kenarları basit mesnetli olan plak için statik eğilme ve serbest titreşim problemlerini incelemiştir. Yeni modele göre hesaplanan deplasman ve dönme değerlerinin, plak kalınlığının küçük olması durumunda klasik Mindlin plak teorisinden daha küçük olduğu, doğal frekans değerlerinin ise daha büyük olduğunu belirtmişlerdir. Bunun haricinde, plak kalınlığının artması halinde aradaki farkın giderek azaldığını da vurgulamışlardır.

Reddy (2011), Bernoulli-Euler ile Timoshenko kiriş teorilerine ve DGÇ teorisine göre fonksiyonel değişimli malzemelerden imal edilmiş mikro kirişin eğilme, burkulma ve titreşim hallerine ait yönetici denklemleri türetmiştir.

Samaei vd (2011), tek katmanlı grafen plakaların burkulma analizini lokal olmayan elastisite ve Mindlin plak teorisini kullanarak gerçekleştirmişlerdir. Grafen plakaların elastik bir zemin üzerinde olduğunu Pasternak zemin modelini kullanarak dikkate almışlardır. Bu duruma ait yönetici denklemleri çıkartarak tüm kenarları basit mesnetli tek katmanlı grafen plaka için burkulma problemini analitik olarak çözmüşlerdir. Elde ettikleri sonuçları, grafiksel formda boyutsuz burkulma yükü oranının (lokal olmayan boyutsuz burkulma yükünün lokal (klasik) boyutsuz burkulma yüküne oranı) değişimi şeklinde sunmuşlardır. Grafen plakanın boyunun artmasıyla bütün burkulma modları için bu oranın arttığını ve mod sayısı arttıkça da bu oranın azaldığını göstermişlerdir. Ayrıca, hem Winkler hem de kayma parametresi değerlerindeki artışın bu oranda azalmaya neden olduğunu belirtmişlerdir.

Shen (2011), iki-parametrelili bir zemin içerisindeki mikrotüpçüklerin lokal olmayan elastisite teorisine dayalı lineer olmayan titreşimini incelemiştir. Formüllerin çıkartılmasında von Kármán–Donnell tipi kabuk eleman kullanmıştır. Mikrotüpçüklerin doğal frekans değerlerinin lokal olmayan parametreden dolayı azaldığını ve ayrıca sınır koşullarının hareketli ve hareketsiz olmasının, mikrotüpçüğün lineer olmayan titreşim durumu üzerinde küçük bir etkiye sahip olduğunu tespit etmiştir.

Wang vd (2011) yukarıdaki teoriye göre mikro boyuttaki ince plakların eğilme, burkulma ve titreşim analizlerini Kirchhoff plak teorisi yardımıyla gerçekleştirmişlerdir. Yönetici denklemlere ve sınır koşullarına minimum toplam potansiyel enerji ilkesi yardımıyla ulaşmışlardır. Analizlerde bütün kenarları basit mesnetli dikdörtgen bir plaka kullanmışlardır. Plak kalınlığının ilave malzeme parametrelerine yakın değerlerde olduğu durumlarda bu teoriye göre elde edilen sonuçların DGÇ ve klasik teoriye göre elde edilen sonuçlardan çok farklı olduğunu ifade etmişlerdir. Bununla birlikte plak kalınlığının ilave malzeme parametresinden yaklaşık 15 kat olması halinde artık boyut etkisinin çok fazla önemli olmadığını vurgulamışlardır. Oluşturulan bu modelin genel bir hali yansıttığı düşünülebilir. Çünkü üç tane ilave malzeme parametresi içermekte olup bunlardan iki tanesinin çıkartılmasıyla DGÇ' ye ait modele ve ilave malzeme parametrelerinin hepsinin sıfır alınmasıyla da klasik modele ulaşılır.

Akgöz ve Civalek (2012a), DŞDD teorisine dayalı mikro kirişlerin eğilme analizlerini ayrıntılı bir biçimde incelemiştir. Yönetici denklemleri ve sınır koşullarını varyasyonel ilke yardımıyla elde etmişlerdir. Modellemede Bernoulli-Euler

kiriş teorisini kullanmışlar ve ayrıca analizlerde Poisson etkisini de hesaba katmışlardır. Sınır koşullarına bağlı olarak dört farklı durum için eğilme ve dönme problemlerini analitik olarak çözmüşlerdir. Poisson etkisinin Bernoulli-Euler kirişi için de değişik bir karakteristiğe sahip olduğunu vurgulamışlardır.

Kahrobaiyan vd (2012) tarafından yapılan çalışmada, fonksiyonel değişimli mikro kirişin DŞDD teorisine ait yönetici denklemler Bernoulli-Euler kiriş teorisine göre türetilmiştir. Her iki ucu basit mesnetli kirişe ait eğilme ve serbest titreşim problemi incelenmiştir. Sonuçlar, DGÇ ve klasik teoriye ait sonuçlarla birlikte karşılaştırmalı olarak verilmiştir. DGÇ ile oluşturulan kiriş modelinin klasik kiriş modelinden daha rijit olduğu ve yeni oluşturulan modelin de DGÇ modeline göre daha rijit olduğu vurgulanmak istenmiştir. Buradan, ilave malzeme boyut parametrelerinin sayısında ve değerindeki artışa paralel olarak ele alınan elemanın rijitliğinin de artmakta olduğu yorumlanabilir.

Nateghi vd (2012), DGÇ teorisine dayalı olarak Bernoulli-Euler, Timoshenko ve Reddy mikro kiriş modellerine ait burkulma problemi için yönetici denklemleri ve ilgili sınır koşullarını minimum toplam potansiyel enerji ilkesi yardımıyla elde etmişlerdir. Çeşitli mesnet koşulları altında fonksiyonel değişimli mikro kirişlerin burkulma yükü değerlerini DGÇ teorisine dayalı olarak genelleştirilmiş diferansiyel quadratür yöntemiyle hesaplamışlardır.

Salamat-talab vd (2012) tarafından DGÇ teorisine dayalı olarak Reddy mikro kiriş modeline ait eğilme ve titreşim problemleri için yönetici denklemler türetilmiştir. İki ucu basit mesnetli fonksiyonel değişimli mikro kirişlerin deplasman ve doğal frekans değerlerini parametrik olarak incelemişlerdir. Boyut etkisine bağlı olan frekans değerlerinin klasik frekans değerlerinden daha büyük olduğunu ve yüksek modlarda bu boyut etkisinin daha da önemli hale geldiğini belirtmişlerdir.

Thai ve Vo (2012) tarafından lokal olmayan elastisite teorisine göre bir nanokirişin eğilme, burkulma ve serbest titreşim analizleri gerçekleştirilmiştir. Modellemede Timoshenko kiriş teorisindeki gibi bir kayma düzeltme katsayısına gereksinim duymaksızın kayma deformasyonlarının etkisini de kirişin davranışına dahil edebilen trigonometrik fonksiyonlara dayalı kiriş teorisi (Touratier 1991) kullanılmıştır. Ulaşılan sonuçlar, sayısal ve grafiksel olarak sunulmuş ve diğer teorilere göre elde edilen sonuçlarla karşılaştırma yapılmıştır. Bu değerlendirmeye bağlı olarak, sonuçlar arasında iyi bir uyum olduğu belirtilmiştir.

Şimşek ve Reddy (2013a, 2013b), DGÇ teorisine dayalı fonksiyonel değişimli malzemeden yapılmış mikro kirişlerin eğilme, serbest titreşim ve burkulma analizlerini gerçekleştirmişlerdir. Yönetici denklemleri ve sınır koşullarını Hamilton ve minimum toplam potansiyel ilkelerini kullanarak elde etmişlerdir. Modellemede çeşitli kiriş teorileri kullanmışlardır. Malzeme boyut ölçek parametresinin, boy/en oranının, kayma deformasyonunun mikro kirişlerin mekanik davranışları üzerindeki etkilerini incelemişlerdir.

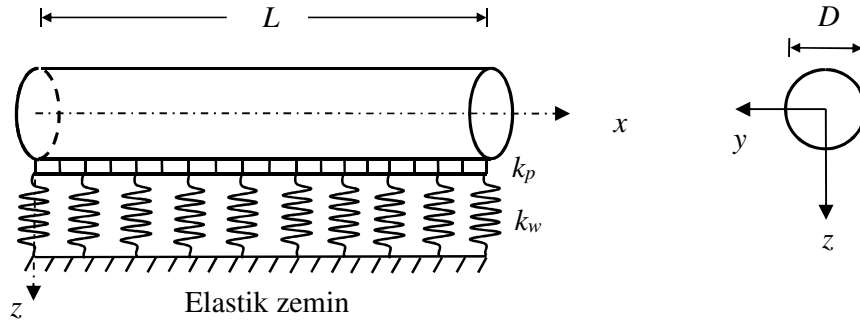
Şimşek ve Yurtçu (2013), yerel olmayan elastisite teorisine dayalı olarak fonksiyonel değişimli nano kirişlerin eğilme ve burkulma davranışlarını incelemişlerdir.

Modellemede Bernoulli-Euler ve Timoshenko kiriş teorilerini kullanmışlardır. Yönetici denklemler ve ilgili sınır koşulları minimum toplam potansiyel enerji ilkesini kullanarak elde etmişlerdir. Yerel olmayan elastisite teorisine bağlı elde edilen deplasman değerlerinin klasik sonuçlardan daha büyük ve burkulma yükü değerlerinin ise klasik sonuçlardan daha az olduğunu vurgulamışlardır.

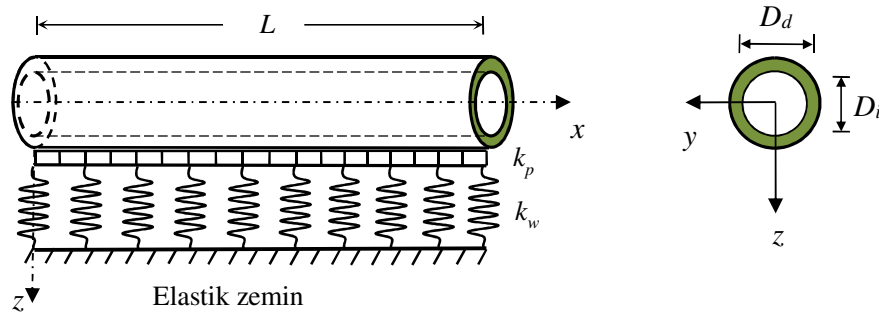
Yukarıdaki çalışmalardan görüldüğü üzere mikrotüpçük, karbon nanotüp ve grafen plaka gibi mikro ve nano boyutlu yapıların modellenmesinde genelde lokal (yerel) olmayan elastisite teorisi ile Bernoulli-Euler, Timoshenko kiriş ve Kirchhoff plak teorileri kullanılmıştır. Değiştirilmiş gerilme çifti (DGÇ) ve değiştirilmiş şekil değiştirme değişimi (DŞDD) elastisite teorileri nispeten daha yeni teoriler olduklarından bu teorilere dayalı yapılan çalışmalar literatürde sınırlı sayıdadır. Ayrıca, bu teorilere dayalı kayma deformasyonunu ve elastik zemin etkisini dikkate alan yüksek mertebeden kiriş ve plak modelleri ile ilgili literatürde önemli bir boşluğun yer aldığı söylenebilir.

3. MATERİYAL ve METOT

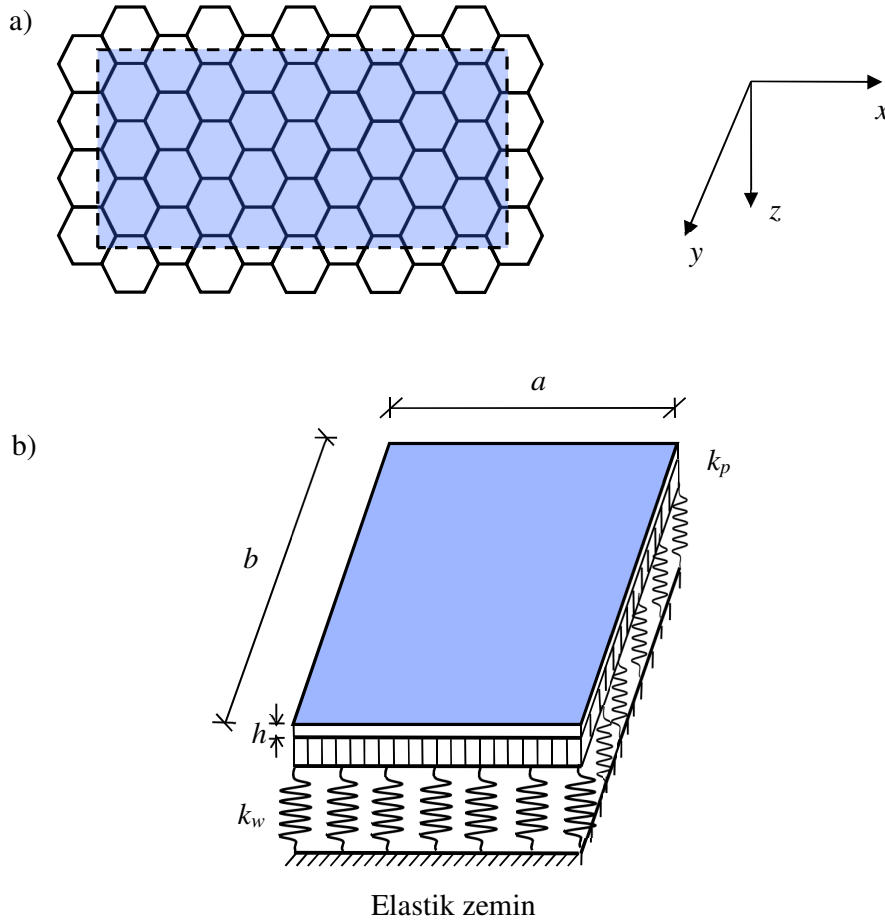
Daha önceden de belirtildiği üzere karbon nanotüpler ve mikrotüpçükler kiriş; grafen plakalar ise plak olarak modellenmiştir. Şekiller 3.1–3.3'te bu yapıların kiriş ve plak olarak modellenmeleri görülmektedir. Bir boyutlu yapıların modellenmesinde yaygın olarak kullanılan Bernoulli-Euler ve Timoshenko kiriş teorilerinin yanında sinüzoidal bir kayma deformasyonlu kiriş teorisi kullanılmıştır. Benzer biçimde, iki boyutlu yapıların modellenmesinde yine yaygın olarak kullanılan Kirchhoff ve Mindlin plak teorilerine ek olarak sinüzoidal kayma deformasyonlu plak teorisi de kullanılmıştır. Bu yapıların elastik bir zemin üzerinde olduğu dikkate alınmış ve elastik zemin ile yapılar arasındaki etkileşim Winkler ve Pasternak elastik zemin modelleri ile hesaba katılmıştır. Eğilme, burkulma ve serbest titreşim için yönetici diferansiyel denklemler ve ilgili sınır koşulları varyasyonel ilke yardımıyla değiştirilmiş şekil değiştirme değişimi elastisite teorisine dayalı olarak elde edilmiştir. Eğilme, burkulma ve serbest titreşim için analitik çözümler Navier çözüm yöntemi ile elde edilmiştir.



Şekil 3.1. İki-parametrelilik elastik zemin üzerindeki tek katmanlı karbon nanotüpün kiriş modeli



Şekil 3.2. İki-parametrelilik elastik zemin üzerindeki mikrotüpçüğün kiriş modeli



Şekil 3.3. a) Grafen plakanın sürekli plak biçiminde modellenmesi b) İki-parametrelili elastik zemin üzerindeki tek katmanlı grafen plaka

3.1. Değiştirilmiş Şekil Değiştirme Değişimi (DŞDD) Elastisite Teorisi

Kuvvetlerin ve kuvvetlerin momentlerinin klasik denge denklemlerine ek olarak yüksek mertebeli gerilmeleri ve çiftlerin momentlerinin dengesini yöneten yeni bir ilave denge denklemi içeren değiştirilmiş şekil değiştirme değişimi elastisite teorisi (DŞDD), Lam vd (2003) tarafından sunulmuştur. Bu teorinin yönetici denklemlerinde, doğrusal elastik izotropik malzemeler için 2 klasik malzeme parametresinin (λ ve μ) yanında 3 ilave malzeme boyut ölçek parametresi bulunmaktadır. Bu teoriye göre toplam şekil değiştirme enerji yoğunluğu u_s (Mindlin 1965, Lam vd 2003)

$$u_s = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \mu \left(\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + l_0^2 \gamma_i \gamma_i + l_1^2 \eta_{ijk}^{(1)} \eta_{ijk}^{(1)} + l_2^2 \chi_{ij}^s \chi_{ij}^s \right) \quad (3.1)$$

şeklinde ifade edilebilmektedir. Doğrusal elastik malzemeler için toplam şekil değiştirme enerjisi U

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \left(\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + p_i \gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)} \eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij}^s \chi_{ij}^s \right) dA dx \quad (3.2)$$

halinde yazılabilir. Burada ε_{ij} , γ_i , $\eta_{ijk}^{(1)}$ and χ_{ij}^s sırasıyla şekil değiştirme tansörü $\boldsymbol{\varepsilon}$, dilatasyon (genleşme) değişimi vektörü $\boldsymbol{\gamma}$, deviatorik uzama değişimi tansörü $\boldsymbol{\eta}^{(1)}$ ve simetrik dönme değişimi tansörü $\boldsymbol{\chi}^s$ 'nin bileşenleri olup aşağıda görüldüğü gibi tanımlanabilirler:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.3)$$

$$\gamma_i = \varepsilon_{mm,i} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \eta_{ijk}^{(1)} = & \frac{1}{3}(\varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j} + \varepsilon_{ij,k}) - \frac{1}{15}[\delta_{ij}(\varepsilon_{mm,k} + 2\varepsilon_{mk,m}) \\ & + \delta_{jk}(\varepsilon_{mm,i} + 2\varepsilon_{mi,m}) + \delta_{ki}(\varepsilon_{mm,j} + 2\varepsilon_{mj,m})] \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\chi_{ij}^s = \frac{1}{2}(\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) \quad (3.6)$$

$$\theta_i = \frac{1}{2}e_{ijk}u_{k,j} \quad (3.7)$$

Ayrıca, u_i ve θ_i sırasıyla deplasman vektörü \mathbf{u} ve dönme vektörü $\boldsymbol{\theta}$ 'nin bileşenleri, δ_{ij} ve e_{ijk} ise sırasıyla Kronecker delta ve permutasyon sembolleri olup

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (3.8)$$

$$e_{ijk} = \begin{cases} +1, & (i,j,k) = (1,2,3), (2,3,1) \text{ ya da } (3,1,2) \\ -1, & (i,j,k) = (1,3,2), (3,2,1) \text{ ya da } (2,1,3) \\ 0, & i = j \text{ ya da } j = k \text{ ya da } i = k \end{cases} \quad (3.9)$$

şeklinde ifade edilebilirler. Denklem (3.2)'deki klasik $\boldsymbol{\sigma}$ ve yüksek mertebeden gerilme tansörlerinin \mathbf{p} , $\boldsymbol{\tau}$ ve \mathbf{m}^s bileşenleri, toplam şekil değiştirme enerji yoğunluğunun ilgili şekil değiştirmelere göre türevlerinin alınması sonucu şöyle elde edilebilir.

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial u_s}{\partial \varepsilon_{ij}} = \lambda \varepsilon_{mm} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (3.10)$$

$$p_i = \frac{\partial u_s}{\partial \gamma_i} = 2\mu l_0^2 \gamma_i \quad (3.11)$$

$$\tau_{ijk}^{(1)} = \frac{\partial u_s}{\partial \eta_{ijk}^{(1)}} = 2\mu l_1^2 \eta_{ijk}^{(1)} \quad (3.12)$$

$$m_{ij}^s = \frac{\partial u_s}{\partial \chi_{ij}^s} = 2\mu l_2^2 \chi_{ij}^s \quad (3.13)$$

Denklemler (3.11–3.13)'teki l_0 , l_1 ve l_2 yapının deformasyon davranışı üzerindeki boyut etkisinin dikkate alınabilmesini sağlayan ilave malzeme boyut ölçek

parametreleridir. λ ve μ Lamé sabitleri olup elastisite modülü (E) ve Poisson oranı (ν) cinsinden

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.14,3.15)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca, yukarıdaki denklemlerde ilave malzeme boyut ölçek parametrelerinden ilk ikisi (l_0 ve l_1) sıfır alındığında değiştirilmiş gerilme çifti elastisite teorisine (DGC) (Yang vd 2002) ait bağıntılara ulaşılmış olunur.

3.1.1. Mikro kiriş modelleri

3.1.1.1. Bernoulli-Euler mikro kiriş modeli

Bernoulli-Euler kiriş teorisine göre başlangıçta düz bir kirişin deplasman bileşenleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$u_1(x, z, t) = u(x, t) - z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad (3.16)$$

$$u_2(x, z, t) = 0 \quad (3.17)$$

$$u_3(x, z, t) = w(x, t) \quad (3.18)$$

burada u_1 , u_2 ve u_3 sırasıyla deplasman vektörünün x , y ve z bileşenlerini, u ve w tarafsız eksen üzerindeki herhangi bir noktanın boyuna ve enine deplasmanlarını belirtmektedir. Denklemler (3.16–3.18)'in, Denklem (3.3)'te kullanılması ile şekil değiştirme bileşenlerine

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.19)$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.20)$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.21)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0 \quad (3.22)$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.23)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0 \quad (3.24)$$

ve Denklemler (3.19–3.24) ve Denklem (3.4)'ten, dilatasyon (genleşme) değişimi vektörü bileşenlerine

$$\gamma_1 = \frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad (3.25)$$

$$\gamma_2 = \frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} = 0 \quad (3.26)$$

$$\gamma_3 = \frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.27)$$

ulaşılır. Benzer biçimde Denklemler (3.19–3.24)'ün Denklem (3.5)'te kullanılması sonucunda deviatorik uzama değişimi tansörünün bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \eta_{111}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(3 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} \right) \right) - \frac{3}{15} \left[\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right] \\ &= \frac{2}{5} \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) = \frac{2}{5} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \eta_{112}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} \right) \\ &- \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \eta_{113}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{15} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -\frac{4}{15} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \eta_{121}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} \right) \\ &- \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \eta_{122}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{15} \left[3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \right] = -\frac{1}{5} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\eta_{123}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} [0] = 0 \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \eta_{131}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{15} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -\frac{4}{15} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\eta_{132}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} [0] = 0 \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \eta_{133}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{3} (0) - \frac{1}{15} \left[3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \right] = -\frac{1}{5} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \eta_{211}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x} \right) \\ &- \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \eta_{212}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{3} (0) - \frac{1}{15} \left[3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \right] = -\frac{1}{5} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\eta_{213}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} [0] = 0 \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \eta_{221}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{3} (0) - \frac{1}{15} \left[3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \right] = -\frac{1}{5} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\eta_{222}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(3 \left(\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} \right) \right) - \frac{3}{15} \left[\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right] = 0 \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \eta_{223}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{3} (0) - \frac{1}{15} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{15} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\eta_{231}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} [0] = 0 \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \eta_{232}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{3} (0) - \frac{1}{15} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{15} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \eta_{233}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial z} \right) \\ &- \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \eta_{311}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{15} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -\frac{4}{15} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\eta_{312}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} [0] = 0 \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \eta_{313}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{3} (0) - \frac{1}{15} \left[3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \right] = -\frac{1}{5} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\eta_{321}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} [0] = 0 \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \eta_{322}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{3} (0) - \frac{1}{15} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{15} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \eta_{323}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \\ &- \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \eta_{331}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{3} (0) - \frac{1}{15} \left[3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \right] = -\frac{1}{5} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \eta_{332}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial y} \right) \\ &- \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned}\eta_{333}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(3 \left(\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) - \frac{3}{15} \left[\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right] \\ &= \frac{1}{3} (0) - \frac{3}{15} \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = \frac{1}{5} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)\end{aligned}\quad (3.54)$$

Denklemler (3.16–3.18) ve Denklem (3.7)'den, dönme değişimi vektörünün bileşenleri

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \left(e_{123} \frac{\partial u_3}{\partial y} + e_{132} \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} (0 - 0) = 0 \quad (3.55)$$

$$\theta_2 = \frac{1}{2} \left(e_{231} \frac{\partial u_1}{\partial z} + e_{213} \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.56)$$

$$\theta_3 = \frac{1}{2} \left(e_{312} \frac{\partial u_2}{\partial x} + e_{321} \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (0 - 0) = 0 \quad (3.57)$$

olarak yazılır ve bunların Denklem (3.6)'da kullanılması ile dönme değişimi tansörünün simetrik parçasının bileşenleri

$$\chi_{11}^s = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.58)$$

$$\chi_{12}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.59)$$

$$\chi_{13}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial z} + \frac{\partial \theta_3}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.60)$$

$$\chi_{21}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x} + \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.61)$$

$$\chi_{22}^s = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.62)$$

$$\chi_{23}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial z} + \frac{\partial \theta_3}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.63)$$

$$\chi_{31}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial x} + \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right) = 0 \quad (3.64)$$

$$\chi_{32}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial z} + \frac{\partial \theta_3}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.65)$$

$$\chi_{33}^s = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial \theta_3}{\partial z} \right) = 0 \quad (3.66)$$

şeklinde elde edilir. Yukarıda yer alan şekil değiştirme bileşenleri düzenlendikten sonra sıfırdan farklı olanları aşağıda verilmiştir.

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.67)$$

$$\gamma_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad (3.68)$$

$$\gamma_3 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.69)$$

$$\eta_{111}^{(1)} = \frac{2}{5} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \quad (3.70)$$

$$\eta_{113}^{(1)} = \eta_{131}^{(1)} = \eta_{311}^{(1)} = -\frac{4}{15} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.71)$$

$$\eta_{122}^{(1)} = \eta_{133}^{(1)} = \eta_{212}^{(1)} = \eta_{221}^{(1)} = \eta_{313}^{(1)} = \eta_{331}^{(1)} = -\frac{1}{5} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \quad (3.72)$$

$$\eta_{223}^{(1)} = \eta_{232}^{(1)} = \eta_{322}^{(1)} = \frac{1}{15} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.73)$$

$$\eta_{333}^{(1)} = \frac{1}{5} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.74)$$

$$\chi_{12}^s = \chi_{21}^s = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.75)$$

Yukarıdaki şekil değiştirme bileşenlerinin Denklemler (3.10–3.13)'te yerlerine yazılması sonucunda sıfırdan farklı klasik gerilme bileşenleri

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.76)$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.77)$$

Burada

$$\lambda + 2\mu = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.78)$$

ve yüksek mertebeden gerilme bileşenleri

$$p_1 = 2\mu l_0^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \quad (3.79)$$

$$p_3 = -2\mu l_0^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.80)$$

$$\tau_{111}^{(1)} = \frac{4}{5} \mu l_1^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \quad (3.81)$$

$$\tau_{113}^{(1)} = \tau_{131}^{(1)} = \tau_{311}^{(1)} = -\frac{8}{15} \mu l_1^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.82)$$

$$\tau_{122}^{(1)} = \tau_{133}^{(1)} = \tau_{212}^{(1)} = \tau_{221}^{(1)} = \tau_{313}^{(1)} = \tau_{331}^{(1)} = -\frac{2}{5} \mu l_1^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \quad (3.83)$$

$$\tau_{223}^{(1)} = \tau_{232}^{(1)} = \tau_{322}^{(1)} = \frac{2}{15} \mu l_1^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.84)$$

$$\tau_{333}^{(1)} = \frac{2}{5} \mu l_1^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.85)$$

$$m_{12}^s = m_{21}^s = -\mu l_2^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.86)$$

şeklinde elde edilir. Yukarıdaki denklemlerden faydalanarak mikro kiriş için toplam şekil değiştirme enerjisinin birinci varyasyonu aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \delta U_k^{BE} &= \int_0^L \int_A \left(\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + p_i \delta \gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)} \delta \eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij}^s \delta \chi_{ij}^s \right) dA dx \\ &= \int_0^L \int_A \left(\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + p_1 \delta \gamma_1 + p_3 \delta \gamma_3 + \tau_{111}^{(1)} \delta \eta_{111}^{(1)} + 3\tau_{113}^{(1)} \delta \eta_{113}^{(1)} \right. \\ &\quad \left. + 6\tau_{122}^{(1)} \delta \eta_{122}^{(1)} + 3\tau_{223}^{(1)} \delta \eta_{223}^{(1)} + \tau_{333}^{(1)} \delta \eta_{333}^{(1)} + 2m_{12}^s \delta \chi_{12}^s \right) dA dx \\ &= \int_0^L \left[\left(-EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\mu A \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) \delta u \right. \\ &\quad \left. + \left(\left(EI + \mu A \left(2l_0^2 + \frac{8}{15} l_1^2 + l_2^2 \right) \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} \right) \delta w \right] dx \\ &\quad + \int_0^L \left[\left(EA \frac{\partial u}{\partial x} - 2\mu A \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \delta u + 2\mu A \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(- \left(EI + \mu A \left(2l_0^2 + \frac{8}{15} l_1^2 + l_2^2 \right) \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} \right) \delta w \right. \\ &\quad \left. + \left(\left(EI + \mu A \left(2l_0^2 + \frac{8}{15} l_1^2 + l_2^2 \right) \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right]_0^L \quad (3.87) \end{aligned}$$

burada L mikro kirişin uzunluğu, $A = \int_A dA$ en kesit alanı, $I = \int_A z^2 dA$ eylemsizlik momentidir. Mikro kirişin kinetik enerjisi Bernoulli-Euler kiriş teorisine göre

$$\begin{aligned} K_k^{BE} &= \int_0^L \int_A \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} \right)^2 \right] dA dx \\ &= \frac{1}{2} \rho \int_0^L \int_A \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dA dx \quad (3.88) \end{aligned}$$

şeklindedir. Yukarıda verilen kinetik enerji ifadesinin $[0, T]$ zaman aralığında birinci varyasyonu

$$\begin{aligned} \int_0^T \delta K_k^{BE} dt &= \int_0^T \int_0^L \left[-m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u - \left(m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \right) \delta w \right] dx dt \\ &+ \int_0^L \left[m_0 \frac{\partial u}{\partial t} \delta u + m_0 \frac{\partial w}{\partial t} \delta w - m_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \delta w \right]_0^T dx - \int_0^T \left[m_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \delta w \right]_0^L dt \quad (3.89) \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada $m_0 = \int_A \rho dA$ ve $m_2 = \int_A \rho z^2 dA$ dır. Diğer taraftan dış kuvvetlerin yaptığı işin birinci varyasyonu

$$\begin{aligned} \delta W_k^{BE} &= \int_0^L \left(f \delta u + \left(q - k_w w - (P - k_p) \frac{\partial w^2}{\partial x^2} \right) \delta w \right) dx \\ &+ \left[N \delta u + N^{nc} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(V + (P - k_p) \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta w \right. \\ &\left. - M \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) - M^{nc} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right]_0^L \quad (3.90) \end{aligned}$$

şeklinde verilebilir. Burada $f(x, t)$ ve $q(x, t)$ aksel ve enine yayılı yükler olup P ise aksel basınç yüküdür. Ayrıca, N, V, M ve M^{nc} sırasıyla kiriş uçlarındaki normal kuvvet, kesme kuvveti, klasik eğilme momenti ve klasik olmayan eğilme momentini temsil etmektedir. Hamilton prensibine göre Denklemler (3.87), (3.89) ve (3.90)'dan (Reddy 2002)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T (\delta K_k^{BE} - \delta U_k^{BE} + \delta W_k^{BE}) dt \\ 0 &= \int_0^T \int_0^L \left[\left(-m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\mu A \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + f \right) \delta u \right. \\ &+ \left(-m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + m_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - \left(EI + \mu A \left(2l_0^2 + \frac{8}{15} l_1^2 + l_2^2 \right) \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right. \\ &+ 2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + q - k_w w - (P - k_p) \frac{\partial w^2}{\partial x^2} \left. \right] \delta w \Big] dx dt \\ &+ \int_0^T \left[\left(-EA \frac{\partial u}{\partial x} + 2\mu A \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + N \right) \delta u \right. \\ &- \left(2\mu A \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - N^{nc} \right) \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(-m_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \right. \\ &+ \left(EI + \mu A \left(2l_0^2 + \frac{8}{15} l_1^2 + l_2^2 \right) \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} \\ &+ V + (P - k_p) \frac{\partial w}{\partial x} \left. \right] \delta w \\ &- \left(\left(EI + \mu A \left(2l_0^2 + \frac{8}{15} l_1^2 + l_2^2 \right) \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + M \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

$$-\left(2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5}l_1^2\right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + M^{nc}\right) \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \Big|_0^L dt \quad (3.91)$$

ulaşılır. Yönetici denklemler ve ilgili sınır koşulları Denklem (3.91)'den faydalanılarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\delta u: EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\mu A \left(l_0^2 + \frac{2}{5}l_1^2\right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + f = m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned} \delta w: & -\left(EI + \mu A \left(2l_0^2 + \frac{8}{15}l_1^2 + l_2^2\right)\right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5}l_1^2\right) \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} \\ & + q - k_w w - (P - k_p) \frac{\partial w^2}{\partial x^2} = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \end{aligned} \quad (3.93)$$

$$-EA \frac{\partial u}{\partial x} + 2\mu A \left(l_0^2 + \frac{2}{5}l_1^2\right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + N = 0 \text{ ya da } \delta u = 0 \quad (3.94)$$

$$-2\mu A \left(l_0^2 + \frac{2}{5}l_1^2\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + N^{nc} = 0 \text{ ya da } \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned} & -m_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + \left(EI + \mu A \left(l_0^2 + \frac{8}{15}l_1^2 + l_2^2\right)\right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5}l_1^2\right) \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} \\ & + V + (P - k_p) \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ ya da } \delta w = 0 \end{aligned} \quad (3.96)$$

$$\begin{aligned} & -\left(EI + \mu A \left(l_0^2 + \frac{8}{15}l_1^2 + l_2^2\right)\right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5}l_1^2\right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - M = 0 \\ & \text{ya da } \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$-2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5}l_1^2\right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - M^{nc} = 0 \text{ ya da } \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0 \quad (3.98)$$

Ayrıca, yukarıdaki denklemlerde ilave malzeme boyut ölçek parametrelerinden ilk ikisi (l_0 ve l_1) ve tamamı sıfır alındığında Bernoulli-Euler mikro kiriş modeline ait eğilme, burkulma ve serbest titreşim için genel yönetici denklemler ve sınır koşullarına sırasıyla değiştirilmiş gerilme çifti elastisite teorisine göre

$$\delta u: EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f = m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.99)$$

$$\begin{aligned} \delta w: & -(EI + \mu A l_2^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + q - k_w w - (P - k_p) \frac{\partial w^2}{\partial x^2} \\ & = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \end{aligned} \quad (3.100)$$

$$-EA \frac{\partial u}{\partial x} + N = 0 \text{ ya da } \delta u = 0 \quad (3.101)$$

$$-m_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + (EI + \mu Al_2^2) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + V + (P - k_p) \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ ya da } \delta w = 0 \quad (3.102)$$

$$-(EI + \mu Al_2^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - M = 0 \text{ ya da } \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.103)$$

ve klasik (Cauchy) elastisite teorisine göre

$$\delta u: EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f = m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.104)$$

$$\delta w: -EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + q - k_w w - (P - k_p) \frac{\partial w^2}{\partial x^2} = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \quad (3.105)$$

$$-EA \frac{\partial u}{\partial x} + N = 0 \text{ ya da } \delta u = 0 \quad (3.106)$$

$$-m_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + V + (P - k_p) \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ ya da } \delta w = 0 \quad (3.107)$$

$$-EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - M = 0 \text{ ya da } \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.108)$$

biçimlerinde ulaşılır.

3.1.1.2. Timoshenko mikro kiriş modeli

Timoshenko (birinci dereceden kayma deformasyonlu) kiriş teorisine göre başlangıçta düz bir kirişin deplasman bileşenleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$u_1(x, z, t) = u(x, t) - z\varphi(x, t) \quad (3.109)$$

$$u_2(x, z, t) = 0 \quad (3.110)$$

$$u_3(x, z, t) = w(x, t) \quad (3.111)$$

burada u_1 , u_2 ve u_3 sırasıyla deplasman vektörünün x , y ve z bileşenleri, u ve w tarafsız eksen üzerindeki herhangi bir noktanın boyuna ve enine deplasmanları olup φ kiriş en kesitinin y eksenini etrafında dönme açısıdır. Denklemler (3.109–3.111)'in, Denklem (3.3)'te kullanılması ile şekil değiştirme bileşenlerine

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (3.112)$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.113)$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \quad (3.114)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0 \quad (3.115)$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.116)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0 \quad (3.117)$$

ulaşılır. Denklemler (3.112–3.117) ve Denklem (3.4)'ten, dilatasyon (genleşme) değişimi vektörü bileşenlerine

$$\gamma_1 = \frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (3.118)$$

$$\gamma_2 = \frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} = 0 \quad (3.119)$$

$$\gamma_3 = \frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (3.120)$$

ulaşılır. Benzer biçimde Denklemler (3.112–3.117)'nin Denklem (3.5)'te kullanılması sonucunda deviatorik uzama değişimi tansörünün bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \eta_{111}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(3 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} \right) - \frac{3}{15} \left[\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right] \right) \\ &= \frac{2}{5} \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) = \frac{2}{5} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (3.121)$$

$$\begin{aligned} \eta_{112}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} \right) \\ &- \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.122)$$

$$\begin{aligned} \eta_{113}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{4}{15} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.123)$$

$$\begin{aligned} \eta_{121}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} \right) \\ &- \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.124)$$

$$\begin{aligned} \eta_{122}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{5} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (3.125)$$

$$\eta_{123}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} [0] = 0 \quad (3.126)$$

$$\begin{aligned} \eta_{131}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{4}{15} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.127)$$

$$\eta_{132}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} [0] = 0 \quad (3.128)$$

$$\begin{aligned} \eta_{133}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{5} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - Z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (3.129)$$

$$\begin{aligned} \eta_{211}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x} \right) \\ &\quad - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.130)$$

$$\begin{aligned} \eta_{212}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{5} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - Z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (3.131)$$

$$\eta_{213}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} [0] = 0 \quad (3.132)$$

$$\begin{aligned} \eta_{221}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{5} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - Z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (3.133)$$

$$\eta_{222}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(3 \left(\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} \right) \right) - \frac{3}{15} \left[\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right] = 0 \quad (3.134)$$

$$\begin{aligned} \eta_{223}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.135)$$

$$\eta_{231}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} [0] = 0 \quad (3.136)$$

$$\begin{aligned} \eta_{232}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.137)$$

$$\begin{aligned} \eta_{233}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial z} \right) \\ &- \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.138)$$

$$\begin{aligned} \eta_{311}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{4}{15} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.139)$$

$$\eta_{312}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} [0] = 0 \quad (3.140)$$

$$\begin{aligned} \eta_{313}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{5} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (3.141)$$

$$\eta_{321}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} [0] = 0 \quad (3.142)$$

$$\begin{aligned} \eta_{322}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.143)$$

$$\begin{aligned} \eta_{323}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \\ &- \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.144)$$

$$\eta_{331}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right)$$

$$= -\frac{1}{5} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \quad (3.145)$$

$$\eta_{332}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right) = 0 \quad (3.146)$$

$$\eta_{333}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(3 \left(\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) - \frac{3}{15} \left[\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right] = \frac{1}{5} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (3.147)$$

Denklemler (3.109–3.111) ve Denklem (3.7)'den dönme değişimi vektörünün bileşenleri

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \left(e_{123} \frac{\partial u_3}{\partial y} + e_{132} \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} (0 - 0) = 0 \quad (3.148)$$

$$\theta_2 = \frac{1}{2} \left(e_{231} \frac{\partial u_1}{\partial z} + e_{213} \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \quad (3.149)$$

$$\theta_3 = \frac{1}{2} \left(e_{312} \frac{\partial u_2}{\partial x} + e_{321} \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (0 - 0) = 0 \quad (3.150)$$

olarak yazılır ve bunların Denklem (3.6)'da kullanılması ile dönme değişimi tansörünün simetrik parçasının bileşenleri

$$\chi_{11}^s = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.151)$$

$$\chi_{12}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right) = -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (3.152)$$

$$\chi_{13}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial z} + \frac{\partial \theta_3}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.153)$$

$$\chi_{21}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x} + \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \right) = -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (3.154)$$

$$\chi_{22}^s = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.155)$$

$$\chi_{23}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial z} + \frac{\partial \theta_3}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.156)$$

$$\chi_{31}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial x} + \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right) = 0 \quad (3.157)$$

$$\chi_{32}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial z} + \frac{\partial \theta_3}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.158)$$

$$\chi_{33}^s = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial \theta_3}{\partial z} \right) = 0 \quad (3.159)$$

şeklinde elde edilir. Yukarıda yer alan şekil değiştirme bileşenleri düzenlendikten sonra sıfırdan farklı olanları aşağıda verilmiştir.

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (3.160)$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \quad (3.161)$$

$$\gamma_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (3.162)$$

$$\gamma_3 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (3.163)$$

$$\eta_{111}^{(1)} = \frac{2}{5} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \quad (3.164)$$

$$\eta_{113}^{(1)} = \eta_{131}^{(1)} = \eta_{311}^{(1)} = \frac{4}{15} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (3.165)$$

$$\eta_{122}^{(1)} = \eta_{133}^{(1)} = \eta_{212}^{(1)} = \eta_{221}^{(1)} = \eta_{313}^{(1)} = \eta_{331}^{(1)} = -\frac{1}{5} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \quad (3.166)$$

$$\eta_{223}^{(1)} = \eta_{232}^{(1)} = \eta_{322}^{(1)} = \frac{1}{15} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (3.167)$$

$$\eta_{333}^{(1)} = \frac{1}{5} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (3.168)$$

$$\chi_{12}^s = \chi_{21}^s = -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (3.169)$$

Yukarıdaki şekil değiştirme bileşenlerinin Denklemler (3.10–3.13)'te yerlerine yazılması sonucunda sıfırdan farklı klasik ve yüksek mertebeden gerilme bileşenleri

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (3.170)$$

$$\sigma_{13} = k_s \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \quad (3.171)$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (3.172)$$

$$p_1 = 2\mu l_0^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \quad (3.173)$$

$$p_3 = -2\mu l_0^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (3.174)$$

$$\tau_{111}^{(1)} = \frac{4}{5} \mu l_1^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \quad (3.175)$$

$$\tau_{113}^{(1)} = \tau_{131}^{(1)} = \tau_{311}^{(1)} = \frac{8}{15} \mu l_1^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (3.176)$$

$$\tau_{122}^{(1)} = \tau_{133}^{(1)} = \tau_{212}^{(1)} = \tau_{221}^{(1)} = \tau_{313}^{(1)} = \tau_{331}^{(1)} = -\frac{2}{5} \mu l_1^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \quad (3.177)$$

$$\tau_{223}^{(1)} = \tau_{232}^{(1)} = \tau_{322}^{(1)} = \frac{2}{15} \mu l_1^2 \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (3.178)$$

$$\tau_{333}^{(1)} = \frac{2}{5} \mu l_1^2 \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (3.179)$$

$$m_{12}^s = m_{21}^s = -\frac{\mu l_2^2}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (3.180)$$

şeklinde elde edilir. Denklem (3.171)'de yer alan k_s kayma düzeltme faktörüdür. Yukarıdaki denklemlerden faydalanarak mikro kiriş için toplam şekil değiştirme enerjisinin birinci varyasyonu aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \delta U_k^T &= \int_0^L \int_A \left(\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + p_i \delta \gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)} \delta \eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij}^s \delta \chi_{ij}^s \right) dA dx \\ &= \int_0^L \int_A \left(\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + 2\sigma_{13} \delta \varepsilon_{13} + p_1 \delta \gamma_1 + p_3 \delta \gamma_3 + \tau_{111}^{(1)} \delta \eta_{111}^{(1)} + 3\tau_{113}^{(1)} \delta \eta_{113}^{(1)} \right. \\ &\quad \left. + 6\tau_{122}^{(1)} \delta \eta_{122}^{(1)} + 3\tau_{223}^{(1)} \delta \eta_{223}^{(1)} + \tau_{333}^{(1)} \delta \eta_{333}^{(1)} + 2m_{12}^s \delta \chi_{12}^s \right) dA dx \\ &= \int_0^L \left[\left(-EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\mu A \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) \delta u \right. \\ &\quad \left. + \left(-k_s \mu A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu A \left(\frac{8}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + k_s \mu A \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu A \left(-\frac{16}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right) \delta w \right. \\ &\quad \left. + \left(-k_s \mu A \frac{\partial w}{\partial x} - \left(-\frac{16}{15} \mu A l_1^2 + \frac{1}{4} \mu A l_2^2 \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + k_s \mu A \varphi - \left(EI + \mu A \left(2l_0^2 + \frac{32}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left(2\mu l \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \right) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \right) \delta \varphi \right] dx \\ &\quad + \int_0^L \left[\left(EA \frac{\partial u}{\partial x} - 2\mu A \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \delta u + 2\mu A \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(k_s \mu A \frac{\partial w}{\partial x} - \mu A \left(\frac{8}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - k_s \mu A \varphi - \mu A \left(-\frac{16}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \delta w \right. \\ &\quad \left. + \left(\mu A \left(\frac{8}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu A \left(-\frac{16}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\mu A \left(-\frac{16}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(EI + \mu A \left(2l_0^2 + \frac{32}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \delta \varphi \right] dx \end{aligned}$$

$$-\left(2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5}l_1^2\right)\right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \delta \varphi + \left(\left(2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5}l_1^2\right)\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right) \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \Bigg|_0^L dx \quad (3.181)$$

Mikro kirişin kinetik enerjisi birinci dereceden kayma deformasyonlu kiriş teorisine göre

$$\begin{aligned} K_k^T &= \int_0^L \int_A \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial t}\right)^2 \right] dA dx \\ &= \frac{1}{2} \rho \int_0^L \int_A \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} - z \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 \right] dA dx \end{aligned} \quad (3.182)$$

biçiminde yazılabilir. Kinetik enerji ifadesinin $[0, T]$ zaman aralığında birinci varyasyonu

$$\begin{aligned} \int_0^T \delta K_k^T dt &= \int_0^T \int_0^L \left[-\left(m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) \delta u + \left(-m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) \delta w - \left(m_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right) \delta \varphi \right] dx dt \\ &+ \int_0^L \left[\left(m_0 \frac{\partial u}{\partial t}\right) \delta u + \left(m_0 \frac{\partial w}{\partial t}\right) \delta w + \left(m_2 \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \delta \varphi \right]_0^T dx \end{aligned} \quad (3.183)$$

olarak ifade edilebilir. Diğer taraftan dış kuvvetlerin yaptığı işin birinci varyasyonu

$$\begin{aligned} \delta W_k^T &= \int_0^L \left(f \delta u + \left(q - k_w w - (P - k_p) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta w \right) dx + \left[\hat{Q}_1 \delta u + \hat{Q}_2 \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right. \\ &\left. + \left(\hat{Q}_3 + (P - k_p) \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta w + \hat{Q}_4 \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \hat{Q}_5 \delta \varphi + \hat{Q}_6 \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right]_0^L \end{aligned} \quad (3.184)$$

şeklinde verilebilir. Burada $f(x, t)$ ve $q(x, t)$ aksel ve enine yayılı yükler olup P aksel basınç yüküdür. Ayrıca, k_w ve k_p sırasıyla Winkler ve Pasternak elastik zemin modellerine ait katsayılar olup \hat{Q}_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) ise kiriş uçlarındaki kuvvet ve momentleri temsil etmektedir. Hamilton prensibine göre Denklemler (3.181), (3.183) ve (3.184)'ten (Reddy 2002)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T (\delta K_k^T - \delta U_k^T + \delta W_k^T) dt \\ 0 &= \int_0^T \int_0^L \left[\left(-m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\mu A \left(l_0^2 + \frac{2}{5}l_1^2\right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + f\right) \delta u \right. \\ &+ \left(-m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + m_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + k_s \mu A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \mu A \left(\frac{8}{15}l_1^2 + \frac{1}{4}l_2^2\right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right. \\ &- k_s \mu A \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \mu A \left(-\frac{16}{15}l_1^2 + \frac{1}{4}l_2^2\right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + q - k_w w - (P - k_p) \frac{\partial w^2}{\partial x^2} \left. \right) \delta w \\ &+ \left(-m_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - k_s \mu A \varphi + \left(EI + \mu A \left(2l_0^2 + \frac{32}{15}l_1^2 + \frac{1}{4}l_2^2\right)\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \right) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \delta \varphi \Big] dx dt \\
& + \int_0^T \left[\left(-EA \frac{\partial u}{\partial x} + 2\mu A \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \hat{Q}_1 \right) \delta u \right. \\
& - \left(2\mu A \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \hat{Q}_2 \right) \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(-k_s \mu A \frac{\partial w}{\partial x} + \mu A \left(\frac{8}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right. \\
& + k_s \mu A \varphi + \mu A \left(-\frac{16}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \hat{Q}_3 + (P - k_p) \frac{\partial w}{\partial x} \Big) \delta w \\
& - \left(\mu A \left(\frac{8}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu A \left(-\frac{16}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \hat{Q}_4 \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
& - \left(\mu A \left(-\frac{16}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(EI + \mu A \left(2l_0^2 + \frac{32}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right. \\
& - \left. \left(2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - \hat{Q}_5 \right) \delta \varphi \\
& - \left. \left(\left(2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \hat{Q}_6 \right) \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right]_0^L dt \tag{3.185}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Yönetici denklemler ve ilgili sınır koşulları yukarıdaki bağıntıdan faydalanılarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\delta u: EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\mu A \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + f = m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3.186}$$

$$\begin{aligned}
\delta w: k_s \mu A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \mu A \left(\frac{8}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - k_s \mu A \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \mu A \left(-\frac{16}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \\
+ q - k_w w - (P - k_p) \frac{\partial w^2}{\partial x^2} = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \tag{3.187}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta \varphi: k_s \mu A \frac{\partial w}{\partial x} + \left(-\frac{16}{15} \mu A l_1^2 + \frac{1}{4} \mu A l_2^2 \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - k_s \mu A \varphi \\
+ \left(EI + \mu A \left(2l_0^2 + \frac{32}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \left(2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \right) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = m_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \tag{3.188}
\end{aligned}$$

$$-EA \frac{\partial u}{\partial x} + 2\mu A \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \hat{Q}_1 = 0 \text{ ya da } \delta u = 0 \tag{3.189}$$

$$-2\mu A \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \hat{Q}_2 = 0 \text{ ya da } \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \tag{3.190}$$

$$-k_s \mu A \frac{\partial w}{\partial x} + \mu A \left(\frac{8}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + k_s \mu A \varphi$$

$$+\mu A \left(-\frac{16}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (P - k_p) \frac{\partial w}{\partial x} + \hat{Q}_3 = 0 \text{ ya da } \delta w = 0 \quad (3.191)$$

$$-\mu A \left(\frac{8}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \mu A \left(-\frac{16}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{Q}_4 = 0$$

$$\text{ya da } \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.192)$$

$$-\mu A \left(-\frac{16}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \left(EI + \mu A \left(2l_0^2 + \frac{32}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ + \left(2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \hat{Q}_5 = 0 \text{ ya da } \delta \varphi = 0 \quad (3.193)$$

$$-\left(2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \hat{Q}_6 = 0 \text{ ya da } \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.194)$$

Ayrıca, yukarıdaki denklemlerde ilave malzeme boyut ölçek parametrelerinden ilk ikisi (l_0 ve l_1) ve tamamı sıfır alındığında Timoshenko mikro kiriş modeline ait eğilme, burkulma ve serbest titreşim için genel yönetici denklemler ve sınır koşulları sırasıyla değiştirilmiş gerilme çifti elastisite teorisine göre

$$\delta u: EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f = m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.195)$$

$$\delta w: k_s \mu A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \frac{1}{4} \mu A l_2^2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right) \\ + q - k_w w - (P - k_p) \frac{\partial w^2}{\partial x^2} = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \quad (3.196)$$

$$\delta \varphi: -k_s \mu A \varphi + \left(EI + \frac{1}{4} \mu A l_2^2 \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = m_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (3.197)$$

$$-EA \frac{\partial u}{\partial x} + \hat{Q}_1 = 0 \text{ ya da } \delta u = 0 \quad (3.198)$$

$$-k_s \mu A \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) + \frac{1}{4} \mu A l_2^2 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + (P - k_p) \frac{\partial w}{\partial x} + \hat{Q}_3 = 0$$

$$\text{ya da } \delta w = 0 \quad (3.199)$$

$$-\frac{1}{4} \mu A l_2^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \hat{Q}_4 = 0 \text{ ya da } \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.200)$$

$$-\frac{1}{4} \mu A l_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \left(EI + \frac{1}{4} \mu A l_2^2 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{Q}_5 = 0 \text{ ya da } \delta \varphi = 0 \quad (3.201)$$

ve klasik (Cauchy) elastisite teorisine göre

$$\delta u: EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f = m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.202)$$

$$\begin{aligned}\delta w: & k_s \mu A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + q - k_w w - (P - k_p) \frac{\partial w^2}{\partial x^2} \\ & = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2}\end{aligned}\quad (3.203)$$

$$\delta \varphi: -k_s \mu A \varphi + EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = m_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\quad (3.204)$$

$$-EA \frac{\partial u}{\partial x} + \hat{Q}_1 = 0 \text{ ya da } \delta u = 0\quad (3.205)$$

$$-k_s \mu A \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) + (P - k_p) \frac{\partial w}{\partial x} + \hat{Q}_3 = 0 \text{ ya da } \delta w = 0\quad (3.206)$$

$$-EI \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{Q}_4 = 0 \text{ ya da } \delta \varphi = 0\quad (3.207)$$

biçimlerinde ulaşılır.

3.1.1.3. Sinüzoidal mikro kiriş modeli

Sinüzoidal (trigonometrik kayma deformasyonlu) kiriş teorisine göre başlangıçta düz bir kirişin deplasman bileşenleri aşağıdaki gibi yazılabilir (Touratier 1991)

$$u_1(x, z, t) = u(x, t) - z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \varphi(x, t) \right)\quad (3.208)$$

$$u_2(x, z, t) = 0\quad (3.209)$$

$$u_3(x, z, t) = w(x, t)\quad (3.210)$$

u_1 , u_2 ve u_3 sırasıyla deplasman vektörünün x , y ve z bileşenleri, u ve w tarafsız eksen üzerindeki herhangi bir noktanın boyuna ve enine deplasmanları olup φ kiriş en kesitinin y eksenine etrafındaki toplam eğilme dönmesidir. Denklemler (3.208–3.210)'un, Denklem (3.3)'te kullanılması ile şekil değiştirme bileşenlerine

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)\quad (3.211)$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) = 0\quad (3.212)$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right)\quad (3.213)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0\quad (3.214)$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) = 0\quad (3.215)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0\quad (3.216)$$

ulaşılır. Denklemler (3.211–3.216) ve Denklem (3.4)'ten, dilatasyon (genleşme) değişimi vektörü bileşenlerine

$$\gamma_1 = \frac{\partial(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right) \quad (3.217)$$

$$\gamma_2 = \frac{\partial(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})}{\partial y} = 0 \quad (3.218)$$

$$\gamma_3 = \frac{\partial(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})}{\partial z} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \quad (3.219)$$

ulaşılır. Benzer biçimde Denklemler (3.211–3.216)'nın, Denklem (3.5)'te kullanılması sonucunda deviatorik uzama değişimi tansörünün bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \eta_{111}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(3 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} \right) \right) - \frac{3}{15} \left[\frac{\partial(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right] \\ &= \frac{1}{5} \left[2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \right) + \frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \right] \end{aligned} \quad (3.220)$$

$$\begin{aligned} \eta_{112}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} \right) \\ &- \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.221)$$

$$\begin{aligned} \eta_{113}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{4}{15} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.222)$$

$$\begin{aligned} \eta_{121}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} \right) \\ &- \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.223)$$

$$\begin{aligned} \eta_{122}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{5} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) - \frac{\pi}{3h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \right) \end{aligned} \quad (3.224)$$

$$\eta_{123}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} [0] = 0 \quad (3.225)$$

$$\begin{aligned}\eta_{131}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{4}{15} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right)\end{aligned}\quad (3.226)$$

$$\eta_{132}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} [0] = 0 \quad (3.227)$$

$$\begin{aligned}\eta_{133}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{5} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + \frac{4\pi}{3h} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \right)\end{aligned}\quad (3.228)$$

$$\begin{aligned}\eta_{211}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x} \right) \\ &- \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right) = 0\end{aligned}\quad (3.229)$$

$$\begin{aligned}\eta_{212}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{5} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) - \frac{\pi}{3h} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \right)\end{aligned}\quad (3.230)$$

$$\eta_{213}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} [0] = 0 \quad (3.231)$$

$$\begin{aligned}\eta_{221}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{5} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) - \frac{\pi}{3h} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \right)\end{aligned}\quad (3.232)$$

$$\eta_{222}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(3 \left(\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} \right) \right) - \frac{3}{15} \left[\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right] = 0 \quad (3.233)$$

$$\begin{aligned}\eta_{223}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right)\end{aligned}\quad (3.234)$$

$$\eta_{231}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} [0] = 0 \quad (3.235)$$

$$\begin{aligned} \eta_{232}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.236)$$

$$\begin{aligned} \eta_{233}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial z} \right) \\ &- \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.237)$$

$$\begin{aligned} \eta_{311}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{4}{15} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.238)$$

$$\eta_{312}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} [0] = 0 \quad (3.239)$$

$$\begin{aligned} \eta_{313}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{5} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + \frac{4\pi}{3h} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \right) \end{aligned} \quad (3.240)$$

$$\eta_{321}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} [0] = 0 \quad (3.241)$$

$$\begin{aligned} \eta_{322}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.242)$$

$$\begin{aligned} \eta_{323}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \\ &- \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.243)$$

$$\begin{aligned}\eta_{331}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{5} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + \frac{4\pi}{3h} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \right) \quad (3.244)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_{332}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial y} \right) \\ &- \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right) = 0 \quad (3.245)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_{333}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(3 \left(\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) - \frac{3}{15} \left[\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right] \\ &= \frac{1}{5} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right) \quad (3.246)\end{aligned}$$

Denklemler (3.208–3.211) ve Denklem (3.7)'den dönme değişimi vektörünün bileşenleri

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \left(e_{123} \frac{\partial u_3}{\partial y} + e_{132} \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} (0 - 0) = 0 \quad (3.247)$$

$$\theta_2 = \frac{1}{2} \left(e_{231} \frac{\partial u_1}{\partial z} + e_{213} \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \quad (3.248)$$

$$\theta_3 = \frac{1}{2} \left(e_{312} \frac{\partial u_2}{\partial x} + e_{321} \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (0 - 0) = 0 \quad (3.249)$$

olarak yazılır ve bunların Denklem (3.6)'da kullanılması ile dönme değişimi tansörünün simetrik parçasının bileşenleri

$$\chi_{11}^s = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.250)$$

$$\chi_{12}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right) \quad (3.251)$$

$$\chi_{13}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial z} + \frac{\partial \theta_3}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.252)$$

$$\chi_{21}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x} + \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right) \quad (3.253)$$

$$\chi_{22}^s = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.254)$$

$$\chi_{23}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial z} + \frac{\partial \theta_3}{\partial y} \right) = -\frac{\pi}{4h} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \quad (3.255)$$

$$\chi_{31}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial x} + \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right) = 0 \quad (3.256)$$

$$\chi_{32}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial z} + \frac{\partial \theta_3}{\partial y} \right) = -\frac{\pi}{4h} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \quad (3.257)$$

$$\chi_{33}^s = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial \theta_3}{\partial z} \right) = 0 \quad (3.258)$$

şeklinde elde edilir. Yukarıda yer alan şekil değiştirme bileşenleri düzenlendikten sonra sıfırdan farklı olanları aşağıda verilmiştir.

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (3.259)$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \quad (3.260)$$

$$\gamma_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \quad (3.261)$$

$$\gamma_3 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (3.262)$$

$$\eta_{111}^{(1)} = \frac{1}{5} \left[2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \right) + \frac{\pi}{h} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \right] \quad (3.263)$$

$$\eta_{113}^{(1)} = \eta_{131}^{(1)} = \eta_{311}^{(1)} = \frac{4}{15} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right) \quad (3.264)$$

$$\eta_{122}^{(1)} = \eta_{212}^{(1)} = \eta_{221}^{(1)} = -\frac{1}{5} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) - \frac{\pi}{3h} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \right) \quad (3.265)$$

$$\eta_{133}^{(1)} = \eta_{313}^{(1)} = \eta_{331}^{(1)} = -\frac{1}{5} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + \frac{4\pi}{3h} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \right) \quad (3.266)$$

$$\eta_{223}^{(1)} = \eta_{232}^{(1)} = \eta_{322}^{(1)} = \frac{1}{15} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right) \quad (3.267)$$

$$\eta_{333}^{(1)} = \frac{1}{5} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right) \quad (3.268)$$

$$\chi_{12}^s = \chi_{21}^s = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right) \quad (3.269)$$

$$\chi_{23}^s = \chi_{32}^s = -\frac{\pi}{4h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi\right) \quad (3.270)$$

Yukarıdaki şekil değiştirme bileşenlerinin, Denklemler (3.10–3.13)'te yerlerine yazılması sonucunda sıfırdan farklı klasik ve yüksek mertebeden gerilme bileşenleri

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\right) \quad (3.271)$$

$$\sigma_{13} = \mu \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi\right) \quad (3.272)$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\right) \quad (3.273)$$

$$p_1 = 2\mu l_0^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)\right) \quad (3.274)$$

$$p_3 = 2\mu l_0^2 \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\right) \quad (3.275)$$

$$\begin{aligned} \tau_{111}^{(1)} &= \frac{2}{5} \mu l_1^2 \left[2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi\right) \right] \end{aligned} \quad (3.276)$$

$$\tau_{113}^{(1)} = \tau_{131}^{(1)} = \tau_{311}^{(1)} = \frac{8}{15} \mu l_1^2 \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\right) \quad (3.277)$$

$$\begin{aligned} \tau_{122}^{(1)} = \tau_{212}^{(1)} = \tau_{221}^{(1)} &= -\frac{2}{5} \mu l_1^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)\right) \\ &\quad - \frac{\pi}{3h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi\right) \end{aligned} \quad (3.278)$$

$$\begin{aligned} \tau_{133}^{(1)} = \tau_{313}^{(1)} = \tau_{331}^{(1)} &= -\frac{2}{5} \mu l_1^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)\right) \\ &\quad + \frac{4\pi}{3h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi\right) \end{aligned} \quad (3.279)$$

$$\tau_{223}^{(1)} = \tau_{232}^{(1)} = \tau_{322}^{(1)} = \frac{2}{15} \mu l_1^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\right)$$

$$\tau_{333}^{(1)} = \frac{2}{5} \mu l_1^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\right) \quad (3.280)$$

$$m_{12}^s = m_{21}^s = -\mu l_2^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right) \quad (3.281)$$

$$m_{23}^s = m_{32}^s = -\frac{\mu l_2^2 \pi}{2 h} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \quad (3.282)$$

şeklinde elde edilir. Yukarıdaki denklemlerden faydalanarak mikro kiriş için toplam şekil değiştirme enerjisinin birinci varyasyonu aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \delta U_k^S &= \int_0^L \int_A \left(\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + p_i \delta \gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)} \delta \eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij}^s \delta \chi_{ij}^s \right) dA dx \\ &= \int_0^L \int_A \left(\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + 2\sigma_{13} \delta \varepsilon_{13} + p_1 \delta \gamma_1 + p_3 \delta \gamma_3 + \tau_{111}^{(1)} \delta \eta_{111}^{(1)} \right. \\ &\quad \left. + 3\tau_{113}^{(1)} \delta \eta_{113}^{(1)} + 3\tau_{122}^{(1)} \delta \eta_{122}^{(1)} \right. \\ &\quad \left. + 3\tau_{133}^{(1)} \delta \eta_{133}^{(1)} + 3\tau_{223}^{(1)} \delta \eta_{223}^{(1)} + \tau_{333}^{(1)} \delta \eta_{333}^{(1)} + 2m_{12}^s \delta \chi_{12}^s + 2m_{23}^s \delta \chi_{23}^s \right) dA dx \\ &= \int_0^L \left[\left(-EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\mu A \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) \delta u \right. \\ &\quad \left. + \left(-a_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (a_2 - 2a_3 + a_4) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - (a_5 - 2a_6 + a_7) \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - (a_4 - a_3) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + (a_7 - a_6) \frac{\partial^5 \varphi}{\partial x^5} \right) \delta w \right. \\ &\quad \left. + \left(-a_1 \frac{\partial w}{\partial x} + (a_4 - a_3) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (a_7 - a_6) \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + a_1 \varphi - a_4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + a_7 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \right) \delta \varphi \right] dx \\ &\quad + \int_0^L \left[\left(EA \frac{\partial u}{\partial x} - 2\mu A \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \delta u + 2\mu A \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(a_1 \frac{\partial w}{\partial x} - (a_2 - 2a_3 + a_4) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (a_5 - 2a_6 + a_7) \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a_1 \varphi + (a_4 - a_3) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - (a_7 - a_6) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \right) \delta w \right. \\ &\quad \left. + \left((a_2 - 2a_3 + a_4 + a_8 - a_9) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (a_5 - 2a_6 + a_7) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (a_4 - a_3 + a_8) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (a_7 - a_6) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left((a_8 - a_9) \frac{\partial w}{\partial x} + (a_5 - 2a_6 + a_7) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (a_8 - a_9) \varphi - (a_7 - a_6) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-(a_4 - a_3 + a_9 - a_8) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (a_7 - a_6) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (a_4 + a_8) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - a_7 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right) \delta \varphi \\
& + \left(-a_8 \frac{\partial w}{\partial x} - (a_7 - a_6) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + a_8 \varphi + a_7 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \Big|_0^L dx \quad (3.283)
\end{aligned}$$

burada

$$\begin{aligned}
a_1 &= \mu A \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{h^2} \left(\frac{4}{15} l_1^2 + \frac{1}{8} l_2^2 \right) \right), \quad a_2 = EI + \mu A \left(2l_0^2 + \frac{8}{15} l_1^2 + l_2^2 \right), \\
a_3 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{24}{\pi^2} EI + \mu A \left(4l_0^2 + \frac{4}{3} l_1^2 + l_2^2 \right) \right), \quad a_4 = \frac{6}{\pi^2} EI + \mu A \left(l_0^2 + \frac{2}{3} l_1^2 + \frac{1}{8} l_2^2 \right), \\
a_5 &= 2\mu l \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right), \quad a_6 = \frac{48}{\pi^3} \mu l \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right), \quad a_7 = \frac{12}{\pi^2} \mu l \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right), \\
a_8 &= \frac{1}{5} \mu A l_1^2, \quad a_9 = \frac{4}{5\pi} \mu A l_1^2 \quad (3.284)
\end{aligned}$$

dır. Mikro kirişin kinetik enerjisi trigonometrik kayma deformasyonlu kiriş teorisine göre

$$\begin{aligned}
K_k^S &= \int_0^L \int_A \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} \right)^2 \right] dA dx \\
&= \frac{1}{2} \rho \int_0^L \int_A \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dA dx \quad (3.285)
\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Kinetik enerji ifadesinin $[0, T]$ zaman aralığında birinci varyasyonu

$$\begin{aligned}
\int_0^T \delta K_k^S dt &= \int_0^T \int_0^L \left[- \left(m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \delta u \right. \\
&+ \left(-m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (m_2 - 2m_3 + m_4) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + (m_3 - m_4) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2} \right) \delta w \\
&- \left. \left((m_3 - m_4) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + m_4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) \delta \varphi \right] dx dt \\
&+ \int_0^L \left[\left(m_0 \frac{\partial u}{\partial t} \right) \delta u + \left(m_0 \frac{\partial w}{\partial t} - (m_2 - 2m_3 + m_4) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} - (m_3 - m_4) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} \right) \delta w \right. \\
&+ \left. \left((m_3 - m_4) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + m_4 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \delta \varphi \right]_0^T dx \\
&+ \int_0^T \left[\left(-(m_2 - 2m_3 + m_4) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - (m_3 - m_4) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) \delta w \right.
\end{aligned}$$

$$+ \left((m_3 - m_4) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta \varphi \Big|_0^L dt \quad (3.286)$$

olarak ifade edilebilir. Burada m_0 , m_2 , m_3 ve m_4 kütle ataletleri olup

$$(m_0, m_2, m_3, m_4) = \rho \int_A \left(1, z^2, z \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right), \left(\frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \right)^2 \right) dA \quad (3.287)$$

şeklinde tanımlanabilir. Diğer taraftan dış kuvvetlerin yaptığı işin birinci varyasyonu

$$\begin{aligned} \delta W_k^S = & \int_0^L \left(f \delta u + \left(q - k_w w - (P - k_p) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta w \right) dx + \left[\hat{Q}_1 \delta u + \hat{Q}_2 \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right. \\ & \left. + \left(\hat{Q}_3 + (P - k_p) \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta w + \hat{Q}_4 \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \hat{Q}_5 \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \hat{Q}_6 \delta \varphi + \hat{Q}_7 \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right]_0^L \end{aligned} \quad (3.288)$$

şeklinde verilebilir. Burada $f(x, t)$ ve $q(x, t)$ aksel ve enine yayılı yükler olup P ise aksel basınç yüküdür. Ayrıca, k_w ve k_p sırasıyla Winkler ve Pasternak elastik zemin modellerine ait katsayılar olup \hat{Q}_i ($i = 1, 2, \dots, 7$) ise kiriş uçlarındaki kuvvet ve momentleri temsil etmektedir. Hamilton prensibine göre Denklemler (3.283), (3.286) ve (3.288)'den (Reddy 2002)

$$\begin{aligned} 0 = & \int_0^T (\delta K_k^S - \delta U_k^S + \delta W_k^S) dt \\ 0 = & \int_0^T \int_0^L \left[\left(-m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\mu A \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + f \right) \delta u \right. \\ & + \left(-m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (m_2 - 2m_3 + m_4) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + (m_3 - m_4) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2} \right. \\ & + a_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (a_2 - 2a_3 + a_4) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (a_5 - 2a_6 + a_7) \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} \\ & - a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (a_4 - a_3) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - (a_7 - a_6) \frac{\partial^5 \varphi}{\partial x^5} + q - k_w w - (P - k_p) \frac{\partial w^2}{\partial x^2} \Big) \delta w \\ & + \left(-(m_3 - m_4) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - m_4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial w}{\partial x} - (a_4 - a_3) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (a_7 - a_6) \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} \right. \\ & \left. - a_1 \varphi + a_4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - a_7 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \right) \delta \varphi \Big] dx dt \\ & + \int_0^T \left[\left(-EA \frac{\partial u}{\partial x} + 2\mu A \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \hat{Q}_1 \right) \delta u \right. \\ & - \left(2\mu A \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \hat{Q}_2 \right) \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ & \left. - \left((m_2 - 2m_3 + m_4) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + (m_3 - m_4) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +a_1 \frac{\partial w}{\partial x} - (a_2 - 2a_3 + a_4) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (a_5 - 2a_6 + a_7) \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} \\
& -a_1 \varphi + (a_4 - a_3) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - (a_7 - a_6) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - \hat{Q}_3 + (-P + k_p) \frac{\partial w}{\partial x} \delta w \\
& - \left((a_2 - 2a_3 + a_4 + a_8 - a_9) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (a_5 - 2a_6 + a_7) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right. \\
& \left. - (a_4 - a_3 + a_8) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (a_7 - a_6) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - \hat{Q}_4 \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
& - \left((a_8 - a_9) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) + (a_5 - 2a_6 + a_7) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (a_7 - a_6) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \hat{Q}_5 \right) \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
& - \left(-(m_3 - m_4) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (a_4 - a_3 + a_9 - a_8) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right. \\
& \left. + (a_7 - a_6) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (a_4 + a_8) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - a_7 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - \hat{Q}_6 \right) \delta \varphi \\
& - \left(-a_8 \frac{\partial w}{\partial x} - (a_7 - a_6) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + a_8 \varphi + a_7 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \hat{Q}_7 \right) \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \Big|_0^L dt \quad (3.289)
\end{aligned}$$

bağıntısı elde edilir. Yönetici denklemler ve ilgili sınır koşulları yukarıdaki bağıntıdan faydalanılarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\delta u: EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\mu A \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + f = m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.290)$$

$$\begin{aligned}
\delta w: & a_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (a_2 - 2a_3 + a_4) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (a_5 - 2a_6 + a_7) \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} \\
& - a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (a_4 - a_3) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - (a_7 - a_6) \frac{\partial^5 \varphi}{\partial x^5} + q - k_w w - (P - k_p) \frac{\partial w^2}{\partial x^2} \\
& = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (m_2 - 2m_3 + m_4) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - (m_3 - m_4) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2} \quad (3.291)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta \varphi: & a_1 \frac{\partial w}{\partial x} - (a_4 - a_3) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (a_7 - a_6) \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} \\
& - a_1 \varphi + a_4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - a_7 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = (m_3 - m_4) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + m_4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (3.292)
\end{aligned}$$

$$-EA \frac{\partial u}{\partial x} + 2\mu A \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \hat{Q}_1 = 0 \text{ ya da } \delta u = 0 \quad (3.293)$$

$$-2\mu A \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \hat{Q}_2 = 0 \text{ ya da } \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.294)$$

$$\begin{aligned}
& -(m_2 - 2m_3 + m_4) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - (m_3 - m_4) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \\
& + (a_2 - 2a_3 + a_4) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (a_5 - 2a_6 + a_7) \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} - (a_4 - a_3) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\
& + (a_7 - a_6) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + (P - k_p) \frac{\partial w}{\partial x} + \hat{Q}_3 = 0 \text{ ya da } \delta w = 0
\end{aligned} \tag{3.295}$$

$$\begin{aligned}
& -(a_2 - 2a_3 + a_4 + a_8 - a_9) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (a_5 - 2a_6 + a_7) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\
& + (a_4 - a_3 + a_8) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - (a_7 - a_6) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \hat{Q}_4 = 0 \text{ ya da } \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.296}$$

$$\begin{aligned}
& -(a_8 - a_9) \frac{\partial w}{\partial x} - (a_5 - 2a_6 + a_7) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (a_8 - a_9) \varphi \\
& + (a_7 - a_6) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \hat{Q}_5 = 0 \text{ ya da } \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.297}$$

$$\begin{aligned}
& (m_3 - m_4) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (a_4 + a_8 - a_3 - a_9) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
& - (a_7 - a_6) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - (a_4 + a_8) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_7 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \hat{Q}_6 = 0 \text{ ya da } \delta \varphi = 0
\end{aligned} \tag{3.298}$$

$$a_8 \frac{\partial w}{\partial x} + (a_7 - a_6) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - a_8 \varphi - a_7 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \hat{Q}_7 = 0 \text{ ya da } \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0 \tag{3.299}$$

Ayrıca, yukarıdaki denklemlerde ilave malzeme boyut ölçek parametrelerinden ilk ikisi (l_0 ve l_1) ve tamamı sıfır alındığında sinüzoidal mikro giriş modeline ait eğilme, burkulma ve serbest titreşim için genel yönetici denklemler ve sınır koşulları sırasıyla değiştirilmiş gerilme çifti elastisite teorisine göre

$$\delta u: EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f = m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3.300}$$

$$\begin{aligned}
\delta w: & \mu A \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8h^2} l_2^2 \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \left(EI \left(1 - \frac{48}{\pi^3} + \frac{6}{\pi^2} \right) + \mu A l_2^2 \left(\frac{9}{8} - \frac{2}{\pi} \right) \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\
& + \left(EI \left(\frac{6}{\pi^2} - \frac{24}{\pi^3} \right) + \mu A l_2^2 \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{\pi} \right) \right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + q - k_w w - (P - k_p) \frac{\partial w^2}{\partial x^2} \\
& = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (m_2 - 2m_3 + m_4) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - (m_3 - m_4) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.301}$$

$$\begin{aligned}
\delta \varphi: & \mu A \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8h^2} l_2^2 \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) - \left(EI \left(\frac{6}{\pi^2} - \frac{24}{\pi^3} \right) + \mu A l_2^2 \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{\pi} \right) \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\
& + \left(\frac{6EI}{\pi^2} + \frac{1}{8} \mu A l_2^2 \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = (m_3 - m_4) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + m_4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.302}$$

$$-EA \frac{\partial u}{\partial x} + \hat{Q}_1 = 0 \text{ ya da } \delta u = 0 \quad (3.303)$$

$$\begin{aligned} & -(m_2 - 2m_3 + m_4) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - (m_3 - m_4) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \\ & - \mu A \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8h^2} l_2^2 \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) + \left(EI \left(1 - \frac{48}{\pi^3} + \frac{6}{\pi^2} \right) + \mu A l_2^2 \left(\frac{9}{8} - \frac{2}{\pi} \right) \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\ & - \left(EI \left(\frac{6}{\pi^2} - \frac{24}{\pi^3} \right) + \mu A l_2^2 \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{\pi} \right) \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (P - k_p) \frac{\partial w}{\partial x} + \hat{Q}_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{ya da } \delta w = 0 \quad (3.304)$$

$$\begin{aligned} & - \left(EI \left(1 - \frac{48}{\pi^3} + \frac{6}{\pi^2} \right) + \mu A l_2^2 \left(\frac{9}{8} - \frac{2}{\pi} \right) \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ & + \left(EI \left(\frac{6}{\pi^2} - \frac{24}{\pi^3} \right) + \mu A l_2^2 \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{\pi} \right) \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{Q}_4 = 0 \text{ ya da } \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.305)$$

$$\begin{aligned} & (m_3 - m_4) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(EI \left(\frac{6}{\pi^2} - \frac{24}{\pi^3} \right) + \mu A l_2^2 \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{\pi} \right) \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ & - \left(\frac{6EI}{\pi^2} + \frac{1}{8} \mu A l_2^2 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{Q}_6 = 0 \text{ ya da } \delta \varphi = 0 \end{aligned} \quad (3.306)$$

ve klasik (Cauchy) elastisite teorisine göre

$$\delta u: EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f = m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.307)$$

$$\begin{aligned} \delta w: & \frac{\mu A}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \left(EI \left(1 - \frac{48}{\pi^3} + \frac{6}{\pi^2} \right) \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\ & + \left(EI \left(\frac{6}{\pi^2} - \frac{24}{\pi^3} \right) \right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + q - k_w w - (P - k_p) \frac{\partial w^2}{\partial x^2} \\ & = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (m_2 - 2m_3 + m_4) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - (m_3 - m_4) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2} \end{aligned} \quad (3.308)$$

$$\begin{aligned} \delta \varphi: & \frac{\mu A}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) - \left(EI \left(\frac{6}{\pi^2} - \frac{24}{\pi^3} \right) \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\ & + \frac{6EI}{\pi^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = (m_3 - m_4) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + m_4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.309)$$

$$-EA \frac{\partial u}{\partial x} + \hat{Q}_1 = 0 \text{ ya da } \delta u = 0 \quad (3.310)$$

$$-(m_2 - 2m_3 + m_4) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - (m_3 - m_4) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\mu A}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right)$$

$$+ \left(EI \left(1 - \frac{48}{\pi^3} + \frac{6}{\pi^2} \right) \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - EI \left(\frac{6}{\pi^2} - \frac{24}{\pi^3} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ + (P - k_p) \frac{\partial w}{\partial x} + \hat{Q}_3 = 0 \text{ ya da } \delta w = 0 \quad (3.311)$$

$$- EI \left(1 - \frac{48}{\pi^3} + \frac{6}{\pi^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + EI \left(\frac{6}{\pi^2} - \frac{24}{\pi^3} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{Q}_4 = 0 \text{ ya da } \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.312)$$

$$(m_3 - m_4) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \left(\frac{6}{\pi^2} - \frac{24}{\pi^3} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{6EI}{\pi^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{Q}_6 = 0 \text{ ya da } \delta \varphi = 0 \quad (3.313)$$

biçimlerinde ulaşılır.

3.1.2. Mikro plak modelleri

3.1.2.1. Kirchhoff mikro plak modeli

Kirchhoff (kayma deformasyonsuz) plak teorisine göre başlangıçta düz bir plağın deplasman bileşenleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$u_1(x, y, z, t) = u(x, y, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} \quad (3.314)$$

$$u_2(x, y, z, t) = v(x, y, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \quad (3.315)$$

$$u_3(x, y, z, t) = w(x, y, t) \quad (3.316)$$

burada u_1 , u_2 ve u_3 sırasıyla deplasman vektörünün x , y ve z bileşenleri, u, v ve w plak orta düzlemi üzerindeki herhangi bir noktanın deplasmanlarıdır. Denklemler (3.314–3.316)'nın Denklem (3.3)'te kullanılması ile şekil değiştirme bileşenlerine

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.317)$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (3.318)$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.319)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.320)$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.321)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0 \quad (3.322)$$

ulaşılır. Denklemler (3.317–3.322) ve Denklem (3.4)'ten, dilatasyon (genleşme) değişimi vektörü bileşenlerine

$$\gamma_1 = \frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \quad (3.323)$$

$$\gamma_2 = \frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \quad (3.324)$$

$$\gamma_3 = \frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.325)$$

ulaşılır. Benzer biçimde Denklemler (3.317–3.322)'nin Denklem (3.5)'te kullanılması sonucunda deviatorik uzama değişimi tansörünün bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \eta_{111}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(3 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} \right) \right) - \frac{3}{15} \left[\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right] \\ &= \frac{2}{5} \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) = \frac{1}{5} \left[2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (3.326)$$

$$\begin{aligned} \eta_{112}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left[4 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) - 3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 4z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.327)$$

$$\begin{aligned} \eta_{113}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left[-4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (3.328)$$

$$\begin{aligned} \eta_{121}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left[4 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) - 3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 4z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.329)$$

$$\begin{aligned} \eta_{122}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left[4 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - 3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 4z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.330)$$

$$\eta_{123}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} [0] = -\frac{1}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.331)$$

$$\begin{aligned} \eta_{131}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left[-4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (3.332)$$

$$\eta_{132}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} [0] = -\frac{1}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.333)$$

$$\begin{aligned} \eta_{133}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left[-2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.334)$$

$$\begin{aligned} \eta_{211}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left[4 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) - 3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 4z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.335)$$

$$\begin{aligned} \eta_{212}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left[4 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - 3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 4z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.336)$$

$$\eta_{213}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} [0] = -\frac{1}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.337)$$

$$\begin{aligned} \eta_{221}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left[4 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - 3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 4z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.338)$$

$$\begin{aligned} \eta_{222}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(3 \left(\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} \right) \right) - \frac{3}{15} \left[\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right] \\ &= \frac{1}{5} \left[2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 3z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] \end{aligned} \quad (3.339)$$

$$\begin{aligned} \eta_{223}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (3.340)$$

$$\eta_{231}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} [0] = -\frac{1}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.341)$$

$$\eta_{232}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{15} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (3.342)$$

$$\begin{aligned} \eta_{233}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left[-2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.343)$$

$$\begin{aligned} \eta_{311}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left[-4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (3.344)$$

$$\eta_{312}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} [0] = -\frac{1}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.345)$$

$$\begin{aligned} \eta_{313}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left[-2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.346)$$

$$\eta_{321}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} [0] = -\frac{1}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.347)$$

$$\begin{aligned} \eta_{322}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (3.348)$$

$$\begin{aligned} \eta_{323}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left[-2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.349)$$

$$\begin{aligned} \eta_{331}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left[-2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.350)$$

$$\eta_{332}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{15} \left[-2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \right] \quad (3.351)$$

$$\begin{aligned} \eta_{333}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(3 \left(\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) - \frac{3}{15} \left[\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right] \\ &= \frac{1}{5} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (3.352)$$

Denklemler (3.314–3.316) ve Denklem (3.7)'den dönme değişimi vektörünün bileşenleri

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \left(e_{123} \frac{\partial u_3}{\partial y} + e_{132} \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.353)$$

$$\theta_2 = \frac{1}{2} \left(e_{231} \frac{\partial u_1}{\partial z} + e_{213} \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.354)$$

$$\theta_3 = \frac{1}{2} \left(e_{312} \frac{\partial u_2}{\partial x} + e_{321} \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.355)$$

olarak yazılır ve bunların Denklem (3.6)'da kullanılması ile dönme değişimi tansörünün simetrik parçasının bileşenleri

$$\chi_{11}^s = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.356)$$

$$\chi_{12}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right) = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (3.357)$$

$$\chi_{13}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial z} + \frac{\partial \theta_3}{\partial x} \right) = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] \quad (3.358)$$

$$\chi_{21}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x} + \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \right) = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (3.359)$$

$$\chi_{22}^s = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.360)$$

$$\chi_{23}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial z} + \frac{\partial \theta_3}{\partial y} \right) = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (3.361)$$

$$\chi_{31}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial x} + \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right) = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] \quad (3.362)$$

$$\chi_{32}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial z} + \frac{\partial \theta_3}{\partial y} \right) = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (3.363)$$

$$\chi_{33}^s = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial \theta_3}{\partial z} \right) = 0 \quad (3.364)$$

şeklinde elde edilir. Yukarıda yer alan şekil değiştirme bileşenleri düzenlendikten sonra sıfırdan farklı olanları aşağıda verilmiştir.

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.365)$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (3.366)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.367)$$

$$\gamma_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \quad (3.368)$$

$$\gamma_2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \quad (3.369)$$

$$\gamma_3 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.370)$$

$$\eta_{111}^{(1)} = \frac{1}{5} \left[2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \quad (3.371)$$

$$\eta_{112}^{(1)} = \eta_{121}^{(1)} = \eta_{211}^{(1)} = \frac{1}{15} \left[4 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) - 3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 4z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \right] \quad (3.372)$$

$$\eta_{113}^{(1)} = \eta_{131}^{(1)} = \eta_{311}^{(1)} = \frac{1}{15} \left[-4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (3.373)$$

$$\eta_{122}^{(1)} = \eta_{212}^{(1)} = \eta_{221}^{(1)} = \frac{1}{15} \left[4 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - 3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 4z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \right] \quad (3.374)$$

$$\eta_{123}^{(1)} = \eta_{132}^{(1)} = \eta_{213}^{(1)} = \eta_{231}^{(1)} = \eta_{312}^{(1)} = \eta_{321}^{(1)} = -\frac{1}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.375)$$

$$\eta_{133}^{(1)} = \eta_{313}^{(1)} = \eta_{331}^{(1)} = \frac{1}{15} \left[-2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \right] \quad (3.376)$$

$$\eta_{222}^{(1)} = \frac{1}{5} \left[2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 3z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] \quad (3.377)$$

$$\eta_{223}^{(1)} = \eta_{232}^{(1)} = \eta_{322}^{(1)} = \frac{1}{15} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (3.378)$$

$$\eta_{233}^{(1)} = \eta_{323}^{(1)} = \eta_{332}^{(1)} = \frac{1}{15} \left[-2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \right] \quad (3.379)$$

$$\eta_{333}^{(1)} = \frac{1}{5} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (3.380)$$

$$\chi_{11}^s = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.381)$$

$$\chi_{12}^s = \chi_{21}^s = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (3.382)$$

$$\chi_{13}^s = \chi_{31}^s = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] \quad (3.383)$$

$$\chi_{22}^s = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.384)$$

$$\chi_{23}^s = \chi_{32}^s = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (3.385)$$

Yukarıdaki şekil değiştirme bileşenlerinin Denklemler (3.10–3.13)'te yerlerine yazılması sonucunda sıfırdan farklı klasik ve yüksek mertebeden gerilme bileşenleri

$$\sigma_{11} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right) \quad (3.386)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (3.387)$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) \quad (3.388)$$

$$p_1 = 2\mu l_0^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \quad (3.389)$$

$$p_2 = 2\mu l_0^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right] \quad (3.390)$$

$$p_3 = -2\mu l_0^2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (3.391)$$

$$\tau_{111}^{(1)} = \frac{2}{5} \mu l_1^2 \left[2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \quad (3.392)$$

$$\tau_{112}^{(1)} = \tau_{121}^{(1)} = \tau_{211}^{(1)} = \frac{2}{15} \mu l_1^2 \left[4 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) - 3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 4z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \right] \quad (3.393)$$

$$\tau_{113}^{(1)} = \tau_{131}^{(1)} = \tau_{311}^{(1)} = \frac{2}{15} \mu l_1^2 \left[-4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (3.394)$$

$$\tau_{122}^{(1)} = \tau_{212}^{(1)} = \tau_{221}^{(1)} = \frac{2}{15} \mu l_1^2 \left[4 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - 3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 4z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \right] \quad (3.395)$$

$$\tau_{123}^{(1)} = \tau_{132}^{(1)} = \tau_{213}^{(1)} = \tau_{231}^{(1)} = \tau_{312}^{(1)} = \tau_{321}^{(1)} = -\frac{2}{3} \mu l_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.396)$$

$$\tau_{133}^{(1)} = \tau_{313}^{(1)} = \tau_{331}^{(1)} = \frac{2}{15} \mu l_1^2 \left[-2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \right] \quad (3.397)$$

$$\tau_{222}^{(1)} = \frac{2}{5} \mu l_1^2 \left[2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 3z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] \quad (3.398)$$

$$\tau_{223}^{(1)} = \tau_{232}^{(1)} = \tau_{322}^{(1)} = \frac{2}{15} \mu l_1^2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (3.399)$$

$$\tau_{233}^{(1)} = \tau_{323}^{(1)} = \tau_{332}^{(1)} = \frac{2}{15} \mu l_1^2 \left[-2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \right] \quad (3.400)$$

$$\tau_{333}^{(1)} = \frac{2}{5} \mu l_1^2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (3.401)$$

$$m_{11}^s = 2 \mu l_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.402)$$

$$m_{12}^s = m_{21}^s = -\mu l_2^2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (3.403)$$

$$m_{13}^s = m_{31}^s = \frac{\mu l_2^2}{2} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] \quad (3.404)$$

$$m_{22}^s = -2 \mu l_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.405)$$

$$m_{23}^s = m_{32}^s = \frac{\mu l_2^2}{2} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (3.406)$$

şeklinde elde edilir. Yukarıdaki denklemlerden faydalanarak mikro plak için toplam şekil değiştirme enerjisinin birinci varyasyonu Kirchhoff plak teorisi için aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \delta U_p^K &= \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + p_i \delta \gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)} \delta \eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij}^s \delta \chi_{ij}^s \right) dz dA \\ &= \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + 2 \sigma_{12} \delta \varepsilon_{12} + \sigma_{22} \delta \varepsilon_{22} \right. \\ &\quad + p_1 \delta \gamma_1 + p_2 \delta \gamma_2 + p_3 \delta \gamma_3 + \tau_{111}^{(1)} \delta \eta_{111}^{(1)} + 3 \tau_{112}^{(1)} \delta \eta_{112}^{(1)} + 3 \tau_{113}^{(1)} \delta \eta_{113}^{(1)} \\ &\quad + 3 \tau_{122}^{(1)} \delta \eta_{122}^{(1)} + 6 \tau_{123}^{(1)} \delta \eta_{123}^{(1)} + 3 \tau_{133}^{(1)} \delta \eta_{133}^{(1)} + \tau_{222}^{(1)} \delta \eta_{222}^{(1)} + 3 \tau_{223}^{(1)} \delta \eta_{223}^{(1)} \\ &\quad + 3 \tau_{233}^{(1)} \delta \eta_{233}^{(1)} + \tau_{333}^{(1)} \delta \eta_{333}^{(1)} + m_{11}^s \delta \chi_{11}^s \\ &\quad \left. + 2 m_{12}^s \delta \chi_{12}^s + 2 m_{13}^s \delta \chi_{13}^s + m_{22}^s \delta \chi_{22}^s + 2 m_{23}^s \delta \chi_{23}^s \right) dz dA \end{aligned} \quad (3.407)$$

Mikro plağın kinetik enerjisi Kirchhoff plak teorisine göre

$$\begin{aligned} K_p^K &= \frac{1}{2} \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} \right)^2 \right] dz dA \\ &= \frac{1}{2} \rho \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dz dA \end{aligned} \quad (3.408)$$

biçiminde yazılabilir. Burada ρ mikro plak malzemesinin kütle yoğunluğu olup kinetik enerjinin birinci varyasyonu

$$\begin{aligned} \delta \int_0^T K_p^K dt &= \int_0^T \int_A \left[- \left(m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \delta u - \left(m_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \delta v \right. \\ &\left. + \left(-m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + m_2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \right) \delta w \right] dAdt \end{aligned} \quad (3.409)$$

olarak ifade edilebilir. Burada m_0 ve m_2 plak için kütle ataletleri olup

$$m_0 = \rho h, \quad m_2 = \frac{\rho h^3}{12} \quad (3.410)$$

şeklinde tanımlanabilir. Diğer taraftan dış kuvvetlerin yaptığı işin birinci varyasyonu

$$\begin{aligned} \delta W_p^K &= \int_A (f_x \delta u + f_y \delta v \\ &+ \left(q - k_w w + k_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \left(P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2P_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta w \right) dx dy \end{aligned} \quad (3.411)$$

şeklinde verilebilir. Burada f_x, f_y ve $q(x, y)$ aksel ve enine yayılı yükler olup P_x, P_y ve P_{xy} ise sırasıyla x ve y doğrultularında uygulanan basınç ve kesme kuvvetleridir. Ayrıca, k_w ve k_p sırasıyla Winkler ve Pasternak elastik zemin modellerine ait katsayılarıdır. Hamilton prensibine göre Denklemler (3.407), (3.409) ve (3.411)'den değiştirilmiş şekil değiştirme değişimi elastisite teorisine dayalı Kirchhoff (kayma deformasyonsuz) mikro plak modeline ait eğilme, burkulma ve serbest titreşim için genel yönetici denklemler aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\begin{aligned} \delta u: & h \left(\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - b_1 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - b_2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} - b_3 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right. \\ &\left. + \frac{E}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - (b_2 - 2b_3) \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 v}{\partial x \partial y^3} \right) \right) + f_x = m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.412)$$

$$\begin{aligned} \delta v: & h \left(\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - b_1 \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} - b_2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} - b_3 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \right. \\ &\left. + \frac{E}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) - (b_2 - 2b_3) \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} \right) \right) + f_y = m_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.413)$$

$$\begin{aligned} \delta w: & h \left(- \left(\frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} + 2\mu l_0^2 + \frac{8}{15} \mu l_1^2 + \mu l_2^2 \right) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) \right. \\ &\left. + \left(\frac{b_1 h^2}{12} \right) \left(\frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + 3 \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2} + 3 \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^6 w}{\partial y^6} \right) \right) + q - k_w w + k_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

$$-\left(P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2P_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m_2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial t^2}\right) \quad (3.414)$$

ve ilgili sınır koşulları

$$\begin{aligned} \delta u = 0 \text{ ya da } h \left(\left(\frac{E}{1-\nu^2} \right) (u_{,x} + \nu_{,y}) - b_1 u_{,xxx} - \frac{b_2}{2} u_{,xyy} + b_4 \nu_{,xxy} + b_5 \nu_{,yyy} \right) n_x \\ + \left(\left(\frac{E}{2(1+\nu)} \right) (u_{,y} + \nu_{,x}) - b_3 u_{,yyy} - \frac{b_2}{2} u_{,xxy} + b_6 \nu_{,xyy} + b_7 \nu_{,xxx} \right) n_y = 0 \end{aligned} \quad (3.415)$$

$$\begin{aligned} \delta u_{,x} = 0 \text{ ya da } h \left(\left(b_1 u_{,xx} - \frac{2}{5} \mu l_1^2 u_{,yy} - 2b_5 \nu_{,xy} \right) n_x \right. \\ \left. + (b_{20} u_{,xy} - b_5 \nu_{,yy} - b_7 \nu_{,xx}) n_y \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.416)$$

$$\begin{aligned} \delta u_{,y} = 0 \text{ ya da } h \left((b_{20} u_{,xy} - b_5 \nu_{,yy} - b_7 \nu_{,xx}) n_x \right. \\ \left. + \left(b_{22} u_{,yy} - \frac{2}{5} \mu l_1^2 u_{,xx} - 2b_7 \nu_{,xy} \right) n_y \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.417)$$

$\delta v = 0$ ya da

$$\begin{aligned} h \left(\left(\frac{E}{2(1+\nu)} \right) (u_{,y} + \nu_{,x}) - b_3 \nu_{,xxx} - \frac{b_2}{2} \nu_{,xyy} + b_6 u_{,xxy} + b_7 u_{,yyy} \right) n_x \\ + \left(\left(\frac{E\nu}{1-\nu^2} \right) (u_{,x} + \nu_{,y}) - b_1 \nu_{,yyy} - \frac{b_2}{2} \nu_{,xxy} + b_4 u_{,xyy} + b_5 u_{,xxx} \right) n_y = 0 \end{aligned} \quad (3.418)$$

$$\begin{aligned} \delta v_{,x} = 0 \text{ ya da } h \left(\left(b_{22} \nu_{,xx} - \frac{2}{5} \mu l_1^2 \nu_{,yy} - 2b_7 u_{,xy} \right) n_x \right. \\ \left. + (b_{20} \nu_{,xy} - b_5 u_{,xx} - b_7 u_{,yy}) n_y \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.419)$$

$$\begin{aligned} \delta v_{,y} = 0 \text{ ya da } h \left((b_{20} \nu_{,xy} - b_5 u_{,xx} - b_7 u_{,yy}) n_x \right. \\ \left. + \left(b_1 \nu_{,yy} - \frac{2}{5} \mu l_1^2 \nu_{,xx} - 2b_5 u_{,xy} \right) n_y \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.420)$$

$\delta w = 0$ ya da

$$\begin{aligned} h \left(\left(b_1 \frac{h^2}{12} (w_{,xxxxx} + 2w_{,xxxxy} + w_{,xyyyy}) - r_{28} (w_{,xxx} + w_{,xyy}) \right) n_x \right. \\ \left. + \left(b_1 \frac{h^2}{12} (w_{,yyyyy} + 2w_{,xyyy} + w_{,xxxxy}) - r_{28} (w_{,xxy} + w_{,yyy}) \right) n_y \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.421)$$

$\delta w_{,x} = 0$ ya da

$$h \left(-\frac{h^2}{12} (b_1 w_{,xxxx} + b_{24} w_{,xxyy} + b_{12} w_{,yyyy}) + r_{28} w_{,xx} + r_{29} w_{,yy} \right) n_x$$

$$+ \left(-b_{25} \frac{h^2}{12} (w_{,xyyy} + w_{,xxyy}) + r_{30} w_{,xy} \right) n_y = 0 \quad (3.422)$$

$$\delta w_{,y} = 0 \text{ ya da } h \left(-b_{25} \frac{h^2}{12} (w_{,xyyy} + w_{,xxyy}) + r_{30} w_{,xy} \right) n_x$$

$$+ \left(-\frac{h^2}{12} (b_{12} w_{,xxxx} + b_{24} w_{,xxyy} + b_1 w_{,yyyy}) + r_{29} w_{,xx} + r_{28} w_{,yy} \right) n_y = 0 \quad (3.423)$$

$$\delta w_{,xx} = 0 \text{ ya da } h \left(\left(\frac{h^2}{12} (b_1 w_{,xxxx} + b_{14} w_{,xyy}) \right) n_x \right.$$

$$\left. + \left(\frac{h^2}{12} (b_{13} w_{,xxy} + b_{12} w_{,yyy}) \right) n_y \right) = 0 \quad (3.424)$$

$$\delta w_{,yy} = 0 \text{ ya da } h \left(\left(\frac{h^2}{12} (b_{12} w_{,xxx} + b_{13} w_{,xyy}) \right) n_x \right.$$

$$\left. + \left(\frac{h^2}{12} (b_{14} w_{,xxy} + b_1 w_{,yyy}) \right) n_y \right) = 0 \quad (3.425)$$

$$\delta w_{,xy} = 0 \text{ ya da } h \left(\left(\frac{h^2}{12} (2b_{13} w_{,xxy} + 2b_{12} w_{,yyy}) \right) n_x \right.$$

$$\left. + \left(\frac{h^2}{12} (2b_{12} w_{,xxx} + 2b_{13} w_{,xxy}) \right) n_y \right) = 0 \quad (3.426)$$

Ayrıca, yukarıdaki denklemlerde ilave malzeme boyut ölçek parametrelerinden ilk ikisi (l_0 ve l_1) ve tamamı sıfır alındığında Kirchhoff mikro plak modeline ait eğilme, burkulma ve serbest titreşim için genel yönetici denklemler sırasıyla değiştirilmiş gerilme çifti elastisite teorisine göre

$$\delta u: h \left(\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{4} \mu l_2^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{E}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1}{4} \mu l_2^2 \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 v}{\partial x \partial y^3} \right) \right) + f_x = m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.427)$$

$$\delta v: h \left(\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{4} \mu l_2^2 \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \right) \right)$$

$$+ \frac{E}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1}{4} \mu l_2^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} \right) + f_y = m_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3.428)$$

$$\begin{aligned} \delta w: & h \left(- \left(\frac{E h^2}{12(1-\nu^2)} + \mu l_2^2 \right) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) \right) \\ & + q - k_w w + k_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \left(P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 P_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ & = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m_2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (3.429)$$

ve klasik (Cauchy) elastisite teorisine göre

$$\delta u: h \left(\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{E}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right) + f_x = m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.430)$$

$$\delta v: h \left(\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{E}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right) + f_y = m_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3.431)$$

$$\begin{aligned} \delta w: & - \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + q - k_w w + k_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ & - \left(P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 P_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m_2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (3.432)$$

biçimlerinde ulaşılır.

3.1.2.2. Mindlin mikro plak modeli

Mindlin (birinci dereceden kayma deformasyonlu) plak teorisine göre başlangıçta düz bir plağın deplasman bileşenleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$u_1(x, y, z, t) = u(x, y, t) - z \varphi_1(x, y, t) \quad (3.433)$$

$$u_2(x, y, z, t) = v(x, y, t) - z \varphi_2(x, y, t) \quad (3.434)$$

$$u_3(x, z, t) = w(x, y, t) \quad (3.435)$$

burada u_1 , u_2 ve u_3 sırasıyla deplasman vektörünün x , y ve z bileşenleri, u, v ve w plak orta düzlemi üzerindeki herhangi bir noktanın deplasmanları, φ_1 ve φ_2 plak orta düzleminin sırasıyla y ve x eksenine etrafında dönme açılarıdır. Denklemler (3.433–3.435)'in, Denklem (3.3)'te kullanılması ile şekil değiştirme bileşenlerine

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \quad (3.436)$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - z \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) \right) \quad (3.437)$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_1 \right) \quad (3.438)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \quad (3.439)$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_2 \right) \quad (3.440)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0 \quad (3.441)$$

ulaşılır. Denklemler (3.436–3.441) ve Denklem (3.4)'ten, dilatasyon (genleşme) değişimi vektörü bileşenlerine

$$\gamma_1 = \frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \quad (3.442)$$

$$\gamma_2 = \frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \quad (3.443)$$

$$\gamma_3 = \frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \quad (3.444)$$

ulaşılır. Benzer biçimde Denklemler (3.436–3.441)'in Denklem (3.5)'te kullanılması sonucunda deviatorik uzama değişimi tansörünün bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \eta_{111}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(3 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} \right) \right) - \frac{3}{15} \left[\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right] \\ &= \frac{2}{5} \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) = \frac{1}{5} \left[2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (3.445)$$

$$\begin{aligned} \eta_{112}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left[8 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) + 4 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right) - 3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.446)$$

$$\begin{aligned} \eta_{113}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left[4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 8 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + 2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (3.447)$$

$$\begin{aligned} \eta_{121}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left[8 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) + 4 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right) - 3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.448)$$

$$= \frac{1}{5} \left[2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right] \quad (3.458)$$

$$\begin{aligned} \eta_{223}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - 8 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (3.459)$$

$$\eta_{231}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} [0] = \frac{1}{3} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right] \quad (3.460)$$

$$\begin{aligned} \eta_{232}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - 8 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (3.461)$$

$$\begin{aligned} \eta_{233}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left[-2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - 3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.462)$$

$$\begin{aligned} \eta_{311}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left[4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 8 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + 2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (3.463)$$

$$\eta_{312}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} [0] = \frac{1}{3} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right] \quad (3.464)$$

$$\begin{aligned} \eta_{313}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left[-2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} - 3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.465)$$

$$\eta_{321}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} [0] = \frac{1}{3} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right] \quad (3.466)$$

$$\begin{aligned} \eta_{322}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - 8 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (3.467)$$

$$\begin{aligned}\eta_{323}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left[-2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - 3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right) \right]\end{aligned}\quad (3.468)$$

$$\begin{aligned}\eta_{331}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left[-2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} - 3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right) \right]\end{aligned}\quad (3.469)$$

$$\begin{aligned}\eta_{332}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left[-2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - 3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right) \right]\end{aligned}\quad (3.470)$$

$$\begin{aligned}\eta_{333}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(3 \left(\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) - \frac{3}{15} \left[\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right] \\ &= \frac{1}{5} \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right]\end{aligned}\quad (3.471)$$

Denklemler (3.433–3.435) ve Denklem (3.7)'den dönme değişimi vektörünün bileşenleri

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \left(e_{123} \frac{\partial u_3}{\partial y} + e_{132} \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_2 \right) \quad (3.472)$$

$$\theta_2 = \frac{1}{2} \left(e_{231} \frac{\partial u_1}{\partial z} + e_{213} \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_1 \right) \quad (3.473)$$

$$\theta_3 = \frac{1}{2} \left(e_{312} \frac{\partial u_2}{\partial x} + e_{321} \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - z \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) \right) \quad (3.474)$$

olarak yazılır ve bunların Denklem (3.6)'da kullanılması ile dönme değişimi tansörünün simetrik parçasının bileşenleri

$$\chi_{11}^s = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) \quad (3.475)$$

$$\chi_{12}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right) = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right] \quad (3.476)$$

$$\chi_{13}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial z} + \frac{\partial \theta_3}{\partial x} \right) = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - z \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) \right] \quad (3.477)$$

$$\chi_{21}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x} + \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \right) = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right] \quad (3.478)$$

$$\chi_{22}^s = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(- \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) \quad (3.479)$$

$$\chi_{23}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial z} + \frac{\partial \theta_3}{\partial y} \right) = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - z \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right) \right] \quad (3.480)$$

$$\chi_{31}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial x} + \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right) = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - z \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) \right] \quad (3.481)$$

$$\chi_{32}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial z} + \frac{\partial \theta_3}{\partial y} \right) = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - z \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right) \right] \quad (3.482)$$

$$\chi_{33}^s = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial \theta_3}{\partial z} \right) = - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) \quad (3.483)$$

şeklinde elde edilir. Yukarıda yer alan şekil değiştirme bileşenleri düzenlendikten sonra sıfırdan farklı olanları aşağıda verilmiştir.

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \quad (3.484)$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - z \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) \right) \quad (3.485)$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_1 \right) \quad (3.486)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \quad (3.487)$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_2 \right) \quad (3.488)$$

$$\gamma_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \quad (3.489)$$

$$\gamma_2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \quad (3.480)$$

$$\gamma_3 = - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \quad (3.481)$$

$$\eta_{111}^{(1)} = \frac{1}{5} \left[2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right] \quad (3.482)$$

$$\eta_{112}^{(1)} = \eta_{121}^{(1)} = \eta_{211}^{(1)} = \frac{1}{15} \left[8 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) + 4 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right) - 3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right) \right] \quad (3.483)$$

$$\eta_{113}^{(1)} = \eta_{131}^{(1)} = \eta_{311}^{(1)} = \frac{1}{15} \left[4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 8 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + 2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right] \quad (3.484)$$

$$\eta_{122}^{(1)} = \eta_{212}^{(1)} = \eta_{221}^{(1)} = \frac{1}{15} \left[8 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \right) + 4 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right) - 3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right) \right] \quad (3.485)$$

$$\eta_{123}^{(1)} = \eta_{132}^{(1)} = \eta_{213}^{(1)} = \eta_{231}^{(1)} = \eta_{312}^{(1)} = \eta_{321}^{(1)} = \frac{1}{3} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right] \quad (3.486)$$

$$\eta_{133}^{(1)} = \eta_{313}^{(1)} = \eta_{331}^{(1)} = \frac{1}{15} \left[-2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} - 3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right) \right] \quad (3.487)$$

$$\eta_{222}^{(1)} = \frac{1}{5} \left[2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right] \quad (3.488)$$

$$\eta_{223}^{(1)} = \eta_{232}^{(1)} = \eta_{322}^{(1)} = \frac{1}{15} \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - 8 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right] \quad (3.489)$$

$$\eta_{233}^{(1)} = \eta_{323}^{(1)} = \eta_{332}^{(1)} = \frac{1}{15} \left[-2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - 3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right) \right] \quad (3.490)$$

$$\eta_{333}^{(1)} = \frac{1}{5} \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right] \quad (3.491)$$

$$\chi_{11}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) \quad (3.492)$$

$$\chi_{12}^s = \chi_{21}^s = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right] \quad (3.493)$$

$$\chi_{13}^s = \chi_{31}^s = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - z \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) \right] \quad (3.494)$$

$$\chi_{22}^s = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) \quad (3.495)$$

$$\chi_{23}^s = \chi_{32}^s = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - z \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right) \right] \quad (3.496)$$

$$\chi_{33}^s = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) \quad (3.497)$$

Yukarıdaki şekil değiştirme bileşenlerinin Denklemler (3.10–3.13)'te yerlerine yazılması sonucunda sıfırdan farklı klasik ve yüksek mertebeden gerilme bileşenleri

$$\sigma_{11} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right) \quad (3.498)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - z \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) \right) \quad (3.499)$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = k_s \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_1 \right) \quad (3.500)$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \right) \quad (3.501)$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = k_s \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_2 \right) \quad (3.502)$$

$$p_1 = 2\mu l_0^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \right] \quad (3.503)$$

$$p_2 = 2\mu l_0^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right] \quad (3.504)$$

$$p_3 = -2\mu l_0^2 \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right] \quad (3.505)$$

$$\tau_{111}^{(1)} = \frac{2}{5} \mu l_1^2 \left[2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right] \quad (3.506)$$

$$\tau_{112}^{(1)} = \tau_{121}^{(1)} = \tau_{211}^{(1)} = \frac{2}{15} \mu l_1^2 \left[8 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) + 4 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right) - 3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right) \right] \quad (3.507)$$

$$\tau_{113}^{(1)} = \tau_{131}^{(1)} = \tau_{311}^{(1)} = \frac{2}{15} \mu l_1^2 \left[4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 8 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + 2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right] \quad (3.508)$$

$$\tau_{122}^{(1)} = \tau_{212}^{(1)} = \tau_{221}^{(1)} = \frac{2}{15} \mu l_1^2 \left[8 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \right) + 4 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right) - 3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right) \right] \quad (3.509)$$

$$\tau_{123}^{(1)} = \tau_{132}^{(1)} = \tau_{213}^{(1)} = \tau_{231}^{(1)} = \tau_{312}^{(1)} = \tau_{321}^{(1)} = \frac{2}{3} \mu l_1^2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right] \quad (3.510)$$

$$\tau_{133}^{(1)} = \tau_{313}^{(1)} = \tau_{331}^{(1)} = \frac{2}{15} \mu l_1^2 \left[-2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} - 3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right) \right] \quad (3.511)$$

$$\tau_{222}^{(1)} = \frac{2}{5} \mu l_1^2 \left[2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right] \quad (3.512)$$

$$\tau_{223}^{(1)} = \tau_{232}^{(1)} = \tau_{322}^{(1)} = \frac{2}{15} \mu l_1^2 \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - 8 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right] \quad (3.513)$$

$$\begin{aligned} \tau_{233}^{(1)} = \tau_{323}^{(1)} = \tau_{332}^{(1)} = \frac{2}{15} \mu l_1^2 \left[-2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right. \\ \left. - 3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.514)$$

$$\tau_{333}^{(1)} = \frac{2}{5} \mu l_1^2 \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right] \quad (3.515)$$

$$m_{11}^s = \mu l_2^2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right] \quad (3.516)$$

$$m_{12}^s = m_{21}^s = \frac{1}{2} \mu l_2^2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right] \quad (3.517)$$

$$m_{13}^s = m_{31}^s = \frac{1}{2} \mu l_2^2 \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - z \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) \right] \quad (3.518)$$

$$m_{22}^s = \mu l_2^2 \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right] \quad (3.519)$$

$$m_{23}^s = m_{32}^s = \frac{1}{2} \mu l_2^2 \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - z \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right) \right] \quad (3.520)$$

$$m_{33}^s = -\mu l_2^2 \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right] \quad (3.521)$$

şeklinde elde edilir. Yukarıdaki denklemlerden faydalanarak mikro plak için toplam şekil değiştirme enerjisinin birinci varyasyonu birinci dereceden kayma deformasyonlu plak teorisi için aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \delta U_p^M &= \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + p_i \delta \gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)} \delta \eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij}^s \delta \chi_{ij}^s \right) dz dA \\ &= \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + 2\sigma_{12} \delta \varepsilon_{12} + 2\sigma_{13} \delta \varepsilon_{13} + \sigma_{22} \delta \varepsilon_{22} + 2\sigma_{23} \delta \varepsilon_{23} \right. \\ &\quad + p_1 \delta \gamma_1 + p_2 \delta \gamma_2 + p_3 \delta \gamma_3 + \tau_{111}^{(1)} \delta \eta_{111}^{(1)} + 3\tau_{112}^{(1)} \delta \eta_{112}^{(1)} + 3\tau_{113}^{(1)} \delta \eta_{113}^{(1)} \\ &\quad + 3\tau_{122}^{(1)} \delta \eta_{122}^{(1)} + 6\tau_{123}^{(1)} \delta \eta_{123}^{(1)} + 3\tau_{133}^{(1)} \delta \eta_{133}^{(1)} + \tau_{222}^{(1)} \delta \eta_{222}^{(1)} + 3\tau_{223}^{(1)} \delta \eta_{223}^{(1)} \\ &\quad + 3\tau_{233}^{(1)} \delta \eta_{233}^{(1)} + \tau_{333}^{(1)} \delta \eta_{333}^{(1)} + m_{11}^s \delta \chi_{11}^s \\ &\quad \left. + 2m_{12}^s \delta \chi_{12}^s + 2m_{13}^s \delta \chi_{13}^s + m_{22}^s \delta \chi_{22}^s + 2m_{23}^s \delta \chi_{23}^s + m_{33}^s \delta \chi_{33}^s \right) dz dA \end{aligned} \quad (3.522)$$

Mikro plağın kinetik enerjisi Mindlin plak teorisine göre

$$K_p^M = \frac{1}{2} \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} \right)^2 \right] dz dA$$

$$= \frac{1}{2} \rho \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} - z \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} - z \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dz dA \quad (3.523)$$

biçiminde yazılabilir. Burada ρ mikro plak malzemesinin kütle yoğunluğu olup kinetik enerjinin $[0, T]$ aralığında birinci varyasyonu

$$\delta \int_0^T K_p^m dt = \int_0^T \int_A \left[- \left(m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \delta u - \left(m_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \delta v - \left(m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w - \left(m_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right) \delta \varphi_1 - \left(m_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right) \delta \varphi_2 \right] dA dt \quad (3.524)$$

olarak ifade edilebilir. Diğer taraftan dış kuvvetlerin yaptığı işin birinci varyasyonu

$$\delta W_p^M = \int_A \left(f_x \delta u + f_y \delta v + \left(q - k_w w + k_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \left(P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2P_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right) \delta w \right) dx dy \quad (3.525)$$

şeklinde verilebilir. Burada f_x, f_y ve q eksenel ve enine yayılı yükler olup P_x, P_y ve P_{xy} ise sırasıyla x ve y doğrultularında uygulanan basınç ve kesme kuvvetleridir. Ayrıca, k_w ve k_p sırasıyla Winkler ve Pasternak elastik zemin modellerine ait katsayılarıdır. Hamilton prensibine göre Denklemler (3.522), (3.524) ve (3.525)'ten, değiştirilmiş şekil değiştirme değişimi elastisite teorisine dayalı Mindlin (birinci mertebeden kayma deformasyonlu) mikro plak modeline ait eğilme, burkulma ve serbest titreşim için genel yönetici denklemler aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\delta u: h \left(\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - b_1 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - b_2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} - b_3 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{E}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - (b_2 - 2b_3) \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 v}{\partial x \partial y^3} \right) \right) + f_x = m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.526)$$

$$\delta v: h \left(\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - b_1 \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} - b_2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} - b_3 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{E}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) - (b_2 - 2b_3) \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} \right) \right) + f_y = m_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3.527)$$

$$\delta w: h \left(k_s \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) - b_3 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - 2b_7 \left(\frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial y^3} \right) + q - k_w w + k_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \left(P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2P_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.528)$$

$$\begin{aligned}
& \delta\varphi_1: h \left(k_s \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_1 \right) + 2b_7 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \right. \\
& + \left(\frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} + 2\mu l_0^2 + \frac{32}{15} \mu l_1^2 + \frac{1}{4} \mu l_2^2 \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right) \\
& + \mu \left(\frac{h^2}{12} + \frac{4}{3} l_1^2 + l_2^2 \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{Eh^2}{24(1-\nu)} + 2\mu l_0^2 + \frac{4}{5} \mu l_1^2 - \frac{3}{4} \mu l_2^2 \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \right) \\
& - b_1 \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial x^4} \right) - \frac{h^2}{12} \left(2\mu l_0^2 + \frac{4}{3} \mu l_1^2 + \frac{1}{4} \mu l_2^2 \right) \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial x^2 \partial y^2} - b_3 \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial y^4} \right) \\
& \left. - \frac{h^2}{12} \left(2\mu l_0^2 + \frac{4}{15} \mu l_1^2 - \frac{1}{4} \mu l_2^2 \right) \left(\frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial x \partial y^3} \right) \right) = m_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \quad (3.529)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta\varphi_2: h \left(k_s \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_2 \right) + 2b_7 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \right. \\
& + \left(\frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} + 2\mu l_0^2 + \frac{32}{15} \mu l_1^2 + \frac{1}{4} \mu l_2^2 \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right) \\
& + \mu \left(\frac{h^2}{12} + \frac{4}{3} l_1^2 + l_2^2 \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{Eh^2}{24(1-\nu)} + 2\mu l_0^2 + \frac{4}{5} \mu l_1^2 - \frac{3}{4} \mu l_2^2 \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) \\
& - b_1 \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial y^4} \right) - \frac{h^2}{12} \left(2\mu l_0^2 + \frac{4}{3} \mu l_1^2 + \frac{1}{4} \mu l_2^2 \right) \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial x^2 \partial y^2} - b_3 \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial x^4} \right) \\
& \left. - \frac{h^2}{12} \left(2\mu l_0^2 + \frac{4}{15} \mu l_1^2 - \frac{1}{4} \mu l_2^2 \right) \left(\frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial x^3 \partial y} \right) \right) = m_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \quad (3.530)
\end{aligned}$$

ve ilgili sınır koşulları

$\delta u = 0$ ya da

$$\begin{aligned}
& h \left(\left(\frac{E}{1-\nu^2} \right) (u_{,x} + v_{,y}) - b_1 u_{,xxx} - \frac{b_2}{2} u_{,xyy} + b_4 v_{,xxy} + b_5 v_{,yyy} \right) n_x \\
& + \left(\left(\frac{E}{2(1+\nu)} \right) (u_{,y} + v_{,x}) - b_3 u_{,yyy} - \frac{b_2}{2} u_{,xxy} + b_6 v_{,xyy} + b_7 v_{,xxx} \right) n_y = 0 \quad (3.531)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta u_{,x} = 0 \text{ ya da } h \left(\left(b_1 u_{,xx} - \frac{2}{5} \mu l_1^2 u_{,yy} - 2b_5 v_{,xy} \right) n_x \right. \\
& \left. + (b_{20} u_{,xy} - b_5 v_{,yy} - b_7 v_{,xx}) n_y \right) = 0 \quad (3.532)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta u_{,y} = 0 \text{ ya da } h \left(\left(b_{20} u_{,xy} - b_5 v_{,yy} - b_7 v_{,xx} \right) n_x \right. \\
& \left. + \left(b_{22} u_{,yy} - \frac{2}{5} \mu l_1^2 u_{,xx} - 2b_7 v_{,xy} \right) n_y \right) = 0 \quad (3.533)
\end{aligned}$$

$\delta v = 0$ ya da

$$h \left(\left(\frac{E}{2(1+\nu)} \right) (u_{,y} + v_{,x}) - b_3 v_{,xxx} - \frac{b_2}{2} v_{,xyy} + b_6 u_{,xxy} + b_7 u_{,yyy} \right) n_x \\ + \left(\left(\frac{E\nu}{1-\nu^2} \right) (u_{,x} + v_{,y}) - b_1 v_{,yyy} - \frac{b_2}{2} v_{,xxy} + b_4 u_{,xyy} + b_5 u_{,xxx} \right) n_y = 0 \quad (3.534)$$

$$\delta v_{,x} = 0 \text{ ya da } h \left((b_{22} v_{,xx} - \frac{2}{5} \mu l_1^2 v_{,yy} - 2b_7 u_{,xy}) n_x \right. \\ \left. + (b_{20} v_{,xy} - b_5 u_{,xx} - b_7 u_{,yy}) n_y \right) = 0 \quad (3.535)$$

$$\delta v_{,y} = 0 \text{ ya da } h \left((b_{20} v_{,xy} - b_5 u_{,xx} - b_7 u_{,yy}) n_x \right. \\ \left. + (b_1 v_{,yy} - \frac{2}{5} \mu l_1^2 v_{,xx} - 2b_5 u_{,xy}) n_y \right) = 0 \quad (3.536)$$

$\delta w = 0$ ya da

$$h \left((-b_3 (w_{,xxx} + w_{,xyy}) + \mu k_s (w_{,x} - \varphi_1) \right. \\ \left. - 2b_7 \varphi_{1,xx} + b_{26} \varphi_{1,yy} + \frac{2}{5} \mu l_1^2 \varphi_{2,xy}) n_x \right. \\ \left. + (-b_3 (w_{,yyy} + w_{,xxy}) + \mu k_s (w_{,y} - \varphi_2) \right. \\ \left. - 2b_7 \varphi_{2,yy} - b_{26} \varphi_{2,xx} + \frac{2}{5} \mu l_1^2 \varphi_{1,xy}) n_y \right) = 0 \quad (3.537)$$

$$\delta w_{,x} = 0 \text{ ya da } h \left((b_3 w_{,xx} - b_{23} w_{,yy} + 2b_7 \varphi_{1,x} + 4b_{21} \varphi_{2,y}) n_x \right. \\ \left. + (b_{27} w_{,xy} - b_{26} (\varphi_{1,y} + \varphi_{2,x})) n_y \right) = 0 \quad (3.538)$$

$$\delta w_{,y} = 0 \text{ ya da } h \left((b_{27} w_{,xy} - b_{26} (\varphi_{1,y} + \varphi_{2,x})) n_y \right. \\ \left. + (b_3 w_{,xx} - b_{23} w_{,yy} + 2b_7 \varphi_{1,x} + 4b_{21} \varphi_{2,y}) n_x \right) = 0 \quad (3.539)$$

$$\delta \varphi_1 = 0 \text{ ya da } h \left((2b_7 w_{,xx} + 4b_{21} w_{,yy} - b_2 \frac{h^2}{24} \varphi_{1,xyy} - b_1 \frac{h^2}{12} \varphi_{1,xxx} + r_{31} \varphi_{1,x} \right. \\ \left. + b_4 \frac{h^2}{12} \varphi_{2,xyy} + b_5 \frac{h^2}{12} \varphi_{2,yyy} + r_{32} \varphi_{2,y}) n_x \right. \\ \left. + (-2b_{26} w_{,xy} + r_{34} \varphi_{1,y} + r_{33} \varphi_{2,x}) n_y \right) = 0$$

$$-b_3 \frac{h^2}{12} \varphi_{1,yyy} - b_2 \frac{h^2}{24} \varphi_{1,xyy} + b_7 \frac{h^2}{12} \varphi_{2,xxx} + b_6 \frac{h^2}{12} \varphi_{2,xyy} \Big) n_y = 0 \quad (3.540)$$

$$\delta \varphi_{1,x} = 0 \text{ ya da } h \left(\left(b_1 \frac{h^2}{12} \varphi_{1,xx} - \frac{h^2}{30} \mu l_1^2 \varphi_{1,yy} - b_5 \frac{h^2}{6} \varphi_{2,xy} \right) n_x \right. \\ \left. + \left(b_{20} \frac{h^2}{12} \varphi_{1,xy} - b_7 \frac{h^2}{12} \varphi_{2,xx} - b_5 \frac{h^2}{12} \varphi_{2,yy} \right) n_y \right) = 0 \quad (3.541)$$

$$\delta \varphi_{1,y} = 0 \text{ ya da } h \left(\left(b_{20} \frac{h^2}{12} \varphi_{1,xy} - b_7 \frac{h^2}{12} \varphi_{2,xx} - b_5 \frac{h^2}{12} \varphi_{2,yy} \right) n_x \right. \\ \left. + \left(-\frac{h^2}{30} \mu l_1^2 \varphi_{1,xx} - b_7 \frac{h^2}{6} \varphi_{2,xy} + b_3 \frac{h^2}{12} \varphi_{1,yy} \right) n_y \right) = 0 \quad (3.542)$$

$$\delta \varphi_2 = 0 \text{ ya da } h \left(\left(-2b_{26} w_{,xy} + r_{33} \varphi_{1,y} + r_{34} \varphi_{2,x} \right. \right. \\ \left. \left. - b_3 \frac{h^2}{12} \varphi_{2,xxx} - b_2 \frac{h^2}{24} \varphi_{2,xyy} + b_7 \frac{h^2}{12} \varphi_{1,yyy} + b_6 \frac{h^2}{12} \varphi_{1,xyy} \right) n_x \right. \\ \left. + \left(2b_7 w_{,yy} + 4b_{21} w_{,xx} - b_2 \frac{h^2}{24} \varphi_{2,xyy} - b_1 \frac{h^2}{12} \varphi_{2,yyy} + r_{31} \varphi_{2,y} \right. \right. \\ \left. \left. + b_4 \frac{h^2}{12} \varphi_{1,xyy} + b_5 \frac{h^2}{12} \varphi_{1,xxx} + r_{32} \varphi_{1,x} \right) n_y \right) = 0 \quad (3.543)$$

$$\delta \varphi_{2,x} = 0 \text{ ya da } h \left(\left(-\frac{h^2}{30} \mu l_1^2 \varphi_{2,yy} - b_7 \frac{h^2}{6} \varphi_{1,xy} + b_3 \frac{h^2}{12} \varphi_{2,xx} \right) n_x \right. \\ \left. + \left(b_{20} \frac{h^2}{12} \varphi_{2,xy} - b_7 \frac{h^2}{12} \varphi_{1,yy} - b_5 \frac{h^2}{12} \varphi_{1,xx} \right) n_y \right) = 0 \quad (3.544)$$

$$\delta \varphi_{2,y} = 0 \text{ ya da } h \left(\left(b_{20} \frac{h^2}{12} \varphi_{2,xy} - b_7 \frac{h^2}{12} \varphi_{1,yy} - b_5 \frac{h^2}{12} \varphi_{1,xx} \right) n_x \right. \\ \left. + \left(b_1 \frac{h^2}{12} \varphi_{2,yy} - \frac{h^2}{30} \mu l_1^2 \varphi_{2,xx} - b_5 \frac{h^2}{6} \varphi_{1,xy} \right) n_y \right) = 0 \quad (3.545)$$

Ayrıca, yukarıdaki denklemlerde ilave malzeme boyut ölçek parametrelerinden ilk ikisi (l_0 ve l_1) ve tamamı sıfır alındığında Mindlin mikro plak modeline ait eğilme, burkulma ve serbest titreşim için genel yönetici denklemler sırasıyla değiştirilmiş gerilme çifti elastisite teorisine

$$\delta u: h \left(\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{4} \mu l_2^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) \right. \\ \left. + \frac{E}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1}{4} \mu l_2^2 \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 v}{\partial x \partial y^3} \right) \right) + f_x = m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.546)$$

$$\begin{aligned} \delta v: h \left(\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{4} \mu l_2^2 \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \right) \right. \\ \left. + \frac{E}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1}{4} \mu l_2^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} \right) \right) + f_y = m_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.547)$$

$$\begin{aligned} \delta w: h \left(k_s \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \mu l_2^2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial y^3} \right) \right) \\ q - k_w w + k_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \left(P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2P_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.548)$$

$$\begin{aligned} \delta \varphi_1: h \left(k_s \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_1 \right) + \frac{1}{4} \mu l_2^2 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{E h^2}{12(1-\nu^2)} + \frac{1}{4} \mu l_2^2 \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right) + \mu \left(\frac{h^2}{12} + l_2^2 \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{E h^2}{24(1-\nu)} - \frac{3}{4} \mu l_2^2 \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \right) \right. \\ \left. - \frac{h^2}{48} \mu l_2^2 \left(\frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial y^4} - \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial x^3 \partial y} - \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial x \partial y^3} \right) \right) = m_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.549)$$

$$\begin{aligned} \delta \varphi_2: h \left(k_s \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_2 \right) + \frac{1}{4} \mu l_2^2 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{E h^2}{12(1-\nu^2)} + \frac{1}{4} \mu l_2^2 \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right) + \mu \left(\frac{h^2}{12} + l_2^2 \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{E h^2}{24(1-\nu)} - \frac{3}{4} \mu l_2^2 \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) \right. \\ \left. - \frac{h^2}{48} \mu l_2^2 \left(\frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial x \partial y^3} - \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial x^3 \partial y} \right) \right) = m_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.550)$$

ve klasik (Cauchy) elastisite teorisine göre

$$\delta u: h \left(\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{E}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right) + f_x = m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.551)$$

$$\delta v: h \left(\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{E}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right) + f_y = m_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3.552)$$

$$\begin{aligned} \delta w: h \left(k_s \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right) \\ + q - k_w w + k_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \left(P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2P_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.553)$$

$$\delta \varphi_1: h \left(k_s \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_1 \right) + \frac{E h^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right) \right)$$

$$+ \frac{h^2}{12} \mu \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right) + \frac{Eh^2}{24(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \right) = m_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \quad (3.554)$$

$$\delta \varphi_2: h \left(k_s \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_2 \right) + \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right) + \frac{h^2}{12} \mu \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right) + \frac{Eh^2}{24(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) \right) = m_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \quad (3.555)$$

biçimlerinde ulaşılır.

3.1.2.3. Sinüzoidal mikro plak modeli

Sinüzoidal (trigonometrik kayma deformasyonlu) plak teorisine göre başlangıçta düz bir plağın deplasman bileşenleri aşağıdaki gibi yazılabilir (Touratier 1991)

$$u_1(x, y, z, t) = u(x, y, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} + \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} - \varphi_1(x, y, t) \right) \quad (3.556)$$

$$u_2(x, y, z, t) = v(x, y, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} + \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} - \varphi_2(x, y, t) \right) \quad (3.557)$$

$$u_3(x, z, t) = w(x, y, t) \quad (3.558)$$

burada u_1 , u_2 ve u_3 sırasıyla deplasman vektörünün x , y ve z bileşenleri, u , v ve w plak orta düzlemi üzerindeki herhangi bir noktanın deplasmanları, φ_1 ve φ_2 plak orta düzleminin sırasıyla y ve x eksenini etrafında dönme açılarıdır. Denklemler (3.556–3.558)'in, Denklem (3.3)'te kullanılması ile şekil değiştirme bileşenlerine

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \quad (3.559)$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2 \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) \right) \quad (3.560)$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_1 \right) \quad (3.561)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \quad (3.562)$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_2 \right) \quad (3.563)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0 \quad (3.564)$$

ulaşılır. Denklemler (3.559–3.564) ile Denklem (3.4)'ten, dilatasyon (genleşme) değişimi vektörü bileşenlerine

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\partial(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}\right) \\ &+ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y}\right) \end{aligned} \quad (3.565)$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \frac{\partial(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y}\right) \\ &+ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2}\right) \end{aligned} \quad (3.566)$$

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= \frac{\partial(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})}{\partial z} \\ &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right) + \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right) \end{aligned} \quad (3.567)$$

ulaşılır. Benzer biçimde Denklemler (3.559–3.564)'ün Denklem (3.5)'te kullanılması sonucunda deviatorik uzama değişimi tansörünün bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \eta_{111}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(3 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} \right) \right) - \frac{3}{15} \left[\frac{\partial(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right] = \frac{2}{5} \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \\ &= \frac{1}{5} \left[2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \right) \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - 3 \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right) + \frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_1 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.568)$$

$$\begin{aligned} \eta_{112}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left[8 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) + 4 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right) - 12z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right. \\ &\left. + 12 \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - 3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right) \right) \right. \\ &\left. + \frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_2 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.569)$$

$$\begin{aligned} \eta_{113}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left[-4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 8 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) - 2 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.570)$$

$$\begin{aligned}
\eta_{121}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right) \\
&= \frac{1}{15} \left[8 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) + 4 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right) - 12z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right. \\
&\quad + 12 \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - 3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right) \right) \\
&\quad \left. + \frac{\pi}{h} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_2 \right) \right] \tag{3.571}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{122}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right) \\
&= \frac{1}{15} \left[8 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \right) + 4 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right) - 12z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right. \\
&\quad + 12 \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - 3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right) \right) \\
&\quad \left. + \frac{\pi}{h} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_1 \right) \right] \tag{3.572}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{123}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} [0] \\
&= \frac{1}{3} \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) \right] \tag{3.573}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{131}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) \\
&= \frac{1}{15} \left[-4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 8 \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) - 2 \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right] \tag{3.574}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{132}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} [0] \\
&= \frac{1}{3} \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) \right] \tag{3.575}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{133}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right) \\
&= \frac{1}{15} \left[-2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + 3z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -3 \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - 3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right) \right) \\
& -4 \frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_1 \right) \quad (3.576)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{211}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right) \\
&= \frac{1}{15} \left[8 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) + 4 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right) - 12z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right. \\
&+ 12 \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - 3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right) \right) \\
&\left. + \frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_2 \right) \right] \quad (3.577)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{212}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right) \\
&= \frac{1}{15} \left[8 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \right) + 4 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right) - 12z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right. \\
&+ 12 \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - 3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right) \right) \\
&\left. + \frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_1 \right) \right] \quad (3.578)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{213}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} [0] \\
&= \frac{1}{3} \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) \right] \quad (3.579)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{221}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right) \\
&= \frac{1}{15} \left[8 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \right) + 4 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right) - 12z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right. \\
&+ 12 \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - 3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right) \right) \\
&\left. + \frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_1 \right) \right] \quad (3.580)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{222}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(3 \left(\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} \right) \right) - \frac{3}{15} \left[\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right] \\
&= \frac{1}{5} \left[2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 3z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right) + \frac{\pi}{h} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_2 \right) \right] \quad (3.581)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{223}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) \\
&= \frac{1}{15} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 8 \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) - 2 \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \right] \quad (3.582)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{231}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} [0] \\
&= \frac{1}{3} \left[- \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) \right] \quad (3.583)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{232}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) \\
&= \frac{1}{15} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 8 \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) - 2 \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \right] \quad (3.584)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{233}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right) \\
&= \frac{1}{15} \left[-2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + 3z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right. \\
&\quad \left. - 3 \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - 3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - 4 \frac{\pi}{h} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_2 \right) \right] \quad (3.585)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{311}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) \\
&= \frac{1}{15} \left[-4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 8 \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) - 2 \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right] \quad (3.586)
\end{aligned}$$

$$\eta_{312}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} [0]$$

$$= \frac{1}{3} \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) \right] \quad (3.587)$$

$$\begin{aligned} \eta_{313}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left[-2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + 3z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right. \\ &\quad \left. - 3 \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - 3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - 4 \frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_1 \right) \right] \quad (3.588) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_{321}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} [0] \\ &= \frac{1}{3} \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) \right] \quad (3.589) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_{322}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 8 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) - 2 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \right] \quad (3.590) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_{323}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left[-2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + 3z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right. \\ &\quad \left. - 3 \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - 3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - 4 \frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_2 \right) \right] \quad (3.591) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_{331}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left[-2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + 3z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right. \\ &\quad \left. - 3 \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - 3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

$$-4 \frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_1\right)] \quad (3.592)$$

$$\begin{aligned} \eta_{332}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial y} \right) - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{15} \left[-2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + 3z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right. \\ &\quad \left. - 3 \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - 3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - 4 \frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_2 \right) \right] \quad (3.593) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_{333}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(3 \left(\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right) - \frac{3}{15} \left[\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} \right) \right] \\ &= \frac{1}{5} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right] \quad (3.594) \end{aligned}$$

Denklemler (3.556–3.558) ve Denklem (1.7)'den dönme değişimi vektörünün bileşenleri

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \left(e_{123} \frac{\partial u_3}{\partial y} + e_{132} \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_2 \right) \quad (3.595)$$

$$\theta_2 = \frac{1}{2} \left(e_{231} \frac{\partial u_1}{\partial z} + e_{213} \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_1 \right) \quad (3.596)$$

$$\theta_3 = \frac{1}{2} \left(e_{312} \frac{\partial u_2}{\partial x} + e_{321} \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) \right) \quad (3.597)$$

olarak yazılır ve bunların Denklem (3.6)'da kullanılması ile dönme değişimi tansörünün simetrik parçasının bileşenleri

$$\chi_{11}^s = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) \quad (3.598)$$

$$\begin{aligned} \chi_{12}^s &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right] \quad (3.599) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_{13}^s &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial z} + \frac{\partial \theta_3}{\partial x} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_2 \right) \right] \quad (3.600) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi_{21}^s &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x} + \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right]\end{aligned}\quad (3.601)$$

$$\chi_{22}^s = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) \quad (3.602)$$

$$\begin{aligned}\chi_{23}^s &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial z} + \frac{\partial \theta_3}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right) - \frac{\pi}{h} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_1 \right) \right]\end{aligned}\quad (3.603)$$

$$\begin{aligned}\chi_{31}^s &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial x} + \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\pi}{h} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_2 \right) \right]\end{aligned}\quad (3.604)$$

$$\begin{aligned}\chi_{32}^s &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial z} + \frac{\partial \theta_3}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right) - \frac{\pi}{h} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_1 \right) \right]\end{aligned}\quad (3.605)$$

$$\chi_{33}^s = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial \theta_3}{\partial z} \right) = -\frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) \quad (3.606)$$

şeklinde elde edilir. Yukarıda yer alan şekil değiştirme bileşenleri düzenlendikten sonra sıfırdan farklı olanları aşağıda verilmiştir.

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \quad (3.607)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2 \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right. \\ &\quad \left. - \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) \right)\end{aligned}\quad (3.608)$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_1 \right) \quad (3.609)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \quad (3.610)$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_2 \right) \quad (3.611)$$

$$\gamma_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right)$$

$$+ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \right) \quad (3.612)$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) \\ &+ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (3.613)$$

$$\gamma_3 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) + \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \quad (3.614)$$

$$\begin{aligned} \eta_{111}^{(1)} &= \frac{1}{5} \left[2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \right) \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - 3 \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right) + \frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_1 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.615)$$

$$\begin{aligned} \eta_{112}^{(1)} = \eta_{121}^{(1)} = \eta_{211}^{(1)} &= \frac{1}{15} \left[8 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) + 4 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right) \right. \\ &\left. - 12z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 12 \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - 3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right) \right) \right. \\ &\left. + \frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_2 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.616)$$

$$\begin{aligned} \eta_{113}^{(1)} = \eta_{131}^{(1)} = \eta_{311}^{(1)} &= \frac{1}{15} \left[-4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 8 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \right. \\ &\left. - 2 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.617)$$

$$\begin{aligned} \eta_{122}^{(1)} = \eta_{212}^{(1)} = \eta_{221}^{(1)} &= \frac{1}{15} \left[8 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \right) + 4 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right) \right. \\ &\left. - 12z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + 12 \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - 3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right) \right) \right. \\ &\left. + \frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_1 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.618)$$

$$\begin{aligned} \eta_{123}^{(1)} = \eta_{132}^{(1)} = \eta_{213}^{(1)} = \eta_{231}^{(1)} = \eta_{312}^{(1)} = \eta_{321}^{(1)} \\ = \frac{1}{3} \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.619)$$

$$\eta_{133}^{(1)} = \eta_{313}^{(1)} = \eta_{331}^{(1)} = \frac{1}{15} \left[-2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + 3z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - 3 \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - 3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right) \right) \\
& - 4 \frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_1 \right) \quad (3.620)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{222}^{(1)} &= \frac{1}{5} \left[2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) \right) \right. \\
& \left. - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 3z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right) + \frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_2 \right) \right] \quad (3.621)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{223}^{(1)} &= \eta_{232}^{(1)} = \eta_{322}^{(1)} = \frac{1}{15} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 8 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right. \\
& \left. - 2 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \right] \quad (3.622)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{233}^{(1)} &= \eta_{323}^{(1)} = \eta_{332}^{(1)} = \frac{1}{15} \left[-2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right. \\
& \left. + 3z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - 3 \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - 3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right) \right) \right. \\
& \left. - 4 \frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_2 \right) \right] \quad (3.623)
\end{aligned}$$

$$\eta_{333}^{(1)} = \frac{1}{5} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right] \quad (3.624)$$

$$\chi_{11}^s = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) \quad (3.625)$$

$$\chi_{12}^s = \chi_{21}^s = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right] \quad (3.626)$$

$$\begin{aligned}
\chi_{13}^s &= \chi_{31}^s = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) \right. \\
& \left. + \frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_2 \right) \right] \quad (3.627)
\end{aligned}$$

$$\chi_{22}^s = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) \quad (3.628)$$

$$\begin{aligned}
\chi_{23}^s &= \chi_{32}^s = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right) \right. \\
& \left. - \frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_1 \right) \right] \quad (3.629)
\end{aligned}$$

$$\chi_{33}^s = -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right) \quad (3.630)$$

Yukarıdaki şekil değiştirme bileşenlerinin Denklemler (3.10–3.13)'te yerlerine yazılması sonucunda sıfırdan farklı klasik ve yüksek mertebeden gerilme bileşenleri

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \right. \\ & \left. + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (3.631)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12} = \sigma_{21} = & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2 \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right. \\ & \left. - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.632)$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = \mu \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_1 \right) \quad (3.633)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} = & \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right. \\ & \left. + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (3.634)$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = \mu \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_2 \right) \quad (3.635)$$

$$\begin{aligned} p_1 = & 2\mu l_0^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.636)$$

$$\begin{aligned} p_2 = & 2\mu l_0^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.637)$$

$$p_3 = 2\mu l_0^2 \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) + \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right] \quad (3.638)$$

$$\begin{aligned} \tau_{111}^{(1)} = & \frac{2}{5} \mu l_1^2 \left[2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \right) \right) \right. \\ & \left. - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - 3 \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right) + \frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_1 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.639)$$

$$\begin{aligned} \tau_{112}^{(1)} = \tau_{121}^{(1)} = \tau_{211}^{(1)} = \frac{2}{15} \mu l_1^2 & \left[8 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) + 4 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right) \right. \\ & - 12z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 12 \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - 3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right) \right) \\ & \left. + \frac{\pi}{h} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_2 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.640)$$

$$\begin{aligned} \tau_{113}^{(1)} = \tau_{131}^{(1)} = \tau_{311}^{(1)} = \frac{2}{15} \mu l_1^2 & \left[-4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 8 \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \right. \\ & \left. - 2 \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.641)$$

$$\begin{aligned} \tau_{122}^{(1)} = \tau_{212}^{(1)} = \tau_{221}^{(1)} = \frac{2}{15} \mu l_1^2 & \left[8 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \right) + 4 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right) \right. \\ & - 12z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + 12 \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - 3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right) \right) \\ & \left. + \frac{\pi}{h} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_1 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.642)$$

$$\begin{aligned} \tau_{123}^{(1)} = \tau_{132}^{(1)} = \tau_{213}^{(1)} = \tau_{231}^{(1)} = \tau_{312}^{(1)} = \tau_{321}^{(1)} \\ = \frac{2}{3} \mu l_1^2 & \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.643)$$

$$\begin{aligned} \tau_{133}^{(1)} = \tau_{313}^{(1)} = \tau_{331}^{(1)} = \frac{2}{15} \mu l_1^2 & \left[-2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right. \\ & + 3z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - 3 \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - 3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right) \right) \\ & \left. - 4 \frac{\pi}{h} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_1 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.644)$$

$$\begin{aligned} \tau_{222}^{(1)} = \frac{2}{5} \mu l_1^2 & \left[2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) \right) \right. \\ & \left. - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 3z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right) + \frac{\pi}{h} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_2 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.645)$$

$$\begin{aligned} \tau_{223}^{(1)} = \tau_{232}^{(1)} = \tau_{322}^{(1)} = \frac{2}{15} \mu l_1^2 & \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 8 \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right. \\ & \left. - 2 \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.646)$$

$$\begin{aligned} \tau_{233}^{(1)} = \tau_{323}^{(1)} = \tau_{332}^{(1)} = \frac{2}{15} \mu l_1^2 \left[-2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right. \\ \left. + 3z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - 3 \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - 3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right) \right) \right. \\ \left. - 4 \frac{\pi}{h} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_2 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.647)$$

$$\tau_{333}^{(1)} = \frac{2}{5} \mu l_1^2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right] \quad (3.648)$$

$$m_{11}^s = \mu l_2^2 \left[2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) \right] \quad (3.649)$$

$$m_{12}^s = m_{21}^s = -\mu l_2^2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right] \quad (3.650)$$

$$\begin{aligned} m_{13}^s = m_{31}^s = \frac{\mu l_2^2}{2} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) \right. \\ \left. + \frac{\pi}{h} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_2 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.651)$$

$$m_{22}^s = \mu l_2^2 \left[-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) \right] \quad (3.652)$$

$$\begin{aligned} m_{23}^s = m_{32}^s = \frac{\mu l_2^2}{2} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right) \right. \\ \left. - \frac{\pi}{h} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_1 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.653)$$

$$m_{33}^s = -\mu l_2^2 \left[\cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) \right] \quad (3.654)$$

şeklinde elde edilir. Yukarıdaki denklemlerden faydalanarak mikro plak için toplam şekil değiştirme enerjisinin birinci varyasyonu trigonometrik kayma deformasyonlu plak teorisi için aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \delta U_p^S &= \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + p_i \delta \gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)} \delta \eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij}^s \delta \chi_{ij}^s \right) dz dA \\ &= \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + 2\sigma_{12} \delta \varepsilon_{12} + 2\sigma_{13} \delta \varepsilon_{13} + \sigma_{22} \delta \varepsilon_{22} + 2\sigma_{23} \delta \varepsilon_{23} \right. \\ &\quad \left. + p_1 \delta \gamma_1 + p_2 \delta \gamma_2 + p_3 \delta \gamma_3 + \tau_{111}^{(1)} \delta \eta_{111}^{(1)} + 3\tau_{112}^{(1)} \delta \eta_{112}^{(1)} + 3\tau_{113}^{(1)} \delta \eta_{113}^{(1)} \right. \\ &\quad \left. + 3\tau_{122}^{(1)} \delta \eta_{122}^{(1)} + 6\tau_{123}^{(1)} \delta \eta_{123}^{(1)} + 3\tau_{133}^{(1)} \delta \eta_{133}^{(1)} + \tau_{222}^{(1)} \delta \eta_{222}^{(1)} + 3\tau_{223}^{(1)} \delta \eta_{223}^{(1)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3\tau_{233}^{(1)}\delta\eta_{233}^{(1)} + \tau_{333}^{(1)}\delta\eta_{333}^{(1)} + m_{11}^s\delta\chi_{11}^s \\
& + 2m_{12}^s\delta\chi_{12}^s + 2m_{13}^s\delta\chi_{13}^s + m_{22}^s\delta\chi_{22}^s + 2m_{23}^s\delta\chi_{23}^s + m_{33}^s\delta\chi_{33}^s)dz dA \quad (3.655)
\end{aligned}$$

Mikro plağın kinetik enerjisi sinüzoidal plak teorisine göre

$$\begin{aligned}
K_p^S &= \frac{1}{2} \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} \right)^2 \right] dz dA \\
&= \frac{1}{2} \rho \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right) \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial v}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} + \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right) \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dz dA \quad (3.656)
\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Burada ρ mikro plak malzemesinin kütle yoğunluğu olup kinetik enerjinin $[0, T]$ aralığında birinci varyasyonu

$$\begin{aligned}
\delta \int_0^T K_p^S dt &= \int_0^T \int_A \left[- \left(m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \delta u - \left(m_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \delta v \right. \\
&\quad + \left(-m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (m_2 - 2m_3 + m_4) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + (m_3 - m_4) \left(\frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial y \partial t^2} \right) \right) \delta w \\
&\quad - \left((m_3 - m_4) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + m_4 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right) \delta \varphi_1 \\
&\quad \left. - \left((m_3 - m_4) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} + m_4 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right) \delta \varphi_2 \right] dA dt \quad (3.657)
\end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir. Burada m_0 , m_2 , m_3 ve m_4 kütle ataletleri olup

$$(m_0, m_2, m_3, m_4) = \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(1, z^2, z \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right), \left(\frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \right)^2 \right) dz \quad (3.658)$$

şeklinde tanımlanabilir. Diğer taraftan dış kuvvetlerin yaptığı işin birinci varyasyonu

$$\begin{aligned}
\delta W_p^S &= \int_A (f_x \delta u + f_y \delta v \\
&\quad + \left(q - k_w w + k_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \left(P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2P_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta w \right) dx dy \quad (3.659)
\end{aligned}$$

şeklinde verilebilir. Burada f_x, f_y ve $q(x, y)$ eksenel ve enine yayılı yükler olup P_x, P_y ve P_{xy} ise sırasıyla x ve y doğrultularında uygulanan basınç ve kesme kuvvetleridir. Ayrıca, k_w ve k_p sırasıyla Winkler ve Pasternak elastik zemin modellerine ait katsayılarıdır. Hamilton prensibine göre Denklemler (3.655), (3.657) ve (3.659)'dan değiştirilmiş şekil değiştirme değişimi elastisite teorisine göre sinüzoidal (trigonometrik kayma deformasyonlu) mikro plak modeline ait eğilme, burkulma ve serbest titreşim için genel yönetici denklemler aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\begin{aligned} \delta u: h \left(\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - b_1 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - b_2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} - b_3 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right. \\ \left. + \frac{E}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - (b_2 - 2b_3) \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 v}{\partial x \partial y^3} \right) \right) + f_x = m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.660)$$

$$\begin{aligned} \delta v: h \left(\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - b_1 \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} - b_2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} - b_3 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \right. \\ \left. + \frac{E}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) - (b_2 - 2b_3) \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} \right) \right) + f_y = m_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.661)$$

$$\begin{aligned} \delta w: h \left(r_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - r_2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) \right. \\ \left. + b_1 r_3 \left(\frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + 3 \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2} + 3 \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^6 w}{\partial y^6} \right) \right. \\ \left. - r_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) - r_4 \left(\frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial y^3} \right) \right. \\ \left. + b_1 r_5 \left(\frac{\partial^5 \varphi_1}{\partial x^5} + \frac{\partial^5 \varphi_1}{\partial x \partial y^4} + 2 \frac{\partial^5 \varphi_1}{\partial x^3 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^5 \varphi_2}{\partial x^2 \partial y^3} + \frac{\partial^5 \varphi_2}{\partial x^4 \partial y} + \frac{\partial^5 \varphi_2}{\partial y^5} \right) \right) \\ + q - k_w w + k_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \left(P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2P_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ - (m_2 - 2m_3 + m_4) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial t^2} \right) - (m_3 - m_4) \left(\frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial y \partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (3.662)$$

$$\begin{aligned} \delta \varphi_1: h \left(r_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_1 \right) + r_4 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) - b_1 r_5 \left(\frac{\partial^5 w}{\partial x^5} + 2 \frac{\partial^5 w}{\partial x^3 \partial y^2} + \frac{\partial^5 w}{\partial x \partial y^4} \right) \right. \\ \left. + r_6 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + r_{10} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + r_8 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} - r_{12} \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial x^4} - r_7 \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial x^2 \partial y^2} - r_{11} \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial y^4} \right. \\ \left. - r_9 \left(\frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial x \partial y^3} \right) \right) = (m_3 - m_4) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + m_4 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.663)$$

$$\delta \varphi_2: h \left(r_1 \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_2 \right) + r_4 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) - b_1 r_5 \left(\frac{\partial^5 w}{\partial y^5} + 2 \frac{\partial^5 w}{\partial x^2 \partial y^3} + \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial y} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
& +r_6 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} + r_{10} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + r_8 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} - r_{12} \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial y^4} - r_7 \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial x^2 \partial y^2} - r_{11} \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial x^4} \\
& - r_9 \left(\frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial x^3 \partial y} \right) = (m_3 - m_4) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} + m_4 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \quad (3.664)
\end{aligned}$$

ve ilgili sınır koşulları

$$\delta u = 0 \text{ ya da}$$

$$\begin{aligned}
& h \left(\left(\frac{E}{1-\nu^2} \right) (u_{,x} + v_{,y}) - b_1 u_{,xxx} - \frac{b_2}{2} u_{,xyy} + b_4 v_{,xxy} + b_5 v_{,yyy} \right) n_x \\
& + \left(\left(\frac{E}{2(1+\nu)} \right) (u_{,y} + v_{,x}) - b_3 u_{,yyy} - \frac{b_2}{2} u_{,xxy} + b_6 v_{,xyy} + b_7 v_{,xxx} \right) n_y = 0 \quad (3.665)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta u_{,x} = 0 \text{ ya da } h \left((b_1 u_{,xx} - \frac{2}{5} \mu l_1^2 u_{,yy} - 2b_5 v_{,xy}) n_x \right. \\
& \left. + (b_{20} u_{,xy} - b_5 v_{,yy} - b_7 v_{,xx}) n_y \right) = 0 \quad (3.666)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta u_{,y} = 0 \text{ ya da } h \left((b_{20} u_{,xy} - b_5 v_{,yy} - b_7 v_{,xx}) n_x \right. \\
& \left. + (b_{22} u_{,yy} - \frac{2}{5} \mu l_1^2 u_{,xx} - 2b_7 v_{,xy}) n_y \right) = 0 \quad (3.667)
\end{aligned}$$

$$\delta v = 0 \text{ ya da}$$

$$\begin{aligned}
& h \left(\left(\frac{E}{2(1+\nu)} \right) (u_{,y} + v_{,x}) - b_3 v_{,xxx} - \frac{b_2}{2} v_{,xyy} + b_6 u_{,xxy} + b_7 u_{,yyy} \right) n_x \\
& + \left(\left(\frac{E\nu}{1-\nu^2} \right) (u_{,x} + v_{,y}) - b_1 v_{,yyy} - \frac{b_2}{2} v_{,xxy} + b_4 u_{,xyy} + b_5 u_{,xxx} \right) n_y = 0 \quad (3.668)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta v_{,x} = 0 \text{ ya da } h \left((b_{22} v_{,xx} - \frac{2}{5} \mu l_1^2 v_{,yy} - 2b_7 u_{,xy}) n_x \right. \\
& \left. + (b_{20} v_{,xy} - b_5 u_{,xx} - b_7 u_{,yy}) n_y \right) = 0 \quad (3.669)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta v_{,y} = 0 \text{ ya da } h \left((b_{20} v_{,xy} - b_5 u_{,xx} - b_7 u_{,yy}) n_x \right. \\
& \left. + (b_1 v_{,yy} - \frac{2}{5} \mu l_1^2 v_{,xx} - 2b_5 u_{,xy}) n_y \right) = 0 \quad (3.670)
\end{aligned}$$

$$\delta w = 0 \text{ ya da } h \left((b_1 r_3 (w_{,xxxxx} + 2w_{,xxxxy} + w_{,xyyyy})) \right)$$

$$\begin{aligned}
& -r_2(w_{,xxx} + w_{,xyy}) + r_1(w_{,x} - \varphi_1) \\
& + b_1 r_5 \varphi_{1,xxxx} + b_8 r_5 \varphi_{1,xyy} + \frac{8}{15} \mu l_1^2 r_5 \varphi_{1,yyy} - r_4 \varphi_{1,xx} - r_{16} \varphi_{1,yy} \\
& + b_9 r_5 (\varphi_{2,xxx} + \varphi_{2,xyy}) - r_{17} \varphi_{2,xy} n_x \\
& + (b_1 r_3 (w_{,yyyy} + 2w_{,xyyy} + w_{,xxxx}) - r_2 (w_{,yyy} + w_{,xxy}) + r_1 (w_{,y} - \varphi_2) \\
& + b_1 r_5 \varphi_{2,yyy} + b_8 r_5 \varphi_{2,xyy} + \frac{8}{15} \mu l_1^2 r_5 \varphi_{2,xxx} - r_4 \varphi_{2,yy} - r_{16} \varphi_{2,xx} \\
& + b_9 r_5 (\varphi_{1,xxx} + \varphi_{1,xyy}) - r_{17} \varphi_{1,xy} n_y) = 0 \tag{3.671}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta w_{,x} = 0 \text{ ya da } h \left((-b_1 r_3 w_{,xxx} - b_{23} r_3 w_{,xyy} - b_{12} r_3 w_{,yyy} \right. \\
+ r_{13} w_{,xx} + r_{14} w_{,yy} - b_1 r_5 \varphi_{1,xxx} - b_{11} r_5 \varphi_{1,xyy} + r_{18} \varphi_{1,x} \\
+ b_{16} r_5 \varphi_{2,xy} - b_{12} r_5 \varphi_{2,yyy} + r_{20} \varphi_{2,y}) n_x \\
+ (-b_{24} r_3 (w_{,xxy} + w_{,xyy}) + r_{15} w_{,xy} + r_{19} (\varphi_{1,y} + \varphi_{2,x}) \\
\left. - \frac{8}{15} \mu l_1^2 r_5 (\varphi_{1,yy} + \varphi_{2,xxx}) - b_{10} r_5 (\varphi_{1,xy} + \varphi_{2,xyy}) \right) n_y) = 0 \tag{3.672}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta w_{,y} = 0 \text{ ya da } h \left((-b_{24} r_3 (w_{,xxy} + w_{,xyy}) + r_{15} w_{,xy} + r_{19} (\varphi_{1,y} + \varphi_{2,x}) \right. \\
\left. - \frac{8}{15} \mu l_1^2 r_5 (\varphi_{1,yy} + \varphi_{2,xxx}) - b_{10} r_5 (\varphi_{1,xy} + \varphi_{2,xyy}) \right) n_x \\
+ (-b_1 r_3 w_{,xxx} - b_{24} r_3 w_{,xyy} - b_{12} r_3 w_{,yyy} \\
+ r_{13} w_{,xx} + r_{14} w_{,yy} - b_1 r_5 \varphi_{1,xxx} - b_{11} r_5 \varphi_{1,xyy} + r_{18} \varphi_{1,x} \\
+ b_{16} r_5 \varphi_{2,xy} - b_{12} r_5 \varphi_{2,yyy} + r_{20} \varphi_{2,y}) n_y) = 0 \tag{3.673}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta w_{,xx} = 0 \text{ ya da } h \left((b_1 r_3 w_{,xxx} + b_{14} r_3 w_{,xyy} - \frac{2\pi^2}{5h^2} \mu l_1^2 r_5 (w_{,x} - \varphi_1) \right. \\
+ b_1 r_5 \varphi_{1,xx} - \frac{2}{5} \mu l_1^2 r_5 \varphi_{1,yy} - 2b_5 r_5 \varphi_{2,xy}) n_x \\
+ (b_{12} r_3 w_{,yyy} + b_{13} r_3 w_{,xxy} - \frac{2\pi^2}{15h^2} \mu l_1^2 r_5 (w_{,y} - \varphi_2) \\
\left. + b_{15} r_5 \varphi_{1,xy} + \frac{8}{15} \mu l_1^2 r_5 \varphi_{2,xx} + b_{12} r_5 \varphi_{2,yy}) n_y) = 0 \tag{3.674}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta w_{,yy} = 0 \text{ ya da } h & \left((b_{12}r_3w_{,xxx} + b_{13}r_3w_{,xyy} - \frac{2\pi^2}{15h^2}\mu l_1^2r_5(w_{,x} - \varphi_1) \right. \\
& + b_{12}r_5\varphi_{1,xx} + \frac{8}{15}\mu l_1^2r_5\varphi_{1,yy} + b_{15}r_5\varphi_{2,xy})n_x \\
& + (b_{13}r_3w_{,yyy} + b_{14}r_3w_{,xxy} - \frac{2\pi^2}{5h^2}\mu l_1^2r_5(w_{,y} - \varphi_2) \\
& \left. + b_{15}r_5\varphi_{2,yy} - \frac{2}{5}\mu l_1^2r_5\varphi_{2,xx} - 2b_5r_5\varphi_{1,xy})n_y \right) = 0 \quad (3.675)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta \varphi_1 = 0 \text{ ya da } h & \left((-b_1r_5w_{,xxxx} - b_{17}r_5w_{,xxyy} + b_5r_5w_{,yyyy} \right. \\
& + r_{21}w_{,xx} + r_{22}w_{,yy} - b_2\frac{h^2}{4\pi^2}\varphi_{1,xyy} - b_1\frac{h^2}{2\pi^2}\varphi_{1,xxx} + r_{24}\varphi_{1,x} \\
& + b_4\frac{h^2}{2\pi^2}\varphi_{2,xyy} + b_5\frac{h^2}{2\pi^2}\varphi_{2,yyy} + r_{25}\varphi_{2,y})n_x \\
& + (-b_{18}r_5(w_{,xxy} + w_{,xyy}) + r_{23}w_{,xy} + r_{27}\varphi_{1,y} + r_{26}\varphi_{2,x} \\
& \left. - b_3\frac{h^2}{2\pi^2}\varphi_{1,yyy} - b_2\frac{h^2}{4\pi^2}\varphi_{1,xyy} + b_7\frac{h^2}{2\pi^2}\varphi_{2,xxx} + b_6\frac{h^2}{2\pi^2}\varphi_{2,xyy})n_y \right) = 0 \quad (3.676)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta \varphi_{1,x} = 0 \text{ ya da } h & \left((b_1r_5w_{,xxx} + b_{14}r_5w_{,xyy} - \frac{1}{5}\mu l_1^2(w_{,x} - \varphi_1) \right. \\
& + b_1\frac{h^2}{2\pi^2}\varphi_{1,xx} - \frac{1h^2}{5\pi^2}\mu l_1^2\varphi_{1,yy} - b_5\frac{h^2}{\pi^2}\varphi_{2,xy})n_x \\
& + (-b_5r_5w_{,yyy} + b_{19}r_5w_{,xxy} - b_{21}(w_{,y} - \varphi_2) \\
& \left. + b_{20}\frac{h^2}{2\pi^2}\varphi_{1,xy} - b_7\frac{h^2}{2\pi^2}\varphi_{2,xx} - b_5\frac{h^2}{2\pi^2}\varphi_{2,yy})n_y \right) = 0 \quad (3.677)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta \varphi_{1,y} = 0 \text{ ya da } h & \left((b_{19}r_5w_{,xxy} - b_5r_5w_{,yyy} - b_{21}(w_{,y} - \varphi_2) \right. \\
& + b_{20}\frac{h^2}{2\pi^2}\varphi_{1,xy} - b_7\frac{h^2}{2\pi^2}\varphi_{2,xx} - b_5\frac{h^2}{2\pi^2}\varphi_{2,yy})n_x \\
& + \left(-\frac{2}{5}\mu l_1^2r_5w_{,xxx} + \frac{8}{5}\mu l_1^2r_5w_{,xyy} - b_{22}(w_{,x} - \varphi_1) \right. \\
& \left. - \frac{1h^2}{5\pi^2}\mu l_1^2\varphi_{1,xx} - b_7\frac{h^2}{\pi^2}\varphi_{2,xy} + b_3\frac{h^2}{2\pi^2}\varphi_{1,yy} \right)n_y \right) = 0 \quad (3.678)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta \varphi_2 = 0 \text{ ya da } h & \left((-b_{18}r_5(w_{,xxy} + w_{,xyy}) + r_{23}w_{,xy} + r_{26}\varphi_{1,y} + r_{27}\varphi_{2,x} \right. \\
& \left. - b_3\frac{h^2}{2\pi^2}\varphi_{2,xxx} - b_2\frac{h^2}{4\pi^2}\varphi_{2,xyy} + b_7\frac{h^2}{2\pi^2}\varphi_{1,yyy} + b_6\frac{h^2}{2\pi^2}\varphi_{1,xyy})n_x \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(-b_1 r_5 w_{,yyyy} - b_{17} r_5 w_{,xxyy} + b_5 r_5 w_{,xxxx} \\
& + r_{21} w_{,yy} + r_{22} w_{,xx} - b_2 \frac{h^2}{4\pi^2} \varphi_{2,xx} - b_1 \frac{h^2}{2\pi^2} \varphi_{2,yyy} + r_{24} \varphi_{2,y} \\
& + b_4 \frac{h^2}{2\pi^2} \varphi_{1,xy} + b_5 \frac{h^2}{2\pi^2} \varphi_{1,xx} + r_{25} \varphi_{1,x}) n_y = 0
\end{aligned} \tag{3.679}$$

$$\begin{aligned}
\delta \varphi_{2,x} = 0 \text{ ya da } h \left(\left(-\frac{2}{5} \mu l_1^2 r_5 w_{,yyy} + \frac{8}{5} \mu l_1^2 r_5 w_{,xxy} - b_{22} (w_{,y} - \varphi_2) \right. \right. \\
\left. \left. - \frac{1h^2}{5\pi^2} \mu l_1^2 \varphi_{2,yy} - b_7 \frac{h^2}{\pi^2} \varphi_{1,xy} + b_3 \frac{h^2}{2\pi^2} \varphi_{2,xx} \right) n_x \right. \\
\left. + (-b_5 r_5 w_{,xxx} + b_{19} r_5 w_{,xy} - b_{21} (w_{,x} - \varphi_1) \right. \\
\left. + b_{20} \frac{h^2}{2\pi^2} \varphi_{2,xy} - b_7 \frac{h^2}{2\pi^2} \varphi_{1,yy} - b_5 \frac{h^2}{2\pi^2} \varphi_{1,xx} \right) n_y = 0
\end{aligned} \tag{3.680}$$

$$\begin{aligned}
\delta \varphi_{2,y} = 0 \text{ ya da } h \left(\left(-b_5 r_5 w_{,xxx} + b_{19} r_5 w_{,xy} - b_{21} (w_{,x} - \varphi_1) \right. \right. \\
\left. \left. + b_{20} \frac{h^2}{2\pi^2} \varphi_{2,xy} - b_7 \frac{h^2}{2\pi^2} \varphi_{1,yy} - b_5 \frac{h^2}{2\pi^2} \varphi_{1,xx} \right) n_x \right. \\
\left. + \left(b_1 r_5 w_{,yyy} + b_{14} r_5 w_{,xxy} - \frac{1}{5} \mu l_1^2 (w_{,y} - \varphi_2) \right. \right. \\
\left. \left. + b_1 \frac{h^2}{2\pi^2} \varphi_{2,yy} - \frac{1h^2}{5\pi^2} \mu l_1^2 \varphi_{2,xx} - b_5 \frac{h^2}{\pi^2} \varphi_{1,xy} \right) n_y = 0
\end{aligned} \tag{3.681}$$

burada

$$\begin{aligned}
b_1 &= 2\mu \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right), b_2 = \mu \left(2l_0^2 + \frac{4}{3} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right), b_3 = \mu \left(\frac{8}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right), \\
b_4 &= \mu \left(-2l_0^2 + \frac{4}{15} l_1^2 + \frac{1}{8} l_2^2 \right), b_5 = \mu \left(-l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right), b_6 = \mu \left(-l_0^2 - \frac{2}{3} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right), \\
b_7 &= \mu \left(-\frac{8}{15} l_1^2 + \frac{1}{8} l_2^2 \right), b_8 = 2\mu \left(l_0^2 + \frac{2}{3} l_1^2 \right), b_9 = 2\mu \left(l_0^2 + \frac{2}{15} l_1^2 \right), \\
b_{10} &= \frac{2}{3} \mu (2l_0^2 + l_1^2), b_{11} = \frac{2}{3} \mu (l_0^2 + l_1^2), b_{12} = 2\mu \left(\frac{1}{3} l_0^2 - \frac{1}{5} l_1^2 \right), \\
b_{13} &= 2\mu \left(\frac{1}{3} l_0^2 + \frac{4}{5} l_1^2 \right), b_{14} = 2\mu \left(l_0^2 - \frac{3}{5} l_1^2 \right), b_{15} = \frac{2}{3} \mu \left(l_0^2 + \frac{8}{5} l_1^2 \right), \\
b_{16} &= 2\mu \left(-l_0^2 + \frac{2}{15} l_1^2 \right), b_{17} = \mu \left(3l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right), b_{18} = \mu \left(l_0^2 + \frac{6}{5} l_1^2 \right), \\
b_{19} &= \mu \left(l_0^2 + \frac{8}{5} l_1^2 \right), b_{20} = \mu \left(l_0^2 + \frac{16}{15} l_1^2 + \frac{1}{8} l_2^2 \right), b_{21} = \mu \left(\frac{1}{15} l_1^2 - \frac{1}{16} l_2^2 \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{22} &= \mu \left(\frac{1}{15} l_1^2 + \frac{1}{8} l_2^2 \right), b_{23} = 2\mu \left(\frac{4}{3} l_0^2 + \frac{1}{5} l_1^2 \right), \\
b_{24} &= 2\mu \left(\frac{2}{3} l_0^2 + \frac{3}{5} l_1^2 \right), b_{25} = \mu \left(\frac{2}{3} l_1^2 - \frac{1}{4} l_2^2 \right)
\end{aligned} \tag{3.682}$$

ve

$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{\mu}{2} + \frac{\pi^2}{2h^2} b_3, \\
r_2 &= \frac{Eh^2}{1-v^2} \left(\frac{1}{12} - \frac{4}{\pi^3} + \frac{1}{2\pi^2} \right) + 2\mu l_0^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) + \frac{8}{15} \mu l_1^2 \left(\frac{9}{4} - \frac{5}{\pi} \right) + \mu l_2^2 \left(\frac{9}{8} - \frac{2}{\pi} \right), \\
r_3 &= h^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{4}{\pi^3} + \frac{1}{2\pi^2} \right), \\
r_4 &= \frac{Eh^2}{(1-v^2)\pi^2} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) + 2\mu l_0^2 \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) + \frac{4}{3} \mu l_1^2 \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \right) + \mu l_2^2 \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{8} \right), \\
r_5 &= \frac{h^2}{\pi^2} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right), r_6 = \frac{Eh^2}{2(1-v^2)\pi^2} + \mu l_0^2 + \frac{2}{3} \mu l_1^2 + \frac{1}{8} \mu l_2^2, r_7 = \frac{h^2}{2\pi^2} b_2, \\
r_8 &= \frac{Eh^2}{4(1-v)\pi^2} + \mu l_0^2 + \frac{2}{15} \mu l_1^2 - \frac{1}{8} \mu l_2^2, r_9 = \mu \frac{h^2}{\pi^2} \left(l_0^2 + \frac{2}{15} l_1^2 - \frac{1}{8} l_2^2 \right), \\
r_{10} &= \frac{\mu h^2}{2\pi^2} + b_3, r_{11} = b_3 \frac{h^2}{2\pi^2}, r_{12} = b_1 \frac{h^2}{2\pi^2}, \\
r_{13} &= \frac{Eh^2}{1-v^2} \left(\frac{1}{12} - \frac{4}{\pi^3} + \frac{1}{2\pi^2} \right) + 2\mu l_0^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) + \frac{1}{5} \mu l_1^2 \left(7 - \frac{52}{3\pi} \right) + \mu l_2^2 \left(\frac{9}{8} - \frac{2}{\pi} \right), \\
r_{14} &= \frac{Ev h^2}{1-v^2} \left(\frac{1}{12} - \frac{4}{\pi^3} + \frac{1}{2\pi^2} \right) + 2\mu l_0^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) + \mu l_1^2 \left(\frac{4}{3\pi} - \frac{7}{15} \right) - \mu l_2^2 \left(\frac{9}{8} - \frac{2}{\pi} \right), \\
r_{15} &= \frac{Eh^2}{1+v} \left(\frac{1}{12} - \frac{4}{\pi^3} + \frac{1}{2\pi^2} \right) + \frac{4}{5} \mu l_1^2 \left(\frac{7}{3} - \frac{6}{\pi} \right) + \mu l_2^2 \left(\frac{9}{4} - \frac{4}{\pi} \right), \\
r_{16} &= \frac{Eh^2}{2(1+v)\pi^2} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) + \frac{8}{15} \mu l_1^2 \left(\frac{2}{\pi} - 1 \right) + \frac{\mu l_2^2}{\pi}, \\
r_{17} &= \frac{Eh^2}{2(1-v)\pi^2} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) + 2\mu l_0^2 \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{15} \mu l_1^2 \left(\frac{2}{\pi} - 1 \right) - \frac{1}{8} \mu l_2^2, \\
r_{18} &= \frac{Eh^2}{(1-v^2)\pi^2} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) + 2\mu l_0^2 \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} \mu l_1^2 \left(\frac{4}{\pi} - \frac{13}{5} \right) + \mu l_2^2 \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{8} \right), \\
r_{19} &= \frac{Eh^2}{2(1+v)\pi^2} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{5} \mu l_1^2 \left(\frac{16}{3\pi} - 3 \right) + \mu l_2^2 \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{8} \right), \\
r_{20} &= \frac{Ev h^2}{(1-v^2)\pi^2} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) + 2\mu l_0^2 \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) - \mu l_1^2 \left(\frac{4}{5\pi} - \frac{1}{3} \right) - \mu l_2^2 \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{8} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{21} &= \frac{Eh^2}{(1-\nu^2)\pi^2} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) + 2\mu l_0^2 \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) + \mu l_1^2 \left(\frac{32}{15\pi} - \frac{13}{15} \right) + \mu l_2^2 \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{8} \right), \\
r_{22} &= \frac{E\nu h^2}{(1-\nu^2)\pi^2} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) + 2\mu l_0^2 \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) - \mu l_1^2 \left(\frac{8}{15\pi} - \frac{1}{3} \right) - \mu l_2^2 \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{8} \right), \\
r_{23} &= \frac{Eh^2}{(1+\nu)\pi^2} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) + \mu l_1^2 \left(\frac{8}{3\pi} - \frac{6}{5} \right) + \mu l_2^2 \left(\frac{2}{\pi} - \frac{3}{16} \right), \\
r_{24} &= \frac{Eh^2}{2(1-\nu^2)\pi^2} + \mu l_0^2 + \frac{13}{15}\mu l_1^2 + \frac{1}{8}\mu l_2^2, \quad r_{25} = \frac{Eh^2}{2(1-\nu^2)\pi^2} + \mu l_0^2 - \frac{1}{3}\mu l_1^2 - \frac{1}{16}\mu l_2^2, \\
r_{26} &= \frac{Eh^2}{4(1+\nu)\pi^2} + \frac{3}{5}\mu l_1^2 - \frac{3}{16}\mu l_2^2, \quad r_{27} = \frac{Eh^2}{4(1+\nu)\pi^2} + \frac{3}{5}\mu l_1^2 + \frac{3}{8}\mu l_2^2, \\
r_{28} &= \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} + 2\mu l_0^2 + \frac{8}{15}\mu l_1^2 + \mu l_2^2, \quad r_{29} = \frac{E\nu h^2}{12(1-\nu^2)} + 2\mu l_0^2 - \frac{2}{15}\mu l_1^2 - \mu l_2^2, \\
r_{30} &= \frac{Eh^2}{12(1+\nu)} + \frac{2}{3}\mu l_1^2 + 2\mu l_2^2, \quad r_{31} = \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} + 2\mu l_0^2 + \frac{32}{15}\mu l_1^2 + \frac{1}{4}\mu l_2^2, \\
r_{32} &= \frac{E\nu h^2}{12(1-\nu^2)} + 2\mu l_0^2 - \frac{8}{15}\mu l_1^2 - \frac{1}{4}\mu l_2^2, \quad r_{33} = \frac{Eh^2}{24(1+\nu)} + \frac{4}{3}\mu l_1^2 - \frac{1}{2}\mu l_2^2, \\
r_{34} &= \frac{Eh^2}{24(1+\nu)} + \frac{4}{3}\mu l_1^2 + \mu l_2^2 \tag{3.683}
\end{aligned}$$

Ayrıca, yukarıdaki denklemlerde ilave malzeme boyut ölçek parametrelerinden ilk ikisi (l_0 ve l_1) ve tamamı sıfır alındığında sinüzoidal mikro plak modeline ait eğilme, burkulma ve serbest titreşim için genel yönetici denklemler sırasıyla değiştirilmiş gerilme çifti elastisite teorisine

$$\begin{aligned}
\delta u: & h \left(\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{4}\mu l_2^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) \right. \\
& \left. + \frac{E}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1}{4}\mu l_2^2 \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 v}{\partial x \partial y^3} \right) \right) + f_x = m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3.684}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta v: & h \left(\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{4}\mu l_2^2 \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \right) \right. \\
& \left. + \frac{E}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1}{4}\mu l_2^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} \right) \right) + f_y = m_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{3.685}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta w: & h \left(\left(\frac{\mu}{2} + \frac{\pi^2}{8h^2} \mu l_2^2 \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right. \\
& \left. - \left(\frac{Eh^2}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{12} - \frac{4}{\pi^3} + \frac{1}{2\pi^2} \right) + \mu l_2^2 \left(\frac{9}{8} - \frac{2}{\pi} \right) \right) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{Eh^2}{(1-\nu^2)\pi^2} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) + \mu l_2^2 \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{8} \right) \right) \left(\frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial y^3} \right) \\
& + q - k_w w + k_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \left(P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2P_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\
& - (m_2 - 2m_3 + m_4) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial t^2} \right) - (m_3 - m_4) \left(\frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial y \partial t^2} \right) \quad (3.686)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta \varphi_1: & h \left(\left(\frac{\mu}{2} + \frac{\pi^2}{8h^2} \mu l_2^2 \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_1 \right) \right. \\
& + \left(\frac{Eh^2}{(1-\nu^2)\pi^2} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) + \mu l_2^2 \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{8} \right) \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \\
& + \left(\frac{Eh^2}{2(1-\nu^2)\pi^2} + \frac{1}{8} \mu l_2^2 \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right) \\
& + \left(\frac{\mu h^2}{2\pi^2} + \frac{1}{4} \mu l_2^2 \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{Eh^2}{4(1-\nu)\pi^2} - \frac{1}{8} \mu l_2^2 \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \right) \\
& \left. - \frac{h^2}{8\pi^2} \mu l_2^2 \left(\frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial y^4} - \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial x^3 \partial y} - \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial x \partial y^3} \right) \right) \\
& = (m_3 - m_4) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + m_4 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \quad (3.687)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta \varphi_2: & h \left(\left(\frac{\mu}{2} + \frac{\pi^2}{8h^2} \mu l_2^2 \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_2 \right) \right. \\
& + \left(\frac{Eh^2}{(1-\nu^2)\pi^2} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) + \mu l_2^2 \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{8} \right) \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \\
& + \left(\frac{Eh^2}{2(1-\nu^2)\pi^2} + \frac{1}{8} \mu l_2^2 \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right) \\
& + \left(\frac{\mu h^2}{2\pi^2} + \frac{1}{4} \mu l_2^2 \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{Eh^2}{4(1-\nu)\pi^2} - \frac{1}{8} \mu l_2^2 \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) \\
& \left. - \frac{h^2}{8\pi^2} \mu l_2^2 \left(\frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial x \partial y^3} - \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial x^3 \partial y} \right) \right) \\
& = (m_3 - m_4) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} + m_4 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \quad (3.688)
\end{aligned}$$

ve klasik (Cauchy) elastisite teorisine göre

$$\delta u: h \left(\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{E}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right) + f_x = m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.689)$$

$$\delta v: h \left(\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{E}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right) + f_y = m_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3.690)$$

$$\begin{aligned} \delta w: h \left(\frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right. \\ \left. - \frac{Eh^2}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{12} - \frac{4}{\pi^3} + \frac{1}{2\pi^2} \right) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) \right. \\ \left. - \frac{Eh^2}{(1-\nu^2)\pi^2} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial y^3} \right) \right) \\ + q - k_w w + k_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \left(P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2P_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ - (m_2 - 2m_3 + m_4) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial t^2} \right) - (m_3 - m_4) \left(\frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial y \partial t^2} \right) \quad (3.691) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \varphi_1: h \left(\frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_1 \right) + \frac{Eh^2}{(1-\nu^2)\pi^2} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) + \frac{Eh^2}{2(1-\nu^2)\pi^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{\mu h^2}{2\pi^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right) + \frac{Eh^2}{4(1-\nu)\pi^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \right) \right) = (m_3 - m_4) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + m_4 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \quad (3.692) \end{aligned}$$

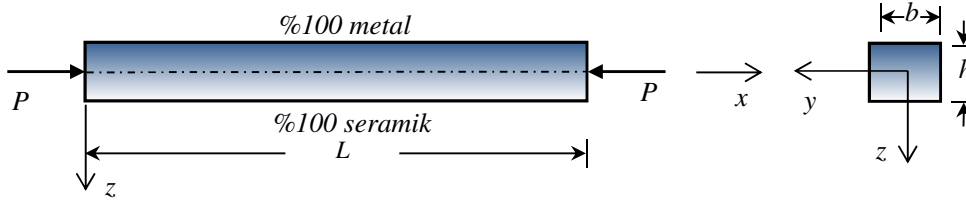
$$\begin{aligned} \delta \varphi_2: h \left(\frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_2 \right) + \frac{Eh^2}{(1-\nu^2)\pi^2} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) + \frac{Eh^2}{2(1-\nu^2)\pi^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{\mu h^2}{2\pi^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right) + \frac{Eh^2}{4(1-\nu)\pi^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) \right) = (m_3 - m_4) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} + m_4 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \quad (3.693) \end{aligned}$$

biçimlerinde ulaşılır.

3.1.3. Fonksiyonel değişimli malzemelerden yapılmış mikro kirişler

Fonksiyonel değişimli malzemeler (FDM), malzeme özellikleri bir yüzeyden diğerine sürekli bir biçimde değişim gösteren, birbirinden farklı özelliklere sahip malzemelerden imal edilen yeni gelişmiş bir kompozit türü olarak tanımlanabilir. Geleneksel tabakalı kompozitlerde, malzeme özelliklerindeki ani değişimden dolayı iki katmanın ara yüzeyinde yüksek gerilme yığılmaları meydana gelebilmektedir. Buna karşın, fonksiyonel değişimli malzemelerde bu istenmeyen tehlikeli gerilme yığılmaları önlenabilir ve ayrıca bu malzemeler üstün termomekanik özelliklere sahiptir. Fonksiyonel değişimli malzemeler, homojen ve tabakalı kompozit malzemelerden daha avantajlı olduklarından dolayı uçak, biyomedikal, nükleer, elektronik, optik ve mekanik gibi pek çok mühendislik dalında geniş bir uygulama alanına sahiptir.

Burada fonksiyonel değişimli malzeme özelliklerinin kiriş yüksekliği boyunca sürekli değiştiği dikkate alınmıştır. Şekil 3.4'te malzeme özelliği kalınlık doğrultusunda değişen eksenel basınç yüküne maruz fonksiyonel değişimli malzemeden imal edilmiş mikro kirişe ait geometri ve yükleme durumu görülmektedir.

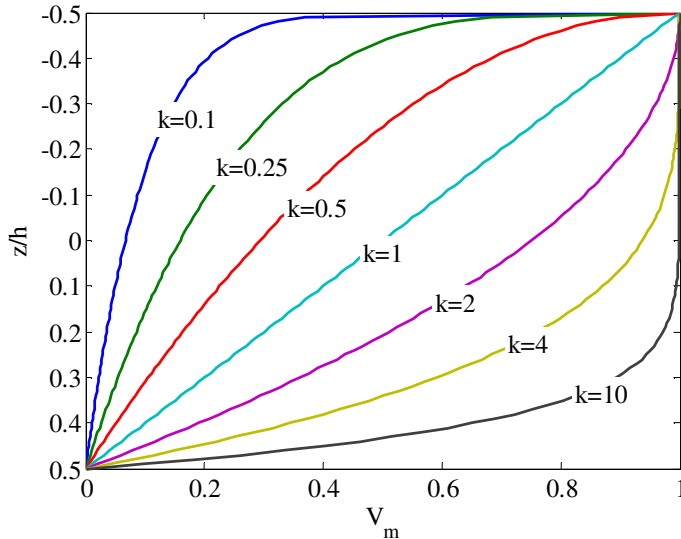


Şekil 3.4. Fonksiyonel değişimli malzemeden yapılmış eksenel yüklü kirişin şematik gösterimi

Malzemelerin hacimsel oranlarını belirlemek için aşağıdaki bağıntıdan faydalanılmıştır.

$$V_s = \left(0,5 + \frac{z}{h}\right)^k, V_m = 1 - V_s \quad (3.694)$$

burada k negatif olmayan malzeme özelliği değişim indeksi olup alt indisler s ve m sırasıyla seramik ve metal fazları temsil etmektedir. Şekil 3.5'te metal bileşene ait hacim fraksiyonunun mikrokiriş yüksekliği boyunca değişimi çeşitli k değerleri için çizdirilmiştir. k değeri arttıkça metal bileşene ait hacim fraksiyonunun da giderek arttığı şekilde görülmektedir.



Şekil 3.5. Metal bileşene ait hacim fraksiyonunun mikrokiriş yüksekliği boyunca değişimi

Denklem (3.694) göz önünde bulundurulduğunda, etkin elastisite modülü ($E(z)$), Poisson oranı ($\nu(z)$) ve yoğunluk ($\rho(z)$)

$$E(z) = (E_s - E_m)V_s + E_m \quad (3.695)$$

$$\nu(z) = (\nu_s - \nu_m)V_s + \nu_m \quad (3.696)$$

$$\rho(z) = (\rho_s - \rho_m)V_s + \rho_m \quad (3.697)$$

biçiminde ifade edilebilir. Yukarıdaki denklemlerden ve Şekil 3.5'ten de açıkça görülebileceği üzere fonksiyonel değişimli malzemeden imal edilmiş mikro kirişin en üst ($z = -h/2$) ve en alt ($z = h/2$) yüzeyleri sırasıyla saf metal ve saf seramik olmaktadır.

Fonksiyonel değişimli malzemeden yapılmış mikro kirişe ait klasik ve klasik olmayan gerilme bileşenleri aşağıda verilmiştir:

$$\sigma_{11} = E(z)\eta \left(\frac{du}{dx} - z \frac{d^2w}{dx^2} + R(z) \left[\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{d\varphi}{dx} \right] \right), \quad \sigma_{13} = \mu(z)S(z) \left[\frac{dw}{dx} - \varphi \right],$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{E(z)\nu(z)}{(1+\nu(z))(1-2\nu(z))} \left(\frac{du}{dx} - z \frac{d^2w}{dx^2} + R(z) \left[\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{d\varphi}{dx} \right] \right) \quad (3.698)$$

$$R(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right), \quad S(z) = \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right), \quad \eta = \frac{(1-\nu(z))}{(1+\nu(z))(1-2\nu(z))} \quad (3.699)$$

$$p_1 = 2\mu(z)l_0^2 \left(\frac{d^2u}{dx^2} - z \frac{d^3w}{dx^3} + R(z) \left[\frac{d^3w}{dx^3} - \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right] \right),$$

$$p_3 = -2\mu(z)l_0^2 \left(\frac{d^2w}{dx^2} - S(z) \left[\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{d\varphi}{dx} \right] \right) \quad (3.700)$$

$$\tau_{111}^{(1)} = \frac{2}{5}\mu(z)l_1^2 \left[2 \left(\frac{d^2u}{dx^2} - z \frac{d^3w}{dx^3} + R(z) \left[\frac{d^3w}{dx^3} - \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right] \right) + \frac{\pi^2}{h^2} R(z) \left[\frac{dw}{dx} - \varphi \right] \right],$$

$$\tau_{113}^{(1)} = \tau_{131}^{(1)} = \tau_{311}^{(1)} = -\frac{8}{15}\mu(z)l_1^2 \left(\frac{d^2w}{dx^2} - 2S(z) \left[\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{d\varphi}{dx} \right] \right),$$

$$\tau_{122}^{(1)} = \tau_{212}^{(1)} = \tau_{221}^{(1)} = -\frac{2}{5}\mu(z)l_1^2 \left(\frac{d^2u}{dx^2} - z \frac{d^3w}{dx^3} + R(z) \left[\frac{d^3w}{dx^3} - \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right] \right)$$

$$- \frac{\pi^2}{3h^2} R(z) \left[\frac{dw}{dx} - \varphi \right],$$

$$\tau_{133}^{(1)} = \tau_{313}^{(1)} = \tau_{331}^{(1)} = -\frac{2}{5}\mu(z)l_1^2 \left(\frac{d^2u}{dx^2} - z \frac{d^3w}{dx^3} + R(z) \left[\frac{d^3w}{dx^3} - \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right] \right)$$

$$+ \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{h^2} R(z) \left[\frac{dw}{dx} - \varphi \right],$$

$$\tau_{223}^{(1)} = \tau_{232}^{(1)} = \tau_{322}^{(1)} = \frac{2}{15}\mu(z)l_1^2 \left(\frac{d^2w}{dx^2} - 2S(z) \left[\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{d\varphi}{dx} \right] \right),$$

$$\tau_{333}^{(1)} = \frac{2}{5} \mu(z) l_1^2 \left(\frac{d^2 w}{dx^2} - 2S(z) \left[\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{d\varphi}{dx} \right] \right) \quad (3.701)$$

$$m_{12}^s = m_{21}^s = -\mu(z) l_2^2 \left(\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{1}{2} S(z) \left[\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{d\varphi}{dx} \right] \right),$$

$$m_{23}^s = m_{32}^s = -\frac{\mu(z) l_2^2 \pi^2}{2 h^2} R(z) \left[\frac{dw}{dx} - \varphi \right] \quad (3.702)$$

Yukarıdaki gerilme ve şekil değiştirme bileşenlerinin, Denklem (3.2)'de yerlerine yazılmasıyla homojen olmayan (fonksiyonel değişimli malzemeden yapılmış) mikro kiriş için toplam şekil değiştirme enerjisinin birinci varyasyonu aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^L \int_A \left(\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + p_i \delta \gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)} \delta \eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij}^s \delta \chi_{ij}^s \right) dA dx \\ &= \int_0^L \left[\left(-r_1 \frac{d^2 u}{dx^2} + k_1^8 \frac{d^4 u}{dx^4} - k_2 \frac{d^3 w}{dx^3} + (k_1^{11} - k_1^9) \frac{d^5 w}{dx^5} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (k_2 + r_2) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - k_1^{11} \frac{d^4 \varphi}{dx^4} \right) \delta u \right. \\ &\quad \left. + \left(k_2 \frac{d^3 u}{dx^3} - (k_1^{11} - k_1^9) \frac{d^5 u}{dx^5} - k_3 \frac{d^2 w}{dx^2} + (k_4 - 2k_5 + k_6) \frac{d^4 w}{dx^4} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (k_1^{10} - 2k_1^{12} + k_1^{13}) \frac{d^6 w}{dx^6} + k_3 \frac{d\varphi}{dx} - (k_6 - k_5) \frac{d^3 \varphi}{dx^3} + (k_1^{13} - k_1^{12}) \frac{d^5 \varphi}{dx^5} \right) \delta w \right. \\ &\quad \left. + \left((k_2 + r_2) \frac{d^2 u}{dx^2} - k_1^{11} \frac{d^4 u}{dx^4} - k_3 \frac{dw}{dx} + (k_6 - k_5) \frac{d^3 w}{dx^3} - (k_1^{13} - k_1^{12}) \frac{d^5 w}{dx^5} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + k_3 \varphi - k_6 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + k_1^{13} \frac{d^4 \varphi}{dx^4} \right) \delta \varphi \right] dx \\ &\quad + \left[\left(r_1 \frac{du}{dx} - k_1^8 \frac{d^3 u}{dx^3} + k_2 \frac{d^2 w}{dx^2} - (k_1^{11} - k_1^9) \frac{d^4 w}{dx^4} - (k_2 + r_2) \frac{d\varphi}{dx} + k_1^{11} \frac{d^3 \varphi}{dx^3} \right) \delta u \right. \\ &\quad \left. + \left(\left(k_1^8 \frac{d^2 u}{dx^2} - (k_2 + r_2 - r_4) \frac{dw}{dx} + (k_1^{11} - k_1^9) \frac{d^3 w}{dx^3} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (k_2 + r_2 - r_4) \varphi - k_1^{11} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) \delta \left(\frac{du}{dx} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(-k_2 \frac{d^2 u}{dx^2} + (k_1^{11} - k_1^9) \frac{d^4 u}{dx^4} + k_3 \frac{dw}{dx} - (k_4 - 2k_5 + k_6) \frac{d^3 w}{dx^3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (k_1^{10} - 2k_1^{12} + k_1^{13}) \frac{d^5 w}{dx^5} - k_3 \varphi + (k_6 - k_5) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - (k_1^{13} - k_1^{12}) \frac{d^4 \varphi}{dx^4} \right) \delta w \right. \\ &\quad \left. + \left(\left(k_2 + \frac{2\pi^2}{5h^2} r_{111} \right) \frac{du}{dx} - (k_1^{11} - k_1^9) \frac{d^3 u}{dx^3} \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(k_4 - 2k_5 + k_6 - \frac{2\pi^2}{5h^2}(r_{121} - r_{131}) \right) \frac{d^2w}{dx^2} - (k_1^{10} - 2k_1^{12} + k_1^{13}) \frac{d^4w}{dx^4} \\
& - \left(k_6 - k_5 + \frac{2\pi^2}{5h^2}r_{131} \right) \frac{d\varphi}{dx} + (k_1^{13} - k_1^{12}) \frac{d^3\varphi}{dx^3} \delta \left(\frac{dw}{dx} \right) \\
& + \left((k_1^{11} - k_1^9) \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{2\pi^2}{5h^2}(r_{121} - r_{131}) \right) \left(\frac{dw}{dx} - \varphi \right) \\
& + (k_1^{10} - 2k_1^{12} + k_1^{13}) \frac{d^3w}{dx^3} - (k_1^{13} - k_1^{12}) \frac{d^2\varphi}{dx^2} \delta \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right) \\
& + \left(-r_4 \frac{du}{dx} + k_1^{11} \frac{d^3u}{dx^3} - \left(k_6 - k_5 + \frac{2\pi^2}{5h^2}(r_{121} - r_{131}) \right) \right) \frac{d^2w}{dx^2} \\
& + (k_1^{13} - k_1^{12}) \frac{d^4w}{dx^4} + \left(k_6 + \frac{2\pi^2}{5h^2}r_{131} \right) \frac{d\varphi}{dx} - k_1^{13} \frac{d^3\varphi}{dx^3} \delta \varphi \\
& + \left(-k_1^{11} \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{2\pi^2}{5h^2}r_{131} \left(\frac{dw}{dx} - \varphi \right) - (k_1^{13} - k_1^{12}) \frac{d^3w}{dx^3} + k_1^{13} \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right) \delta \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) \Big|_0^L \quad (3.703)
\end{aligned}$$

Buradaki katsayılar

$$\begin{aligned}
(r_1, r_2, r_3) &= \int_A E(z)\eta(1, z, z^2)dA, \quad (r_4, r_5, r_6) = \int_A E(z)\eta R(z)(1, z, R(z))dA, \\
(r_7) &= \int_A \mu(z)(S(z))^2 dA, \quad (r_{8i}, r_{9i}, r_{10i}) = \int_A \mu(z)l_i^2(1, z, z^2)dA, \\
(r_{11i}, r_{12i}, r_{13i}) &= \int_A \mu(z)l_i^2 R(z)(1, z, R(z))dA, \\
(r_{14i}, r_{15i}) &= \int_A \mu(z)l_i^2 S(z)(1, S(z))dA \quad (i = 0, 1, 2) \quad (3.704)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
k_1^j &= 2 \left(r_{j0} + \frac{2}{5}r_{j1} \right) \quad (j = 8, 9, \dots, 13) \text{ için}, \quad k_2 = r_4 - r_2 - \frac{2\pi^2}{5h^2}r_{111}, \\
k_3 &= r_7 + \frac{\pi^4}{h^4} \left(\frac{8}{15}r_{131} + \frac{1}{4}r_{132} \right), \quad k_4 = r_3 + 2r_{80} + \frac{8}{15}r_{81} + r_{82}, \\
k_5 &= r_5 - \frac{2\pi^2}{5h^2}r_{121} + 2r_{140} + \frac{16}{15}r_{141} + \frac{1}{2}r_{142}, \\
k_6 &= r_6 - \frac{4\pi^2}{5h^2}r_{131} + 2r_{150} + \frac{32}{15}r_{151} + \frac{1}{4}r_{152} \quad (3.705)
\end{aligned}$$

Diğer taraftan dış kuvvetlerin yaptığı işin birinci varyasyonu

$$\begin{aligned}
\delta W = & \int_0^L \left(f \delta u + \left(q - P \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta w \right) dx \\
& + \left[Q_1 \delta u + Q_2 \delta \left(\frac{du}{dx} \right) + \left(Q_3 + P \frac{dw}{dx} \right) \delta w + Q_4 \delta \left(\frac{dw}{dx} \right) \right. \\
& \left. + Q_5 \delta \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) + Q_6 \delta \varphi + Q_7 \delta \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) \right]_0^L
\end{aligned} \tag{3.706}$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki $f(x)$ ve $q(x)$ sırasıyla eksenel ve enine doğrultudaki yayılı yükleri, P ise uygulanan eksenel basınç kuvvetini simgelemektedir. Ek olarak, Q_i ($i = 1, 2, \dots, 7$) mikro kiriş ucundaki kuvvet ile kuvvetlerin momentidir. Minimum toplam potansiyel enerji prensibinin uygulanmasıyla fonksiyonel değişimli malzemeden yapılmış mikro kirişe ait yönetici denklemler ve ilgili sınır koşulları sinüzoidal kiriş teorisine dayalı olarak aşağıda sunulmuştur (Akgöz ve Civalek 2014b):

$$\delta(U - W) = 0 \tag{3.707}$$

$$\begin{aligned}
\delta u: & -r_1 \frac{d^2 u}{dx^2} + k_1^8 \frac{d^4 u}{dx^4} - k_2 \frac{d^3 w}{dx^3} + (k_1^{11} - k_1^9) \frac{d^5 w}{dx^5} \\
& + (k_2 + r_2) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - k_1^{11} \frac{d^4 \varphi}{dx^4} - f = 0
\end{aligned} \tag{3.708}$$

$$\begin{aligned}
\delta w: & k_2 \frac{d^3 u}{dx^3} - (k_1^{11} - k_1^9) \frac{d^5 u}{dx^5} - k_3 \frac{d^2 w}{dx^2} + (k_4 - 2k_5 + k_6) \frac{d^4 w}{dx^4} \\
& - (k_1^{10} - 2k_1^{12} + k_1^{13}) \frac{d^6 w}{dx^6} + k_3 \frac{d\varphi}{dx} - (k_6 - k_5) \frac{d^3 \varphi}{dx^3} \\
& + (k_1^{13} - k_1^{12}) \frac{d^5 \varphi}{dx^5} + P \frac{d^2 w}{dx^2} - q = 0
\end{aligned} \tag{3.709}$$

$$\begin{aligned}
\delta \varphi: & (k_2 + r_2) \frac{d^2 u}{dx^2} - k_1^{11} \frac{d^4 u}{dx^4} - k_3 \frac{dw}{dx} + (k_6 - k_5) \frac{d^3 w}{dx^3} \\
& - (k_1^{13} - k_1^{12}) \frac{d^5 w}{dx^5} + k_3 \varphi - k_6 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + k_1^{13} \frac{d^4 \varphi}{dx^4} = 0
\end{aligned} \tag{3.710}$$

$$\begin{aligned}
r_1 \frac{du}{dx} - k_1^8 \frac{d^3 u}{dx^3} + k_2 \frac{d^2 w}{dx^2} - (k_1^{11} - k_1^9) \frac{d^4 w}{dx^4} - (k_2 + r_2) \frac{d\varphi}{dx} \\
+ k_1^{11} \frac{d^3 \varphi}{dx^3} = Q_1 \text{ ya da } u = 0
\end{aligned} \tag{3.711}$$

$$\begin{aligned}
k_1^8 \frac{d^2 u}{dx^2} - (k_2 + r_2 - r_4) \frac{dw}{dx} + (k_1^{11} - k_1^9) \frac{d^3 w}{dx^3} + (k_2 + r_2 - r_4) \varphi \\
- k_1^{11} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = Q_2 \text{ ya da } \frac{du}{dx} = 0
\end{aligned} \tag{3.712}$$

$$-k_2 \frac{d^2 u}{dx^2} + (k_1^{11} - k_1^9) \frac{d^4 u}{dx^4} + k_3 \frac{dw}{dx} - (k_4 - 2k_5 + k_6) \frac{d^3 w}{dx^3}$$

$$\begin{aligned}
& +(k_1^{10} - 2k_1^{12} + k_1^{13}) \frac{d^5 w}{dx^5} - k_3 \varphi + (k_6 - k_5) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \\
& -(k_1^{13} - k_1^{12}) \frac{d^4 \varphi}{dx^4} - P \frac{dw}{dx} = Q_3 \text{ ya da } w = 0
\end{aligned} \tag{3.713}$$

$$\begin{aligned}
& \left(k_2 + \frac{2\pi^2}{5h^2} r_{111} \right) \frac{du}{dx} - (k_1^{11} - k_1^9) \frac{d^3 u}{dx^3} \\
& + \left(k_4 - 2k_5 + k_6 - \frac{2\pi^2}{5h^2} (r_{121} - r_{131}) \right) \frac{d^2 w}{dx^2} \\
& -(k_1^{10} - 2k_1^{12} + k_1^{13}) \frac{d^4 w}{dx^4} - \left(k_6 - k_5 + \frac{2\pi^2}{5h^2} r_{131} \right) \frac{d\varphi}{dx} \\
& +(k_1^{13} - k_1^{12}) \frac{d^3 \varphi}{dx^3} = Q_4 \text{ ya da } \frac{dw}{dx} = 0
\end{aligned} \tag{3.714}$$

$$\begin{aligned}
& (k_1^{11} - k_1^9) \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{2\pi^2}{5h^2} (r_{121} - r_{131}) \left(\frac{dw}{dx} - \varphi \right) + (k_1^{10} - 2k_1^{12} + k_1^{13}) \frac{d^3 w}{dx^3} \\
& -(k_1^{13} - k_1^{12}) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = Q_5 \text{ ya da } \frac{d^2 w}{dx^2} = 0
\end{aligned} \tag{3.715}$$

$$\begin{aligned}
& -r_4 \frac{du}{dx} + k_1^{11} \frac{d^3 u}{dx^3} - \left(k_6 - k_5 + \frac{2\pi^2}{5h^2} (r_{121} - r_{131}) \right) \frac{d^2 w}{dx^2} + (k_1^{13} - k_1^{12}) \frac{d^4 w}{dx^4} \\
& + \left(k_6 + \frac{2\pi^2}{5h^2} r_{131} \right) \frac{d\varphi}{dx} - k_1^{13} \frac{d^3 \varphi}{dx^3} = Q_6 \text{ ya da } \varphi = 0
\end{aligned} \tag{3.716}$$

$$\begin{aligned}
& -k_1^{11} \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{2\pi^2}{5h^2} r_{131} \left(\frac{dw}{dx} - \varphi \right) - (k_1^{13} - k_1^{12}) \frac{d^3 w}{dx^3} \\
& + k_1^{13} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = Q_7 \text{ ya da } \frac{d\varphi}{dx} = 0
\end{aligned} \tag{3.717}$$

Ayrıca, yukarıdaki denklemlerde ilave malzeme boyut ölçek parametrelerinden ilk ikisi (l_0 ve l_1) ile tamamı sıfır alındığında sinüzoidal mikro kiriş modeline ait yönetici denklemler ve sınır koşulları sırasıyla değiştirilmiş gerilme çifti elastisite teorisine ve klasik (Cauchy) elastisite teorisine göre elde edilir.

4. EĞİLME, BURKULMA ve TİTREŞİM PROBLEMLERİ

4.1. Bir Boyutlu Yapılar

Bu kısımda bir boyutlu yapıların (KNT, mikrotüpçük ve mikro kiriş) her iki ucunun basit mesnetli olması durumu dikkate alınmıştır. Bu tip sınır koşullarına sahip makro boyutlu yapıların statik ve dinamik analizlerinde başarılı bir biçimde uygulanan Navier çözümü burada da kullanılmıştır. Genel deplasmanların bilinmeyen Fourier katsayıları ve belirli trigonometrik fonksiyonları şeklinde açılımları aşağıdaki gibi verilebilir:

$$w(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m \sin \alpha x e^{i\omega_m t} \quad (4.1)$$

$$\varphi(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} H_m \cos \alpha x e^{i\omega_m t} \quad (4.2)$$

Burada, $\alpha = m\pi/L$, W_m ve H_m bilinmeyen Fourier katsayıları, ω_m frekans, i imajiner sayı olup $i^2 = -1$ ve t ise zamandır.

4.1.1. Eğilme problemi

Enine dış yük q Fourier serisine

$$q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m \sin \alpha x \quad (4.3)$$

$$Q_m = \frac{2}{L} \int_0^L q(x) \sin \alpha x dx \quad (4.4)$$

biçiminde açılabilir. Q_m Fourier katsayısı olup düzgün yayılı ve tekil yükler için aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$Q_m = \frac{4q_0}{m\pi} \quad m = 1,3,5, \dots \text{ için} \quad (4.5a)$$

$$Q_m = \frac{2}{L} Q_0 \sin \frac{m\pi}{2} \quad m = 1,2,3, \dots \text{ için} \quad (4.5b)$$

Yukarıdaki bağıntıların (zamana bağlı terimler olmadan), Denklemler (3.93, 3.187, 3.188, 3.291 ve 3.292)'de eksenel ve zamana bağlı türevli ifadeler yok sayılarak kullanılmasıyla

$$\begin{bmatrix} K_{11}^i & K_{12}^i \\ K_{21}^i & K_{22}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_m \\ H_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_m \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

bağıntısı elde edilir. Burada $i = BE, T, S$ olup sırasıyla Bernoulli-Euler, Timoshenko ve sinüzoidal kirişleri temsil etmektedir. Bu lineer cebrik denklem takımındaki katsayılar

-Bernoulli-Euler kiriş teorisi için

$$K_{11}^{BE} = \alpha^4 \left(EI + \mu A \left(2l_0^2 + \frac{8}{15} l_1^2 + l_2^2 \right) \right) + \alpha^6 \left(2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \right) + k_w + \alpha^2 k_p$$

$$K_{12}^{BE} = K_{21}^{BE} = K_{22}^{BE} = 0 \quad (4.7)$$

-Timoshenko kiriş teorisi için

$$K_{11}^T = \alpha^2 k_s \mu A + \alpha^4 \mu A \left(\frac{8}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) + k_w + \alpha^2 k_p$$

$$K_{12}^T = K_{21}^T = -\alpha k_s \mu A + \alpha^3 \mu A \left(-\frac{16}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right)$$

$$K_{22}^T = k_s \mu A + \alpha^2 \left(EI + \mu A \left(2l_0^2 + \frac{32}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \right) + \alpha^4 \left(2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \right) \quad (4.8)$$

-Sinüzoidal kiriş teorisi için

$$K_{11}^S = \alpha^2 (a_1 + \alpha^2 (a_2 - 2a_3 + a^4) + \alpha^4 (a_5 - 2a_6 + a_7) + k_p) + k_w$$

$$K_{12}^S = K_{21}^S = -\alpha (a_1 + \alpha^2 (a_4 - a_3) + \alpha^4 (a_7 - a_6))$$

$$K_{22}^S = a_1 + \alpha^2 a_4 + \alpha^4 a_7 \quad (4.9)$$

şeklinde elde edilir.

4.1.2. Burkulma problemi

Denklemler (4.1 ve 4.2)'nin (zamana bağlı terimler olmadan), Denklemler (3.93, 3.187, 3.188, 3.291 ve 3.292)'de enine dış yük ve zamana bağlı türevli ifadeler yok sayılarak kullanılmasıyla

$$\begin{bmatrix} K_{11}^i & K_{12}^i \\ K_{21}^i & K_{22}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_m \\ H_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

bağıntısı elde edilir. Burkulma problemi için bu lineer cebrik denklem takımındaki katsayılar

-Bernoulli-Euler kiriş teorisi için

$$K_{11}^{BE} = \alpha^4 \left(EI + \mu A \left(2l_0^2 + \frac{8}{15} l_1^2 + l_2^2 \right) \right) + \alpha^6 \left(2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \right)$$

$$+ k_w + \alpha^2 k_p - \alpha^2 P$$

$$K_{12}^{BE} = K_{21}^{BE} = K_{22}^{BE} = 0 \quad (4.11)$$

-Timoshenko kiriş teorisi için

$$\begin{aligned}
 K_{11}^T &= \alpha^2 k_s \mu A + \alpha^4 \mu A \left(\frac{8}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) + k_w + \alpha^2 k_p - \alpha^2 P \\
 K_{12}^T &= K_{21}^T = -\alpha k_s \mu A + \alpha^3 \mu A \left(-\frac{16}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \\
 K_{22}^T &= k_s \mu A + \alpha^2 \left(EI + \mu A \left(2l_0^2 + \frac{32}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \right) + \alpha^4 \left(2\mu I (l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2) \right) \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

- Sinüzoidal kiriş teorisi için

$$\begin{aligned}
 K_{11}^S &= \alpha^2 (a_1 + \alpha^2 (a_2 - 2a_3 + a_4) + \alpha^4 (a_5 - 2a_6 + a_7) + k_p) \\
 &+ k_w - \alpha^2 P \\
 K_{12}^S &= K_{21}^S = -\alpha (a_1 + \alpha^2 (a_4 - a_3) + \alpha^4 (a_7 - a_6)) \\
 K_{22}^S &= a_1 + \alpha^2 a_4 + \alpha^4 a_7 \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Aşık olmaya çözüm için katsayılar matrisinin determinantının sıfır olması gerekir. Öz değerler, karakteristik denklemin çözümü ile edilir ve en küçük değer kritik burkulma yükü değerini verir.

4.1.3. Serbest titreşim problemi

Denklemler (4.1 ve 4.2)'nin, Denklemler (3.93, 3.187, 3.188, 3.291 ve 3.292)'de herhangi bir dış yük olmadan kullanılmasıyla

$$\begin{bmatrix} K_{11}^i & K_{12}^i \\ K_{21}^i & K_{22}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_m \\ H_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

bağıntısı elde edilir. Serbest titreşim problemi için bu lineer cebrik denklem takımındaki katsayılar

-Bernoulli-Euler kiriş teorisi için

$$\begin{aligned}
 K_{11}^{BE} &= \alpha^4 \left(EI + \mu A \left(2l_0^2 + \frac{8}{15} l_1^2 + l_2^2 \right) \right) + \alpha^6 \left(2\mu I (l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2) \right) \\
 &+ k_w + \alpha^2 k_p - \omega^2 (m_0 + \alpha^2 m_2) \\
 K_{12}^{BE} &= K_{21}^{BE} = K_{22}^{BE} = 0 \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

-Timoshenko kiriş teorisi için

$$K_{11}^T = \alpha^2 k_s \mu A + \alpha^4 \mu A \left(\frac{8}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) + k_w + \alpha^2 k_p - \omega^2 (m_0 + \alpha^2 m_2)$$

$$\begin{aligned}
K_{12}^T &= K_{21}^T = -\alpha k_s \mu A + \alpha^3 \mu A \left(-\frac{16}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \\
K_{22}^T &= k_s \mu A + \alpha^2 \left(EI + \mu A \left(2l_0^2 + \frac{32}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \right) \\
&+ \alpha^4 \left(2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \right) - \omega^2 m_2
\end{aligned} \tag{4.16}$$

- Sinüzoidal kiriş teorisi için

$$\begin{aligned}
K_{11}^S &= \alpha^2 (a_1 + \alpha^2 (a_2 - 2a_3 + a^4) + \alpha^4 (a_5 - 2a_6 + a_7) + k_p) + k_w \\
&- \omega^2 (m_0 + \alpha^2 (m_2 - 2m_3 + m_4)) \\
K_{12}^S &= K_{21}^S = -\alpha (a_1 + \alpha^2 (a_4 - a_3) + \alpha^4 (a_7 - a_6)) - \omega^2 \alpha (m_3 - m_4) \\
K_{22}^S &= a_1 + \alpha^2 a_4 + \alpha^4 a_7 - \omega^2 m_4
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Aşık olmayan çözüm için katsayılar matrisinin determinantının sıfır olması gerekir. Öz değerler karakteristik denklemin çözümü ile edilir ve en küçük değer temel frekans değerini verir.

4.2. İki Boyutlu Yapılar

Burada da grafen plaka ve mikro plak şeklindeki iki boyutlu yapıların bütün kenarlarının basit mesnetli olması durumu dikkate alınmıştır. Yine Navier çözümü kullanılarak eğilme, burkulma ve serbest titreşim için analitik sonuçlar elde edilmiştir. İki boyutlu durum için genel deplasmanların bilinmeyen Fourier katsayıları ve belirli trigonometrik fonksiyonları şeklinde açılımları aşağıdaki gibi verilebilir:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y e^{i\omega_{mn} t} \tag{4.18}$$

$$\varphi_1(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} H_{1mn} \cos \alpha x \sin \beta y e^{i\omega_{mn} t} \tag{4.19}$$

$$\varphi_2(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} H_{2mn} \sin \alpha x \cos \beta y e^{i\omega_{mn} t} \tag{4.20}$$

Burada $\alpha = m\pi/a$ ve $\beta = n\pi/b$ 'dir.

4.2.1. Eğilme problemi

Enine dış yük q Fourier serisine

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y \quad (4.21)$$

$$Q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a q_0 \sin \alpha x \sin \beta y dx dy \quad (4.22)$$

biçiminde açılabilir. Q_{mn} Fourier katsayısı olup düzgün yayılı yük için aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$Q_{mn} = \frac{16q_0}{mn\pi^2} \quad m, n = 1, 3, 5, \dots \text{ için} \quad (4.23)$$

Yukarıdaki bağıntıların (zamana bağlı terimler olmadan), Denklemler (3.414, 3.528-3.530, 3.662-3.664)'te eksenel ve zamana bağlı türevli ifadeler yok sayılarak kullanılmasıyla

$$\begin{bmatrix} K_{11}^i & K_{12}^i & K_{13}^i \\ K_{21}^i & K_{22}^i & K_{23}^i \\ K_{31}^i & K_{32}^i & K_{33}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{mn} \\ H_{1mn} \\ H_{2mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

bağıntısı elde edilir. Burada $i = K, M, S$ olup sırasıyla Kirchhoff, Mindlin ve sinüzoidal plakları temsil etmektedir. Eğilme problemi için bu lineer cebrik denklem takımındaki katsayılar

-Kirchhoff plak teorisi için

$$\begin{aligned} K_{11}^K &= (\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4) \left(\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \mu h \left(2l_0^2 + \frac{8}{15} l_1^2 + l_2^2 \right) \right) \\ &+ (\alpha^6 + 3\alpha^4\beta^2 + 3\alpha^2\beta^4 + \beta^6) \frac{b_1 h^3}{12} + k_w + (\alpha^2 + \beta^2) k_p \\ K_{12}^K &= K_{13}^K = K_{21}^K = K_{22}^K = K_{23}^K = K_{31}^K = K_{32}^K = K_{33}^K = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

-Mindlin plak teorisi için

$$\begin{aligned} K_{11}^M &= (\alpha^2 + \beta^2) k_s \mu h + (\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4) \mu h \left(\frac{8}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \\ &+ k_w + (\alpha^2 + \beta^2) k_p \\ K_{12}^M &= K_{21}^M = -\alpha k_s \mu h + (\alpha^3 + \alpha\beta^2) \mu h \left(-\frac{16}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \\ K_{13}^M &= K_{31}^M = -\beta k_s \mu h + (\beta^3 + \alpha^2\beta) \mu h \left(-\frac{16}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{22}^M &= k_s \mu h + \alpha^2 \left(\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \mu h \left(2l_0^2 + \frac{32}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \right) + \beta^2 \mu h \left(\frac{h^2}{12} + \frac{4}{3} l_1^2 + l_2^2 \right) \\
&+ \alpha^4 \frac{b_1 h^3}{12} + \alpha^2 \beta^2 \frac{h^3}{12} \mu \left(2l_0^2 + \frac{4}{3} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) + \beta^4 \frac{b_3 h^3}{12} \\
K_{23}^M &= K_{32}^M = \alpha \beta \left(\frac{Eh^3}{24(1-\nu)} + \mu h \left(2l_0^2 + \frac{4}{5} l_1^2 - \frac{3}{4} l_2^2 \right) \right) \\
&+ (\alpha^3 \beta + \alpha \beta^3) \frac{h^3}{12} \mu \left(2l_0^2 + \frac{4}{15} l_1^2 - \frac{1}{4} l_2^2 \right) \\
K_{33}^M &= k_s \mu h + \beta^2 \left(\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \mu h \left(2l_0^2 + \frac{32}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \right) + \alpha^2 \mu h \left(\frac{h^2}{12} + \frac{4}{3} l_1^2 + l_2^2 \right) \\
&+ \beta^4 \frac{b_1 h^3}{12} + \alpha^2 \beta^2 \frac{h^3}{12} \mu \left(2l_0^2 + \frac{4}{3} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) + \alpha^4 \frac{b_3 h^3}{12} \tag{4.26}
\end{aligned}$$

- Sinüzoidal plak teorisi için

$$\begin{aligned}
K_{11}^S &= h((\alpha^2 + \beta^2)r_1 + (\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4)r_2 \\
&+ (\alpha^6 + 3\alpha^4\beta^2 + 3\alpha^2\beta^4 + \beta^6)r_3), \\
K_{12}^S &= K_{21}^S = h(-\alpha r_1 + (\alpha^3 + \alpha\beta^2)r_4 + (\alpha^5 + \alpha\beta^4 + 2\alpha^3\beta^2)r_5), \\
K_{13}^S &= K_{31}^S = h(-\beta r_1 + (\beta^3 + \alpha^2\beta)r_4 + (\beta^5 + \alpha^4\beta + 2\alpha^2\beta^3)r_5), \\
K_{22}^S &= h(r_1 + \alpha^2 r_6 + \beta^2 r_{10} + \alpha^4 r_{12} + \alpha^2 \beta^2 r_7 + \beta^4 r_{11}), \\
K_{23}^S &= K_{32}^S = h(\alpha\beta r_8 + (\alpha^3\beta + \alpha\beta^3)r_9), \\
K_{33}^S &= h(r_1 + \beta^2 r_6 + \alpha^2 r_{10} + \beta^4 r_{12} + \alpha^2 \beta^2 r_7 + \alpha^4 r_{11}) \tag{4.27}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

4.2.2. Burkulma problemi

Yukarıdaki bağıntıların (zamana bağlı terimler olmadan), Denklemler (3.414, 3.528–3.530, 3.662–3.664)'te enine dış yük ve zamana bağlı türevli ifadeler yok sayılarak kullanılmasıyla ($P_x = P, P_y = P_{xy} = 0$)

$$\begin{bmatrix} K_{11}^i & K_{12}^i & K_{13}^i \\ K_{21}^i & K_{22}^i & K_{23}^i \\ K_{31}^i & K_{32}^i & K_{33}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{mn} \\ H_{1mn} \\ H_{2mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.28}$$

bağıntısı elde edilir. Burkulma problemi için bu lineer cebrik denklem takımındaki katsayılar

-Kirchhoff plak teorisi için

$$\begin{aligned}
K_{11}^K &= (\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4) \left(\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \mu h \left(2l_0^2 + \frac{8}{15} l_1^2 + l_2^2 \right) \right) \\
&+ (\alpha^6 - 3\alpha^4\beta^2 - 3\alpha^2\beta^4 + \beta^6) \frac{b_1 h^3}{12} + k_w + (\alpha^2 + \beta^2)k_p - \alpha^2 P \\
K_{12}^K &= K_{13}^K = K_{21}^K = K_{22}^K = K_{23}^K = K_{31}^K = K_{32}^K = K_{33}^K = 0
\end{aligned} \tag{4.29}$$

-Mindlin plak teorisi için

$$\begin{aligned}
K_{11}^M &= (\alpha^2 + \beta^2)k_s \mu h + (\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4) \mu h \left(\frac{8}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \\
&+ k_w + (\alpha^2 + \beta^2)k_p - \alpha^2 P \\
K_{12}^M &= K_{21}^M = -\alpha k_s \mu h + (\alpha^3 + \alpha\beta^2) \mu h \left(-\frac{16}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \\
K_{13}^M &= K_{31}^M = -\beta k_s \mu h + (\beta^3 + \alpha^2\beta) \mu h \left(-\frac{16}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \\
K_{22}^M &= k_s \mu h + \alpha^2 \left(\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \mu h \left(2l_0^2 + \frac{32}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \right) + \beta^2 \mu h \left(\frac{h^2}{12} + \frac{4}{3} l_1^2 + l_2^2 \right) \\
&+ \alpha^4 \frac{b_1 h^3}{12} + \alpha^2 \beta^2 \frac{h^3}{12} \mu \left(2l_0^2 + \frac{4}{3} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) + \beta^4 \frac{b_3 h^3}{12} \\
K_{23}^M &= K_{32}^M = \alpha\beta \left(\frac{Eh^3}{24(1-\nu)} + \mu h \left(2l_0^2 + \frac{4}{5} l_1^2 - \frac{3}{4} l_2^2 \right) \right) \\
&+ (\alpha^3\beta + \alpha\beta^3) \frac{h^3}{12} \mu \left(2l_0^2 + \frac{4}{15} l_1^2 - \frac{1}{4} l_2^2 \right) \\
K_{33}^M &= k_s \mu h + \beta^2 \left(\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \mu h \left(2l_0^2 + \frac{32}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \right) \\
&+ \alpha^2 \mu h \left(\frac{h^2}{12} + \frac{4}{3} l_1^2 + l_2^2 \right) \\
&+ \beta^4 \frac{b_1 h^3}{12} + \alpha^2 \beta^2 \frac{h^3}{12} \mu \left(2l_0^2 + \frac{4}{3} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) + \alpha^4 \frac{b_3 h^3}{12}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

-Sinüzoidal plak teorisi için

$$K_{11}^S = h((\alpha^2 + \beta^2)r_1 + (\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4)r_2)$$

$$\begin{aligned}
& +(\alpha^6 + 3\alpha^4\beta^2 + 3\alpha^2\beta^4 + \beta^6)r_3) - \alpha^2P \\
K_{12}^S &= K_{21}^S = h(-\alpha r_1 + (\alpha^3 + \alpha\beta^2)r_4 + (\alpha^5 + \alpha\beta^4 + 2\alpha^3\beta^2)r_5), \\
K_{13}^S &= K_{31}^S = h(-\beta r_1 + (\beta^3 + \alpha^2\beta)r_4 + (\beta^5 + \alpha^4\beta + 2\alpha^2\beta^3)r_5), \\
K_{22}^S &= h(r_1 + \alpha^2r_6 + \beta^2r_{10} + \alpha^4r_{12} + \alpha^2\beta^2r_7 + \beta^4r_{11}), \\
K_{23}^S &= K_{32}^S = h(\alpha\beta r_8 + (\alpha^3\beta + \alpha\beta^3)r_9), \\
K_{33}^S &= h(r_1 + \beta^2r_6 + \alpha^2r_{10} + \beta^4r_{12} + \alpha^2\beta^2r_7 + \alpha^4r_{11}) \tag{4.31}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

4.2.3. Serbest titreşim problemi

Yukarıdaki bağıntıların, Denklemler (3.414, 3.528-3.530, 3.662-3.664)'te herhangi bir dış yük olmadan kullanılmasıyla

$$\begin{bmatrix} K_{11}^i & K_{12}^i & K_{13}^i \\ K_{21}^i & K_{22}^i & K_{23}^i \\ K_{31}^i & K_{32}^i & K_{33}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{mn} \\ H_{1mn} \\ H_{2mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.32}$$

bağıntısı elde edilir. Burkulma problemi için bu lineer cebrik denklem takımındaki katsayılar

-Kirchhoff plak teorisi için

$$\begin{aligned}
K_{11}^K &= (\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4) \left(\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \mu h \left(2l_0^2 + \frac{8}{15} l_1^2 + l_2^2 \right) \right) \\
& + (\alpha^6 - 3\alpha^4\beta^2 - 3\alpha^2\beta^4 + \beta^6) \frac{b_1 h^3}{12} + k_w + (\alpha^2 + \beta^2)k_p - \omega^2 m_0 \\
K_{12}^K &= K_{13}^K = K_{21}^K = K_{22}^K = K_{23}^K = K_{31}^K = K_{32}^K = K_{33}^K = 0 \tag{4.33}
\end{aligned}$$

-Mindlin plak teorisi için

$$\begin{aligned}
K_{11}^M &= (\alpha^2 + \beta^2)k_s \mu h + (\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4) \mu h \left(\frac{8}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \\
& + k_w + (\alpha^2 + \beta^2)k_p - \omega^2 m_0 \\
K_{12}^M &= K_{21}^M = -\alpha k_s \mu h + (\alpha^3 + \alpha\beta^2) \mu h \left(-\frac{16}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \\
K_{13}^M &= K_{31}^M = -\beta k_s \mu h + (\beta^3 + \alpha^2\beta) \mu h \left(-\frac{16}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{22}^M &= k_s \mu h + \alpha^2 \left(\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \mu h \left(2l_0^2 + \frac{32}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \right) + \beta^2 \mu h \left(\frac{h^2}{12} + \frac{4}{3} l_1^2 + l_2^2 \right) \\
&+ \alpha^4 \frac{b_1 h^3}{12} + \alpha^2 \beta^2 \frac{h^3}{12} \mu \left(2l_0^2 + \frac{4}{3} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) + \beta^4 \frac{b_3 h^3}{12} - \omega^2 m_2 \\
K_{23}^M &= K_{32}^M = \alpha \beta \left(\frac{Eh^3}{24(1-\nu)} + \mu h \left(2l_0^2 + \frac{4}{5} l_1^2 - \frac{3}{4} l_2^2 \right) \right) \\
&+ (\alpha^3 \beta + \alpha \beta^3) \frac{h^3}{12} \mu \left(2l_0^2 + \frac{4}{15} l_1^2 - \frac{1}{4} l_2^2 \right) \\
K_{33}^M &= k_s \mu h + \beta^2 \left(\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \mu h \left(2l_0^2 + \frac{32}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) \right) + \alpha^2 \mu h \left(\frac{h^2}{12} + \frac{4}{3} l_1^2 + l_2^2 \right) \\
&+ \beta^4 \frac{b_1 h^3}{12} + \alpha^2 \beta^2 \frac{h^3}{12} \mu \left(2l_0^2 + \frac{4}{3} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \right) + \alpha^4 \frac{b_3 h^3}{12} - \omega^2 m_2 \quad (4.34)
\end{aligned}$$

- Sinüzoidal plak teorisi için

$$\begin{aligned}
K_{11}^S &= h((\alpha^2 + \beta^2)r_1 + (\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4)r_2 \\
&+ (\alpha^6 + 3\alpha^4\beta^2 + 3\alpha^2\beta^4 + \beta^6)r_3) - \omega^2(m_0 + (\alpha^2 + \beta^2)(m_2 - 2m_3 + m_4)), \\
K_{12}^S &= K_{21}^S = h(-\alpha r_1 + (\alpha^3 + \alpha\beta^2)r_4 + (\alpha^5 + \alpha\beta^4 + 2\alpha^3\beta^2)r_5) \\
&- \omega^2\alpha(m_3 - m_4) \\
K_{13}^S &= K_{31}^S = h(-\beta r_1 + (\beta^3 + \alpha^2\beta)r_4 + (\beta^5 + \alpha^4\beta + 2\alpha^2\beta^3)r_5) \\
&- \omega^2\beta(m_3 - m_4), \\
K_{22}^S &= h(r_1 + \alpha^2 r_6 + \beta^2 r_{10} + \alpha^4 r_{12} + \alpha^2 \beta^2 r_7 + \beta^4 r_{11}) - \omega^2 m_4, \\
K_{23}^S &= K_{32}^S = h(\alpha\beta r_8 + (\alpha^3\beta + \alpha\beta^3)r_9), \\
K_{33}^S &= h(r_1 + \beta^2 r_6 + \alpha^2 r_{10} + \beta^4 r_{12} + \alpha^2 \beta^2 r_7 + \alpha^4 r_{11}) - \omega^2 m_4 \quad (4.35)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

4.3. Homojen Olmayan Mikro Kirişlerin Analizi

Bu kısımda ise fonksiyonel değişimli malzemeden imal edilmiş homojen olmayan mikro kirişlerin statik analizleri gerçekleştirilmiştir. İki ucu basit mesnetli homojen olmayan mikro kirişlerin analizi için genel deplasmanların bilinmeyen Fourier katsayıları ve belirli trigonometrik fonksiyonları şeklinde açılımları homojen kirişlerdekine benzer biçimde aşağıdaki gibi verilebilir:

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos \beta x \quad (4.36)$$

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n \sin \beta x \quad (4.37)$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n \cos \beta x \quad (4.38)$$

Burada, $\beta = n\pi/L$ olup U_n, W_n ve H_n bilinmeyen Fourier katsayılarıdır.

4.3.1. Eğilme davranışı

Enine dış yük q Fourier serisine

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin \beta x \quad (4.39)$$

$$Q_n = \frac{2}{L} \int_0^L q(x) \sin \beta x dx \quad (4.40)$$

biçiminde açılabilir. Q_n Fourier katsayısı olup düzgün yayılı yük için aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$Q_n = \frac{4q_0}{n\pi} \quad n = 1,3,5, \dots \text{ için} \quad (4.41)$$

Denklemler (4.36-4.38)'in aksenal dış yük olmadan Denklemler (3.708–3.710)'da kullanılmasıyla

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_n \\ W_n \\ H_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_n \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.42)$$

bağıntısı elde edilir. Bu lineer cebrik denklem takımındaki katsayılar

$$\begin{aligned} K_{11} &= \beta^2(r_1 + \beta^2 k_1^8), \quad K_{12} = K_{21} = \beta^3(k_2 + \beta^2(k_1^{11} - k_1^9)), \\ K_{13} &= K_{31} = -\beta^2(r_2 + k_2 + \beta^2 k_1^{11}), \\ K_{22} &= \beta^2(k_3 + \beta^2(k_4 - 2k_5 + k_6) + \beta^4(k_1^{10} - 2k_1^{12} + k_1^{13})), \\ K_{23} &= K_{32} = -\beta(k_3 + \beta^2(k_6 - k_5) + \beta^4(k_1^{13} - k_1^{12})), \\ K_{33} &= k_3 + \beta^2(k_6 + \beta^2 k_1^{13}) \end{aligned} \quad (4.43)$$

şeklindedir.

4.3.2. Burkulma davranışı

Denklemler (4.36–4.38)'in aksenal basın kuvvetini de hesaba katarak Denklemler (3.708–3.710)'da kullanılmasıyla

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22}^* & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_n \\ W_n \\ H_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.44)$$

bağıntısı elde edilir. Bu katsayılar matrisinin elemanları Denklem (4.43)'tekilerle aynı olup sadece K_{22}^* değeri

$$K_{22}^* = \beta^2(k_3 + \beta^2(k_4 - 2k_5 + k_6) + \beta^4(k_1^{10} - 2k_1^{12} + k_1^{13}) - P) \quad (4.45)$$

şeklindedir. Aşkar olmayan çözüm için katsayılar matrisinin determinantının sıfır olması gerekir. Öz değerler, karakteristik denklemin çözümü ile edilir ve en küçük değer kritik burkulma yükü değerini verir.

5. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu kısımda bir önceki bölümde elde edilen analitik çözümler mikro kiriş ve mikro plakların eğilme, burkulma ve titreşim problemlerine uygulanmıştır. Aksi belirtilmedikçe kullanılan malzeme ve geometrik özellikler şu şekildedir: Mikro kiriş (Ma vd 2008, Kahrobaiyan vd 2013): $E = 1,44 \text{ GPa}$, $\nu = 0,38$, $\rho = 1220 \text{ kg/m}^3$, $k_s = 5/6$, b (genişlik) $= 2h$; mikro plak (Ma vd 2011): $E = 1,44 \text{ GPa}$, $\nu = 0,38$, $\rho = 1220 \text{ kg/m}^3$, $k_s = 0,8$, a (uzunluk) $= b$ (genişlik). KNT (Reddy ve Pang 2008): $E = 1 \text{ TPa}$, $\nu = 0,19$, $\rho = 2300 \text{ kg/m}^3$, $k_s = 0,877$, D (çap) $= 1 \text{ nm}$; Mikrotüpçük (Heireche vd 2010): $E = 1 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$, $\rho = 1470 \text{ kg/m}^3$, D_d (dış çap) $= 25 \text{ nm}$, D_i (iç çap) $= 15 \text{ nm}$; Grafen plaka (Pradhan ve Murmu 2009): $E = 1 \text{ TPa}$, $\nu = 0,25$, $\rho = 2250 \text{ kg/m}^3$, $k_s = 0,8$, $h = 0,34 \text{ nm}$, fonksiyonel değişimli malzemeden yapılmış mikro kiriş (Salamat-talab vd 2012): $E_m = 70 \text{ GPa}$, $\nu_m = 0,23$, $E_c = 380 \text{ GPa}$, $\nu_c = 0,23$, $b = h$, $l_m = l_c = l = 15 \mu\text{m}$ ve $\eta = 1$. Şekiller ve çizelgelerde kullanılan EBT, TBT, TBT*, SBT, KPT, MPT, MPT* ve SPT sırasıyla Bernoulli-Euler, Timoshenko, Timoshenko (yeni kayma düzeltme faktörlü), sinüzoidal kiriş teorileri ile Kirchhoff, Mindlin, Mindlin (yeni kayma düzeltme faktörlü), sinüzoidal plak teorilerini temsil ederken KT, DGÇ ve DŞDD ise klasik, değiştirilmiş gerilme çifti ve değiştirilmiş şekil değiştirme değişimi teorilerini belirtmektedir. Ayrıca, K_w ve K_p boyutsuz Winkler ve Pasternak zemin parametrelerini temsil etmektedir. bir boyutlu yapılar için $K_w = \frac{k_w L^4}{EI}$ ve $K_p = \frac{k_p L^2}{EI}$ iken iki boyutlu yapılarda $K_w = \frac{k_w a^4}{D}$ ve $K_p = \frac{k_p a^2}{D}$ şeklindedir. Burada $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ klasik plak eğilme rijitliğidir. DŞDD teorisinde ilave malzeme boyut ölçek parametreleri birbirine eşit alınmıştır ($l_0 = l_1 = l_2 = l$). Mikro kiriş ve mikro plak için ilave malzeme boyut ölçek parametreleri DGÇ için $l_0 = l_1 = 0$, $l_2 = 17,6 \mu\text{m}$ ve DŞDD için ise $l = 11,01 \mu\text{m}$ alınmıştır (Kahrobaiyan vd 2013).

Burada öncelikle yapılan analizlerin doğruluğunu ve geçerliliğini göstermek için literatürde mevcut çalışmalarla karşılaştırma yapılmıştır. Çizelge 5.1'de iki ucu basit mesnetli epoksiden imal edilmiş mikro kirişe ait boyutsuz kritik burkulma yükü değerleri, Şimşek ve Reddy (2013b) tarafından elde edilen değerlerle karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. Buradaki PBT, parabolik kayma deformasyonlu kiriş teorisini simgelemektedir. $L = 20h$ seçildiğinden kayma deformasyonu etkileri belirgin bir biçimde görülmemektedir. Bu çizelgeden karşılaştırma için alınan ve yeni elde edilen sonuçların birbiri ile mükemmel bir uyum içinde oldukları söylenebilir.

Diğer taraftan Çizelge 5.2'de bütün kenarları basit mesnetli epoksiden yapılmış bir mikro plağa ait ilk üç doğal frekans değerleri, Ke vd (2012) tarafından Mindlin plak teorisi için verilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Buradan, sonuçların birbiri ile uyum içinde olduğu belirtilebilir. Fakat özellikle a/h değerinin küçük ve mod sayısının büyük olduğu durumlarda sonuçlar arasında azda olsa bir fark görülmektedir. Bunun nedeninin ilgili çalışmada yaklaşık çözüm yöntemi olan Ritz metodunun kullanılması olduğu ifade edilebilir.

Çizelge 5.1. İki ucu basit mesnetli epoksi mikro kiriş ait boyutsuz kritik burkulma yükü ($\bar{P}_{cr} = P_{cr}L^2/EI$) değerlerinin karşılaştırılması ($L = 20h$)

Kiriş Teorisi	$h(\mu m)$					
	17,6	52,8	88,0	123,2	158,4	176,0
EBT ¹ (KT)	9,8696	9,8696	9,8696	9,8696	9,8696	9,8696
EBT (KT)	9,8696	9,8696	9,8696	9,8696	9,8696	9,8696
EBT ¹ (DGÇ)	52,7809	14,6375	11,5860	10,7453	10,3993	10,2987
EBT (DGÇ)	52,7809	14,6375	11,5861	10,7453	10,3994	10,2987
TBT ¹ (KT)	9,8028	9,8028	9,8028	9,8028	9,8028	9,8028
TBT (KT)	9,8028	9,8028	9,8028	9,8028	9,8028	9,8028
TBT* (KT)	9,8028	9,8028	9,8028	9,8028	9,8028	9,8028
TBT ¹ (DGÇ)	52,1133	14,5347	11,5072	10,6725	10,3289	10,2290
TBT (DGÇ)	52,1133	14,5347	11,5072	10,6725	10,3290	10,2290
TBT*(DGÇ)	52,6123	14,5651	11,5117	10,6729	10,3290	10,2290
PBT ¹ (KT)	9,8028	9,8028	9,8028	9,8028	9,8028	9,8028
PBT ¹ (DGÇ)	52,6296	14,5620	11,5162	10,6770	10,3316	10,2312
SBT (KT)	9,8029	9,8029	9,8029	9,8029	9,8029	9,8029
SBT (DGÇ)	52,6310	14,5623	11,5164	10,6772	10,3318	10,2313

¹ Şimşek ve Reddy (2013b)'den karşılaştırma için alınan değerler

Çizelge 5.2. Basit mesnetli epoksi mikro plağa ait ilk üç doğal frekans (MHz) değerlerinin karşılaştırılması ($a = b, h = 2l$)

Mod Sayısı	a/h							
	5		10		20		30	
	MPT	MPT ²	MPT	MPT ²	MPT	MPT ²	MPT	MPT ²
1	1,4644	1,4701	0,4036	0,4042	0,1040	0,1040	0,04649	0,04650
2	3,2017	3,2093	0,9573	0,9603	0,2560	0,2568	0,1154	0,1157
3	4,6671	4,6857	1,4644	1,4720	0,4036	0,4058	0,1844	0,1844

² Ke vd (2012)'den karşılaştırma için alınan değerler

Şekil 5.1 ve Şekil 5.2'de sırasıyla $L = 6h$ ve $L = 20h$ için kalınlığa bağlı olarak düzgün yayılı yük altındaki iki ucu basit mesnetli mikro kirişin orta noktasındaki ($x = L/2$) deplasman değerlerinin değişimi görülmektedir. Klasik teoriye dayalı deplasman değerleri sabit iken klasik olmayan elastisite teorilerine dayalı çökme değerleri kalınlığın artmasına bağlı olarak artmaktadır. Kalınlık arttıkça klasik ve yüksek mertebeden elastisite teorileri ile elde edilen deplasman değerleri giderek birbirine yaklaşmaktadır. Buradan kirişin karakteristik boyutlarının artmasıyla boyut etkisinin önemini yitirdiği rahatlıkla söylenebilir. Ayrıca, kayma deformasyonsuz (EBT) ile kayma deformasyonlu (TBT ve SBT) kiriş teorilerine ait sonuçlar arasındaki fark $L = 6h$ için gözle görülebilir halde iken $L = 20h$ için neredeyse sıfır olmaktadır. Burada şu da vurgulanmalıdır ki TBT ve SBT ile elde edilen deplasman değerleri klasik teoriye göre neredeyse birbirine eşit olmaktadır yüksek mertebeden elastisite teorilerine dayalı olarak ulaşılan çökme değerleri arasında hissedilebilir derecede bir fark meydana gelmektedir. Bu nedenle ilave malzeme boyut ölçek parametreleri içeren yeni kayma düzeltme faktörleri (k_s^*) Timoshenko kiriş modeli (TBT*) için geliştirilmiştir.

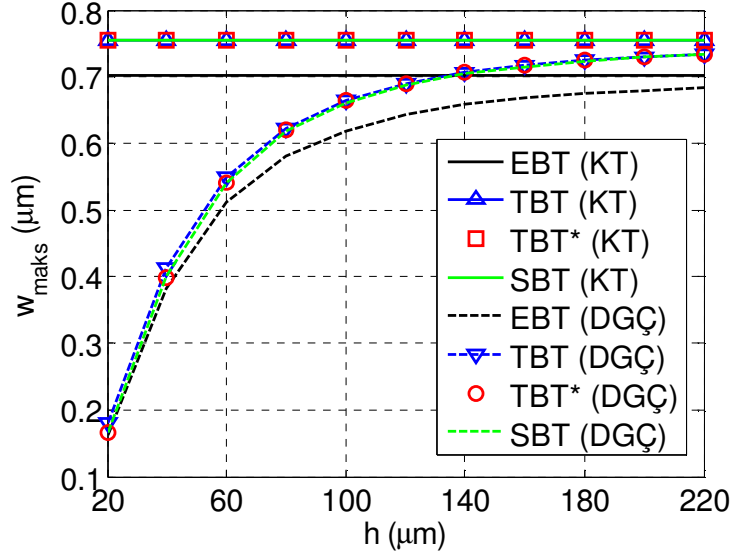
$$k_s^* = k_s \begin{Bmatrix} k_{ac}^{DGÇ} \\ k_{ac}^{DŞDD} \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

ve

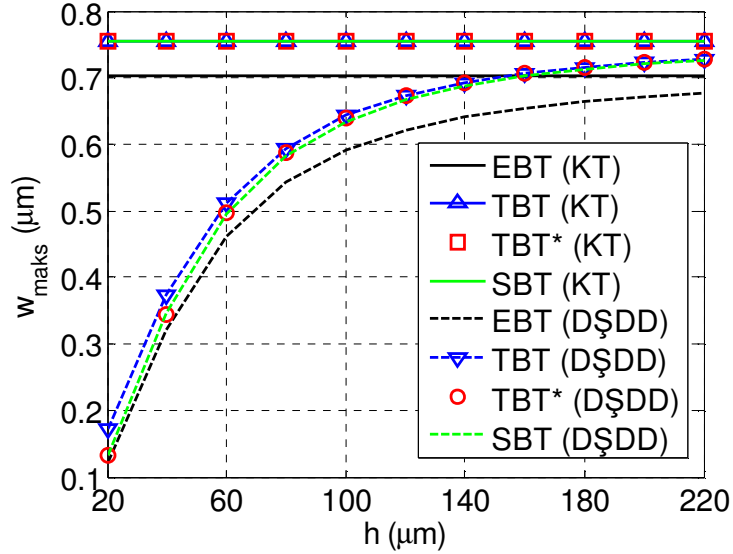
$$k_{ac}^{D\mathcal{S}DD} = 15 \left(\frac{l_0+l_1+l_2}{3} \right)^a / h^a, \quad a = 3 \left(\frac{h}{l_0+l_1+l_2} \right)^{0,08} - 0,45 \quad (5.2)$$

$$k_{ac}^{DG\mathcal{C}} = 4 l_2^a / h^a, \quad a = 9 \left(\frac{h}{l_2} \right)^{0,08} - 0,45 \quad (5.3)$$

a)

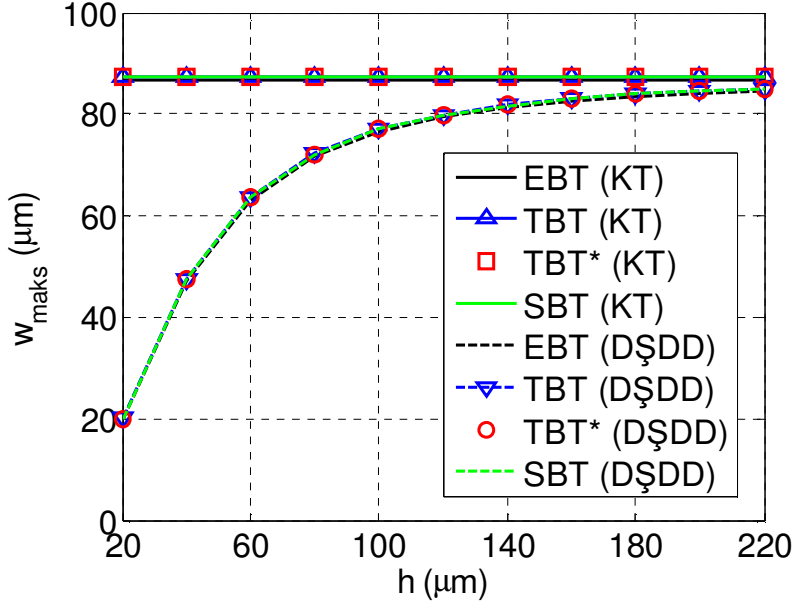


b)

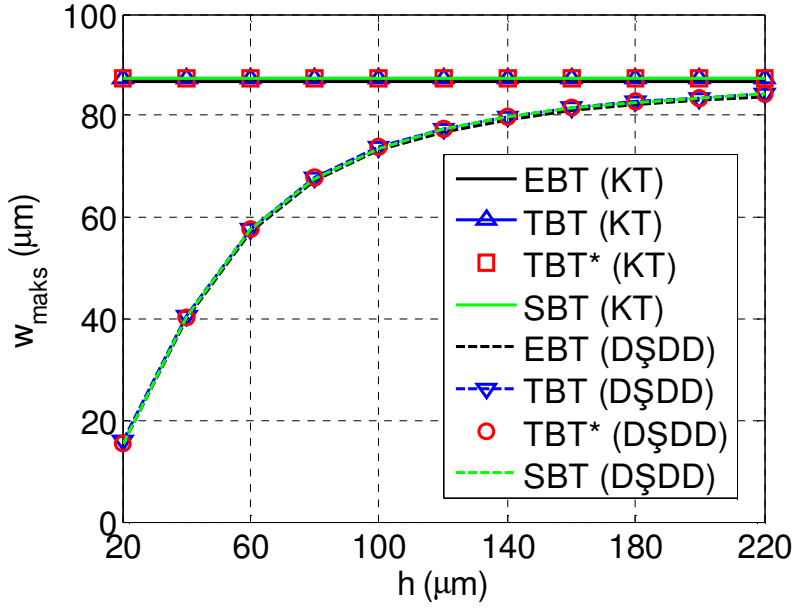


Şekil 5.1. Mikro kırıta oluşan en büyük deplasman değerinin kalınlığa bağlı değişimi ($L = 6h$) a) DGÇ b) DŞDD

a)

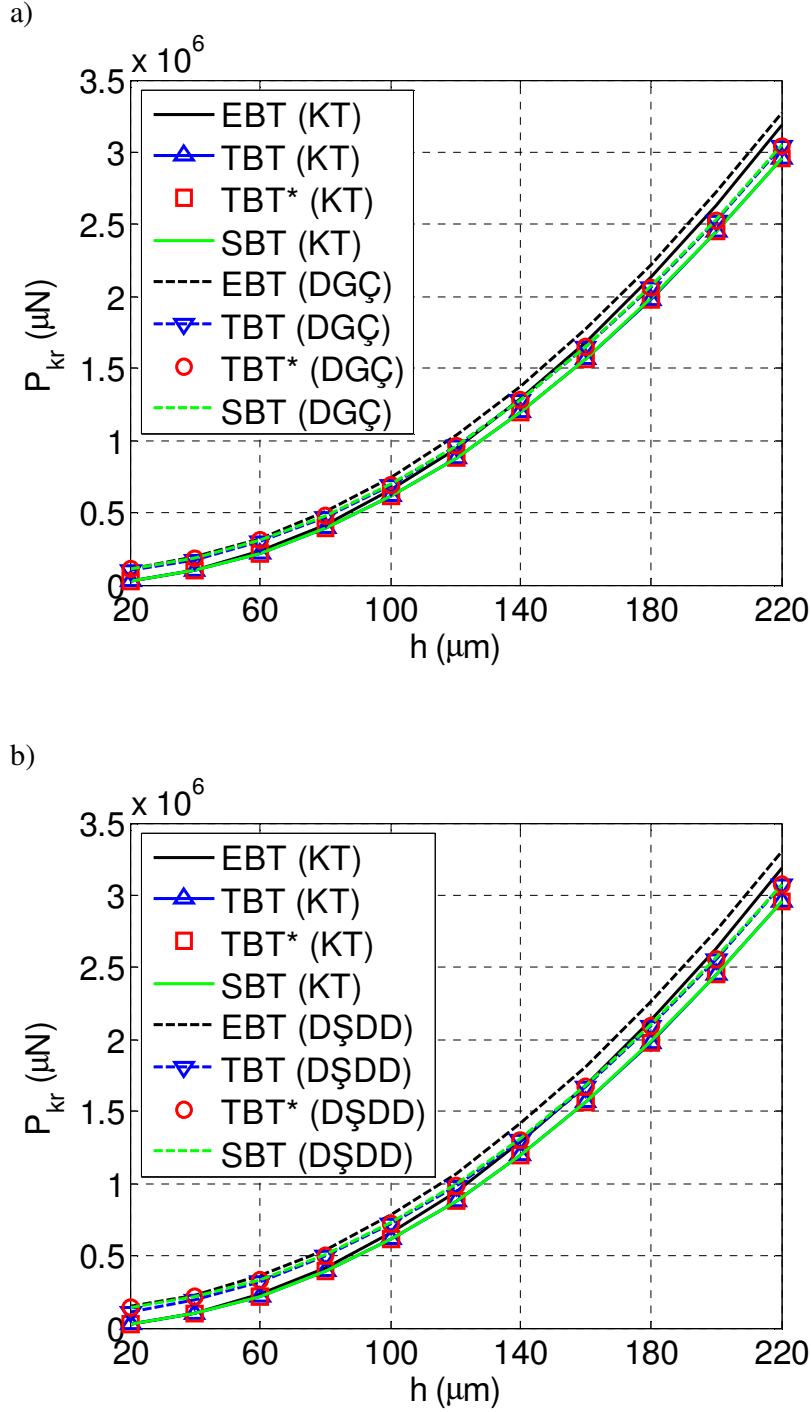


b)

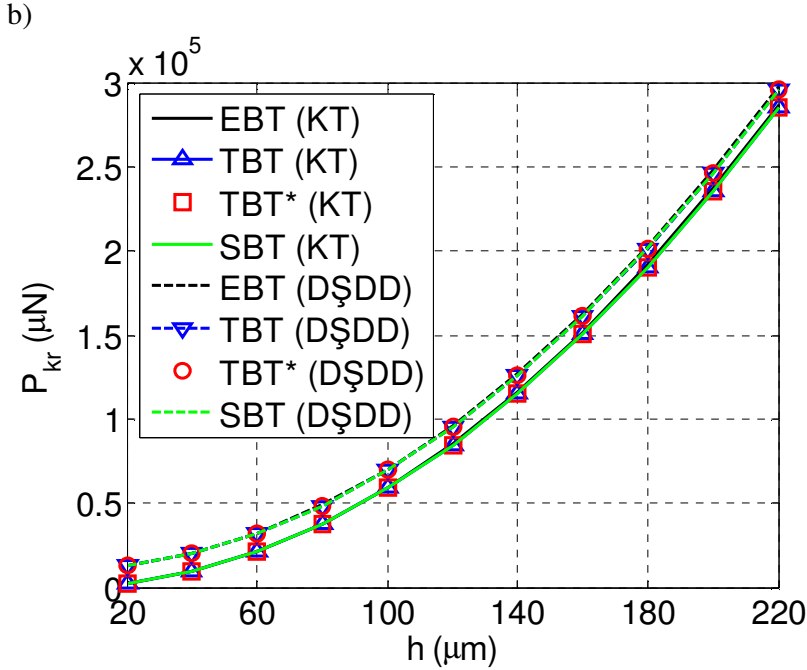
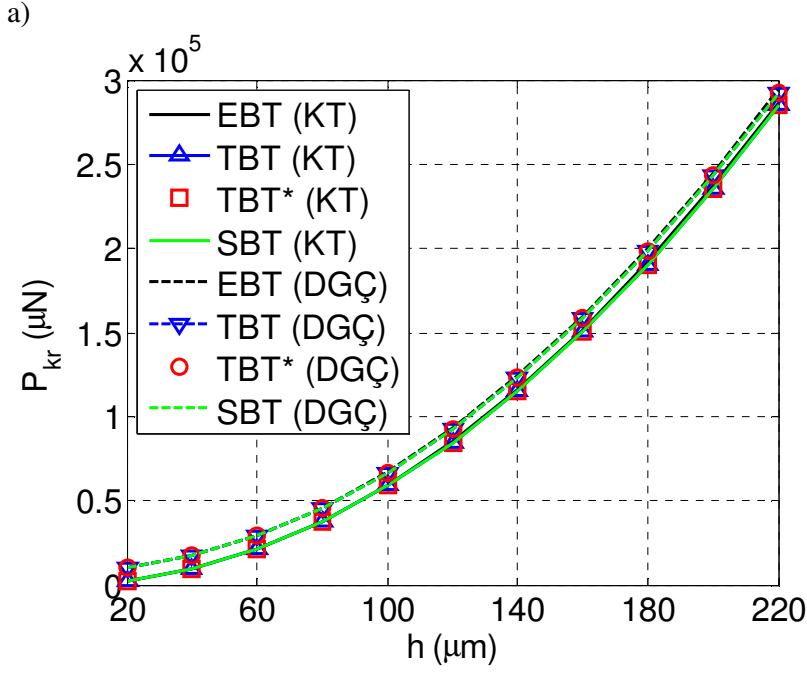


Şekil 5.2. Mikro kirişte oluşan en büyük deplasman değerinin kalınlığa bağlı değişimi ($L = 20h$) a) DGÇ b) DŞDD

Şekiller incelendiğinde SBT ile TBT* dayalı elde edilen sonuçların birbiri ile çok uyumlu oldukları kolayca görülebilir.



Şekil 5.3. Mikro kirişe ait kritik burkulma yükü değerinin kalınlığa bağlı değişimi ($L = 6h$) a) DGÇ b) DŞDD



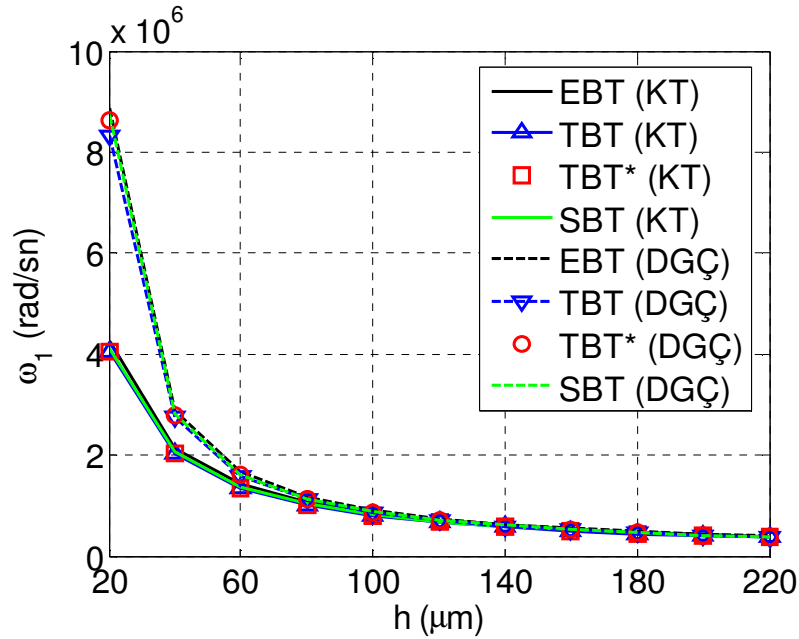
Şekil 5.4. Mikro kirişe ait kritik burkulma yükü değerinin kalınlığa bağlı değişimi ($L = 20h$) a) DGÇ b) DŞDD

İki ucu basit mesnetli mikro kirişin kritik burkulma yükü değerlerinin değişimi Şekil 5.3 ve Şekil 5.4'te sırasıyla $L = 6h$ ve $L = 20h$ için kalınlığa bağlı olarak

çizdirilmiştir. Kiriş kalınlığının artmasıyla birlikte kritik burkulma yükü değerleri de giderek artmaktadır. Bunun yanında, bu şekillerden faydalanarak klasik burkulma yükü değerlerinin boyut etkili değerlerden daha az olduğu belirtilebilir. Ayrıca, kayma deformasyonsuz ile kayma deformasyonlu kiriş teorilerine ait kritik burkulma yükü değerleri arasındaki fark kısa mikro kiriş ($L = 6h$) için nispeten daha belirgin halde iken uzun mikro kiriş ($L = 20h$) için ise neredeyse ortadan kalkmaktadır.

Şekil 5.5 ve Şekil 5.6’da sırasıyla $L = 6h$ ve $L = 20h$ için kalınlığa bağlı mikro kirişin serbest titreşim durumuna ait temel frekans değerlerinin değişimi sunulmuştur. Mikro kiriş kalınlığının artmasına bağlı olarak karakteristik boyutlarında meydana gelen artışa bağlı olarak hem klasik hem de klasik olmayan (yüksek mertebeden elastisite teorileri ile elde edilen) temel frekans değerlerinde bir azalma söz konusu olmakta ve sonuçlar giderek birbirine yaklaşmaktadır. Daha önceden de belirtildiği üzere, kirişin karakteristik boyutlarında meydana gelen artışla birlikte boyut etkisinin önemini kaybettiği vurgulanabilir. Ayrıca, kritik burkulma yükü değerlerinde olduğu gibi kayma deformasyonsuz ile kayma deformasyonlu kiriş teorilerine ait sonuçlar arasındaki fark $L = 6h$ için önemli iken $L = 20h$ için neredeyse belirsiz hale gelmektedir.

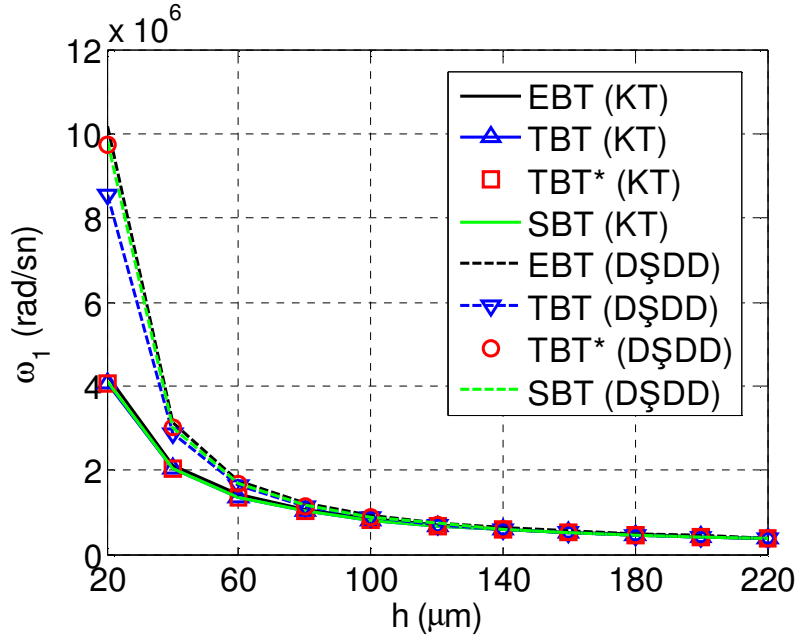
a)



Şekil 5.5. Mikro kirişe ait temel frekans değerinin kalınlığa bağlı değişimi ($L = 6h$)

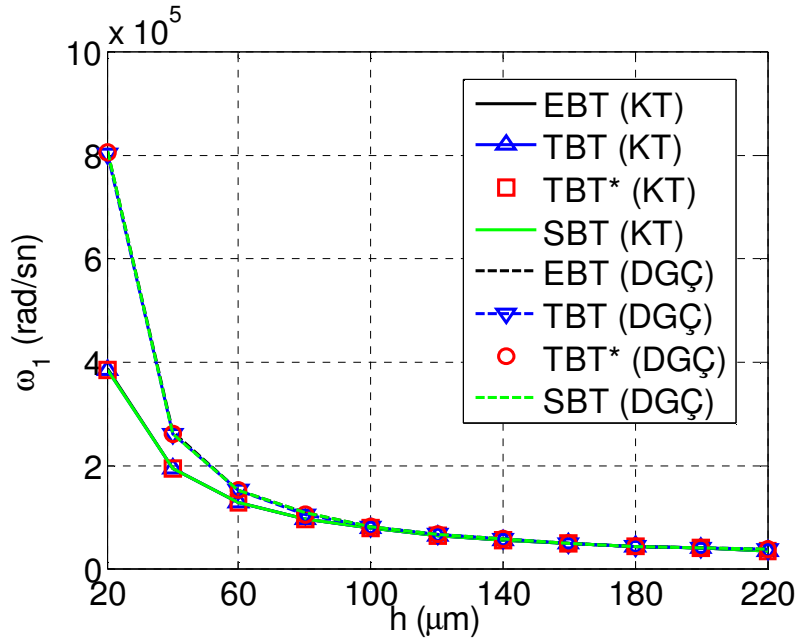
a) DGÇ b) DŞDD (Devamı arkada)

b)

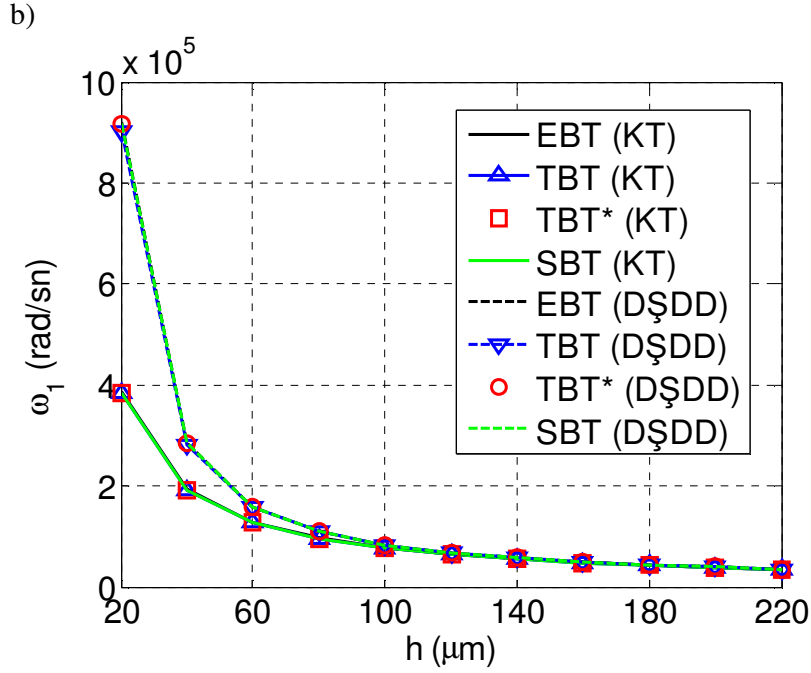


Şekil 5.5. Mikro kirişe ait temel frekans değerinin kalınlığa bağlı değişimi ($L = 6h$)
a) DGÇ b) DŞDD

a)



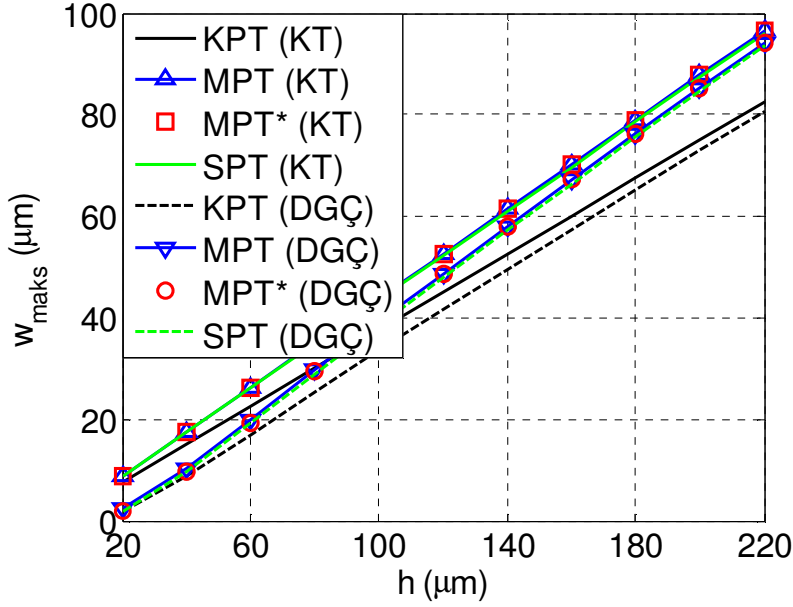
Şekil 5.6. Mikro kirişe ait temel frekans değerinin kalınlığa bağlı değişimi ($L = 20h$)
a) DGÇ b) DŞDD (Devamı arkada)



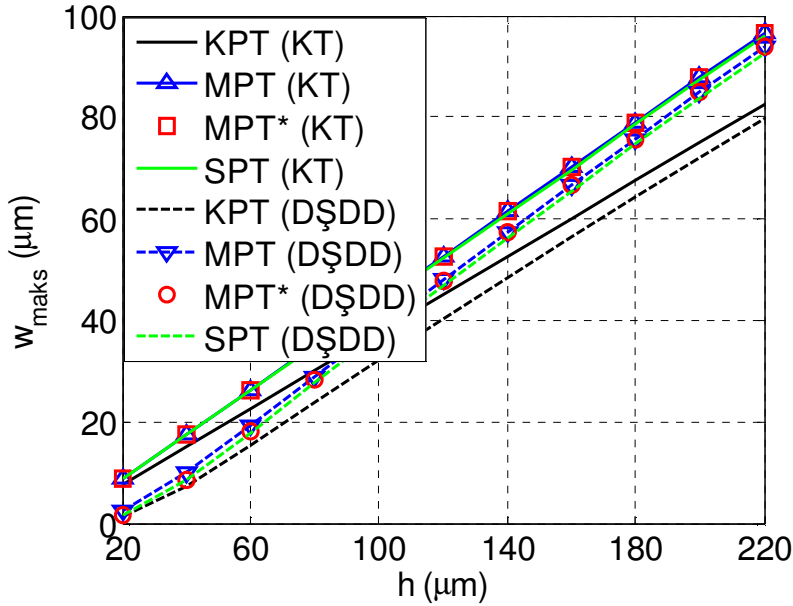
Şekil 5.6. Mikro kirişe ait temel frekans değerinin kalınlığa bağlı değişimi ($L = 20h$)
a) DGÇ b) DŞDD

Şekiller 5.7–5.12’de bütün kenarları basit mesnetli kare bir mikro plağa ait maksimum deplasman, kritik burkulma yükü ve temel frekans değerleri farklı uzunluk (genişlik)/kalınlık oranları için çeşitli plak teorilerine dayalı olarak verilmiştir. Mikro kiriş için yapılan genel yorumların mikro plak için de geçerli olduğu söylenebilir. Plak kalınlığı $20 \mu m$ olması durumunda klasik ve klasik olmayan plak teorilerine ait sonuçlar arasında gözle görülür bir fark bulunurken kalınlığın $220 \mu m$ olması durumunda aradaki bu fark neredeyse ortadan kalkmaktadır. MPT’de de bir kayma düzeltme faktörüne gereksinim duyulmakta olup TBT’nin iki boyutlu hali olarak düşünülebilmektedir. Dolayısıyla, Denklemler (5.1–5.3)’te TBT için önerilen yeni kayma düzeltme faktörleri, MPT için de kullanılmıştır (MPT*). Şekillere bakıldığında özellikle uzunluk (genişlik)/kalınlık oranının 6 olduğu mikro plaklarda yüksek mertebeden elastisite teorilerine (DGÇ ve DŞDD) dayalı MPT ile SPT’ye ait sonuçlar arasında plak kalınlığının küçük olduğu durumlarda gözle görülür bir farkın olduğu görülebilir. Buna karşın, yeni kayma düzeltme faktörlerinin kullanıldığı MPT* ile SPT sonuçlarının uyum içinde oldukları belirtilebilir.

a)

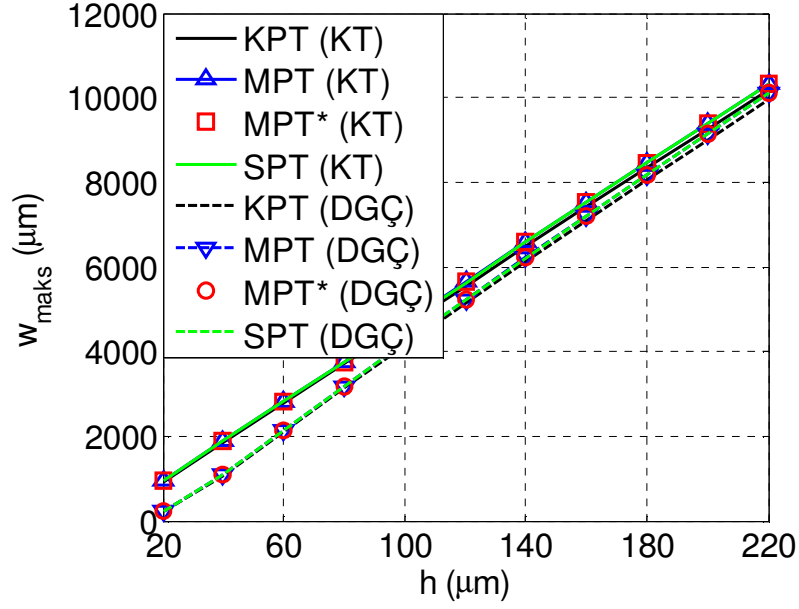


b)

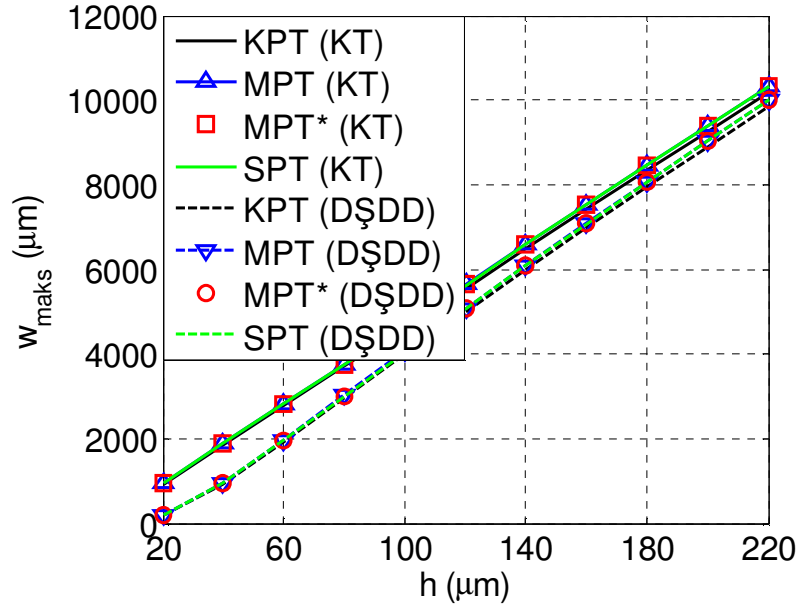


Şekil 5.7. Mikro plakta oluşan en büyük deplasman değerinin kalınlığa bağlı değişimi ($a = b = 6h$) a) DGÇ b) DŞDD

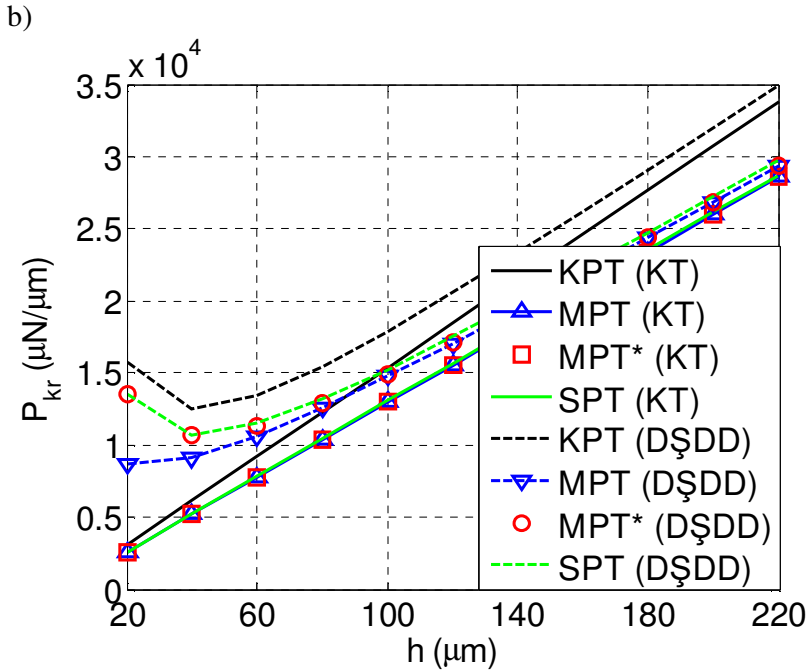
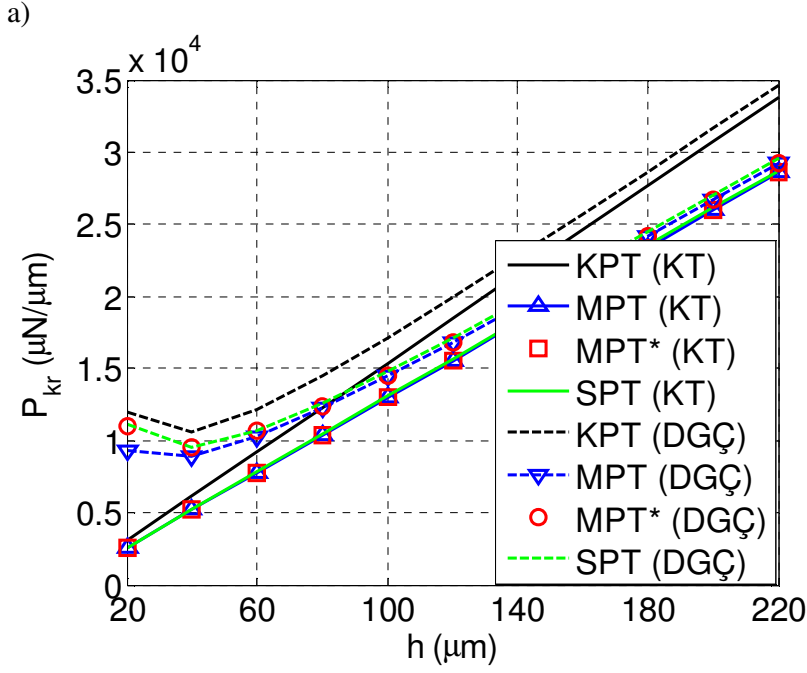
a)



b)

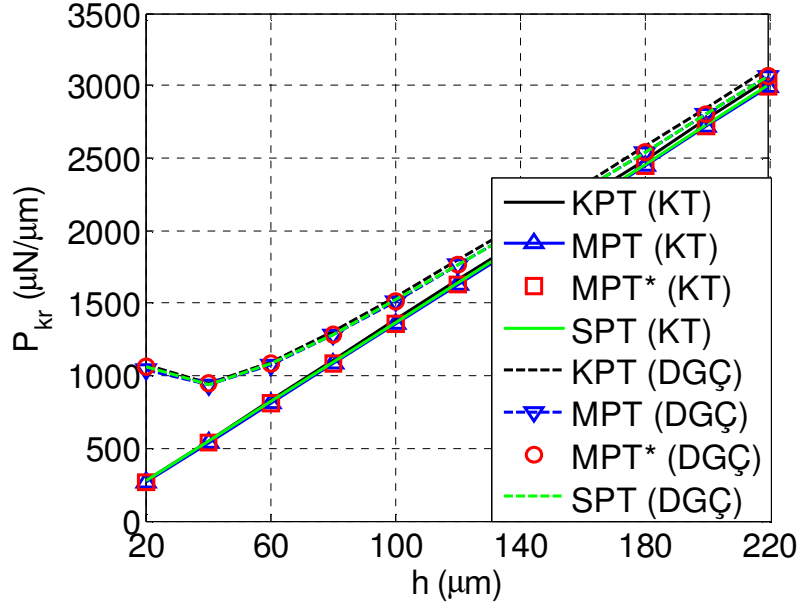


Şekil 5.8. Mikro plakta oluşan en büyük deplasman değerinin kalınlığa bağlı değişimi ($a = b = 20h$) a) DGÇ b) DŞDD

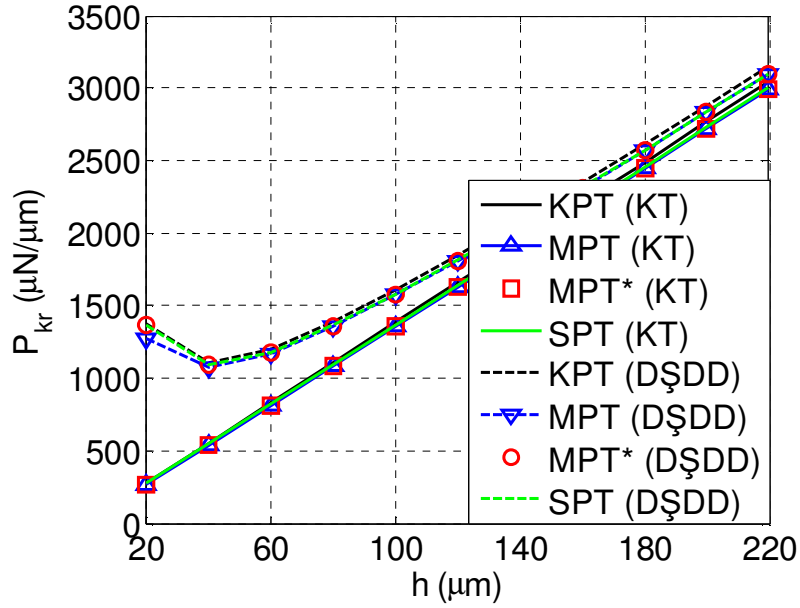


Şekil 5.9. Mikro plağa ait kritik burkulma yükü değerinin kalınlığa bağlı değişimi
($a = b = 6h$) a) DGÇ b) DŞDD

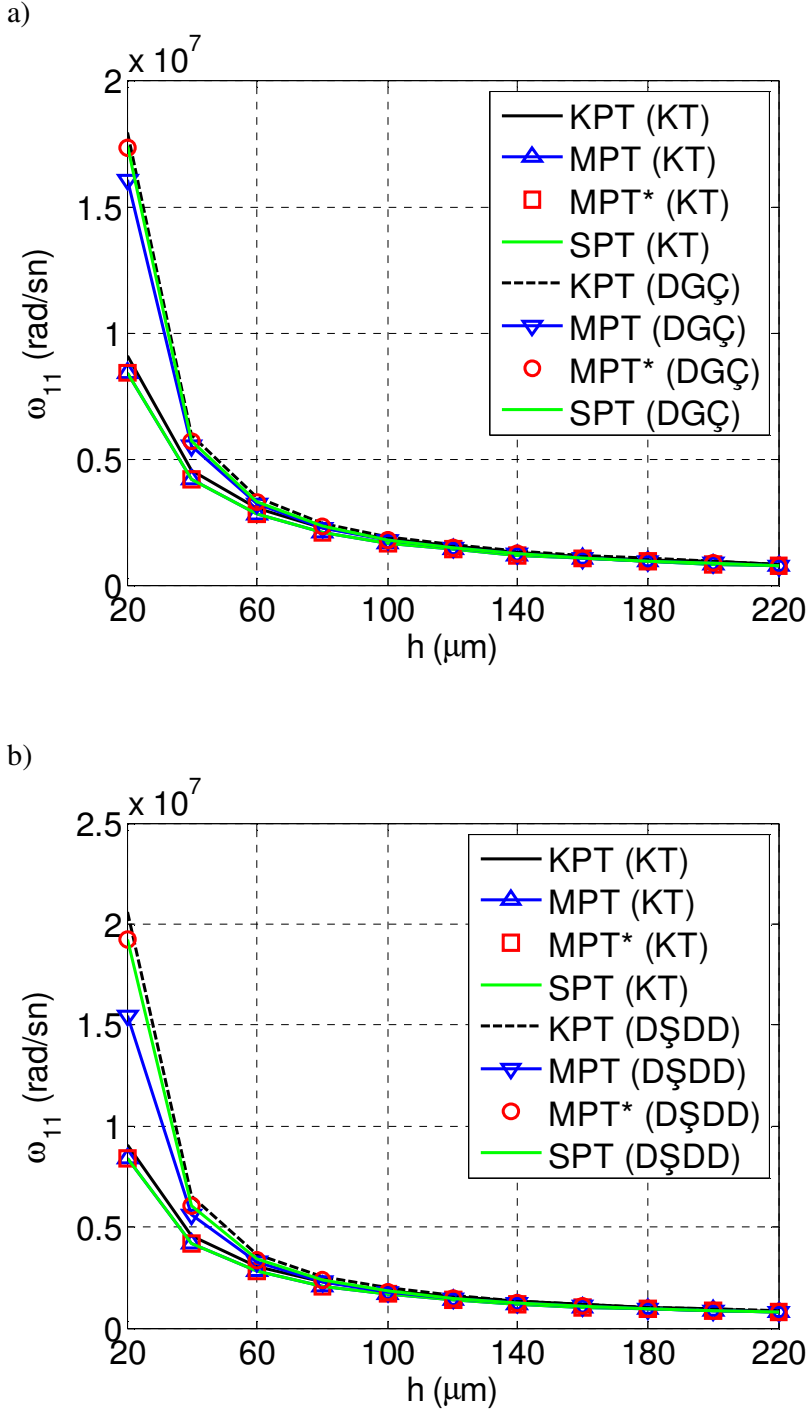
a)



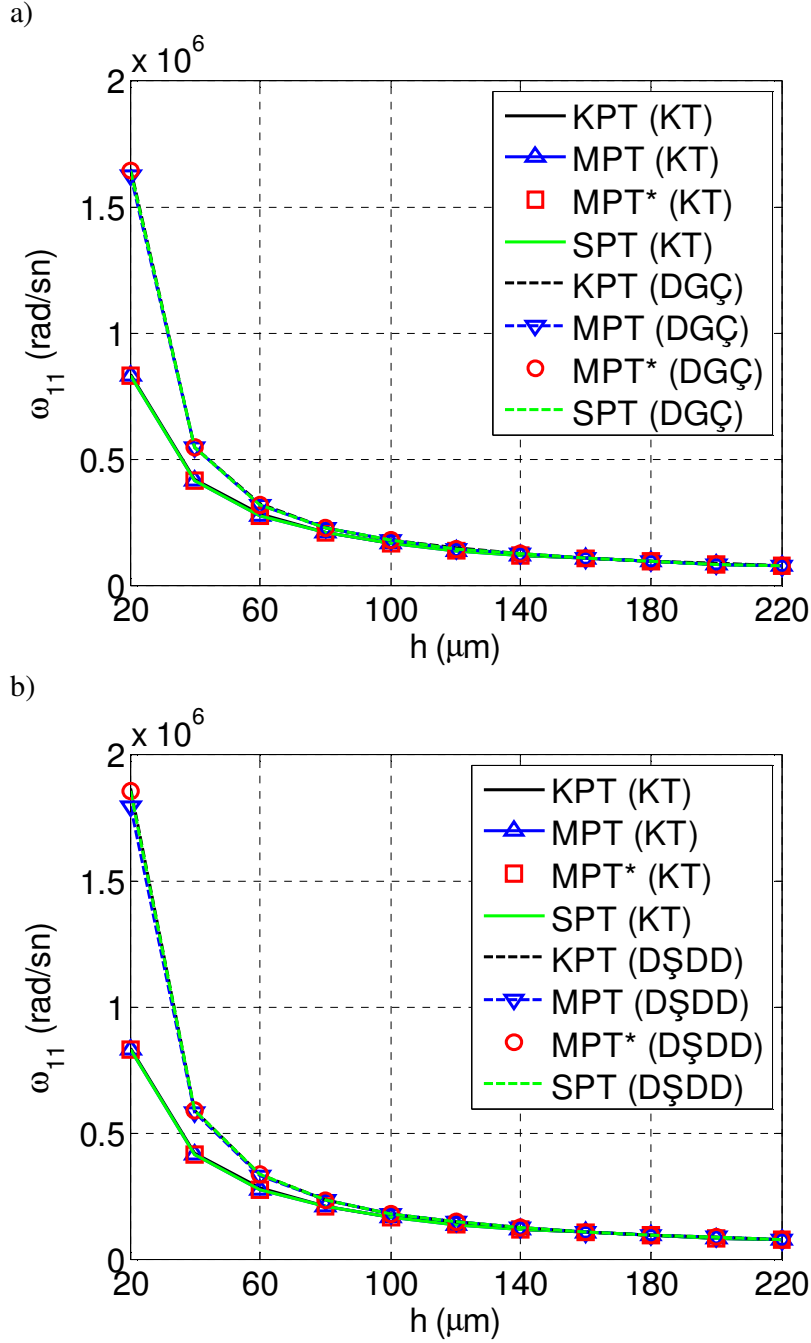
b)



Şekil 5.10. Mikro plağa ait kritik burkulma yükü değerinin kalınlığa bağlı değişimi ($a = b = 20h$) a) DGÇ b) DŞDD



Şekil 5.11. Mikro plağa ait temel frekans değerinin kalınlığa bağlı değişimi
($a = b = 6h$) a) DGÇ b) DŞDD

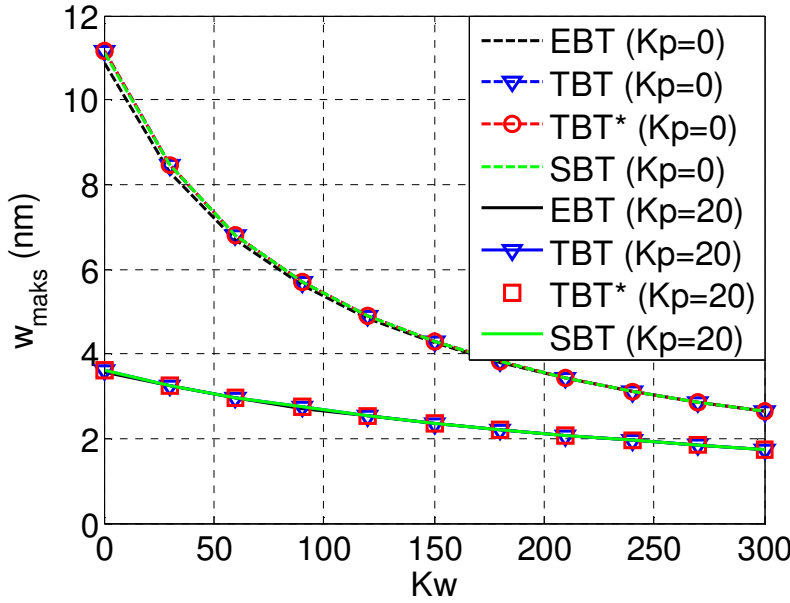


Şekil 5.12. Mikro plağa ait temel frekans değerinin kalınlığa bağlı değişimi
($a = b = 20h$) a) DGÇ b) DŞDD

Elastik zemin parametrelerinin karbon nanotüpte meydana gelen maksimum deplasman, kritik burkulma yükü ve temel frekans değerleri üzerindeki etkisi Şekiller 5.13–5.15'te sunulmuştur. K_w ve K_p değerlerinin her ikisinin de hesaba katıldığı

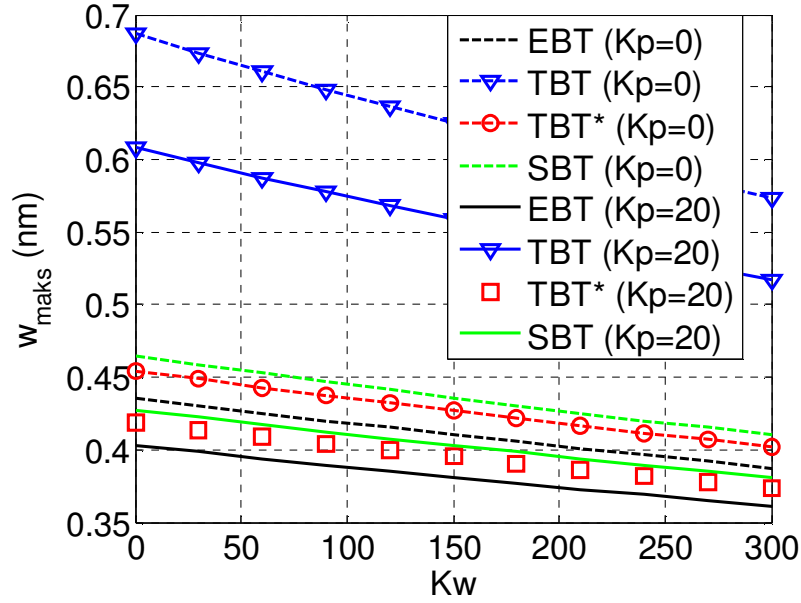
durumlar Pasternak elastik zemin modeline, K_p değerinin sıfır olduğu durumlar Winkler elastik zemin modeline ve her iki parametrenin sıfır olduğu durumlar ise elastik zemin etkisinin olmadığı mikro plak modeline ait sonuçları vermektedir. Bu şekillere bakıldığında elastik zemin parametrelerinin hesaba katılmasıyla maksimum deplasman değerlerinde azalma; buna karşın kritik burkulma yükü ve temel frekans değerlerinde artışın meydana geldiği rahatlıkla söylenebilir. Ayrıca, burada Pasternak zemin parametresinin etkisinin Winkler zemin parametresinin etkisinden daha fazla olduğu da yorumlanabilir. Ek olarak, boy/çap değerinin küçük olmasından dolayı özellikle boyut etkisinin dikkate alındığı durumlarda kayma deformasyonunun etkileri açık bir biçimde görülmektedir. Kayma deformasyonu etkilerine bağlı olarak EBT'ye göre elde edilen sonuçların diğerlerinden farklı ve SBT ile TBT*'ye göre elde edilen değerlerin hemen hemen aynı olduğu belirtilebilir. Dahası klasik kayma düzeltme faktörlerinin kullanıldığı TBT'ye dayalı maksimum deplasman değerlerinin SBT ve TBT*'ye ait deplasman değerlerinden belirgin bir biçimde farklı olduğu da vurgulanabilir.

a)



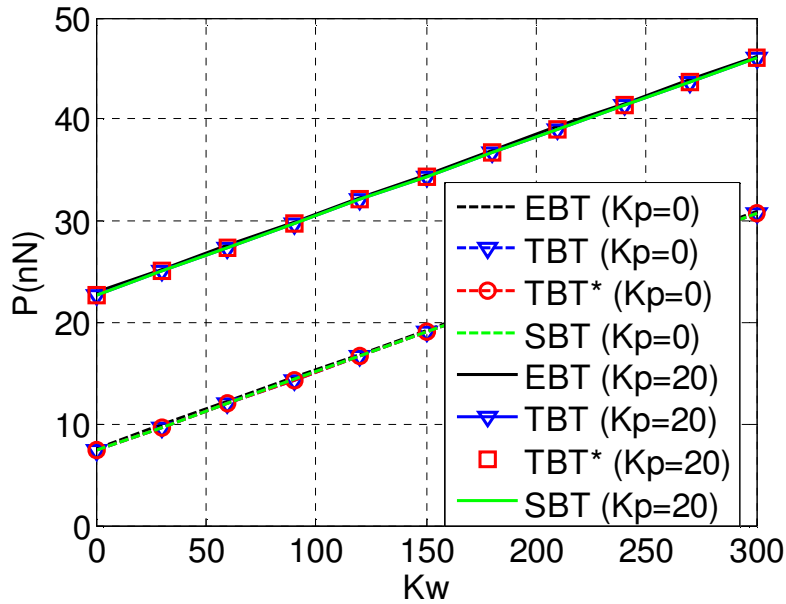
Şekil 5.13. Elastik zemin parametrelerinin düzgün yayılı yük etkisi altındaki karbon nanotüpte meydana gelen deplasman değerleri üzerindeki etkisi ($L=8D$, $q=10 \text{ nN/nm}$) a) KT b) DŞDD (Devamı arkada)

b)



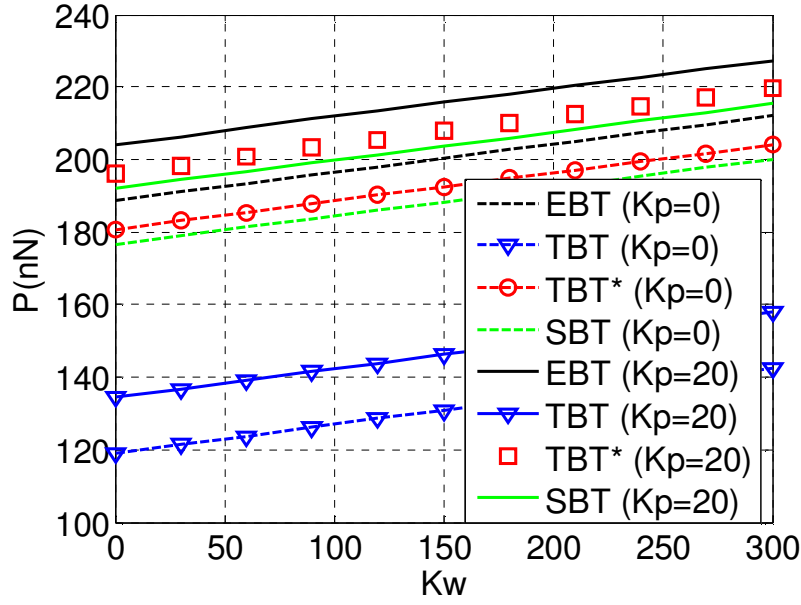
Şekil 5.13. Elastik zemin parametrelerinin düzgün yayılı yük etkisi altındaki karbon nanotüpte meydana gelen deplasman değerleri üzerindeki etkisi ($L=8D$, $q=10$ nN/nm) a) KT b) DŞDD

a)



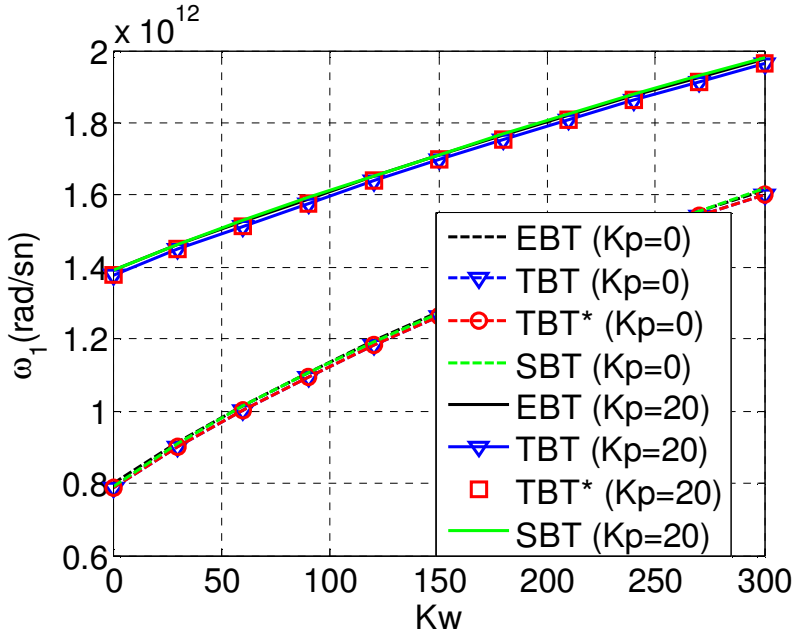
Şekil 5.14. Elastik zemin parametrelerinin karbon nanotüpe ait burkulma yükü değeri üzerindeki etkisi ($L=8D$) a) KT b) DŞDD (Devamı arkada)

b)

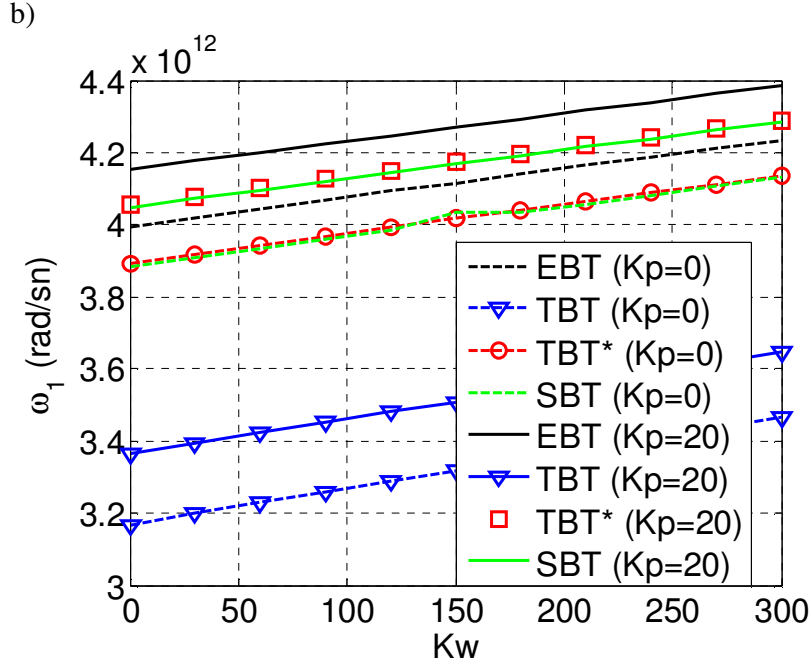


Şekil 5.14. Elastik zemin parametrelerinin karbon nanotüpe ait burkulma yükü değeri üzerindeki etkisi ($L=8D$) a) KT b) DŞDD

a)



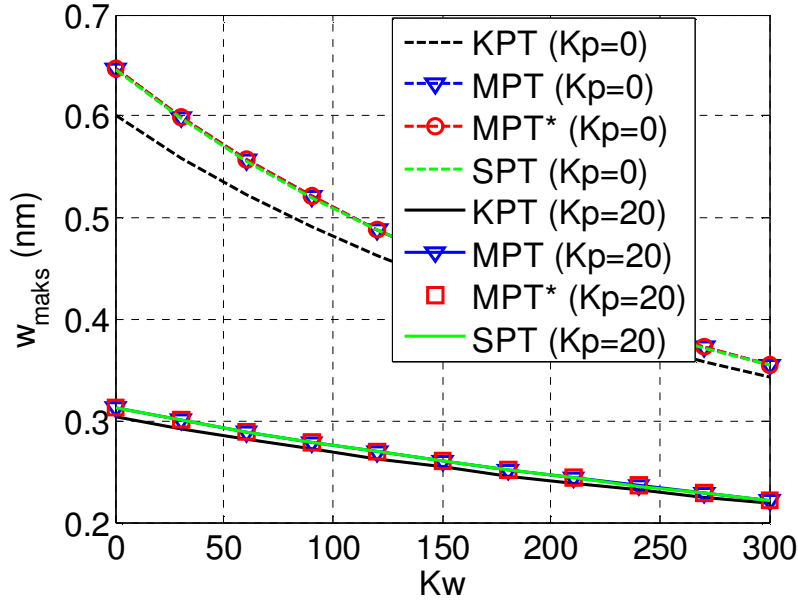
Şekil 5.15. Elastik zemin parametrelerinin karbon nanotüpe ait doğal frekans değeri üzerindeki etkisi ($L=8D$) a) KT b) DŞDD (Devamı arkada)



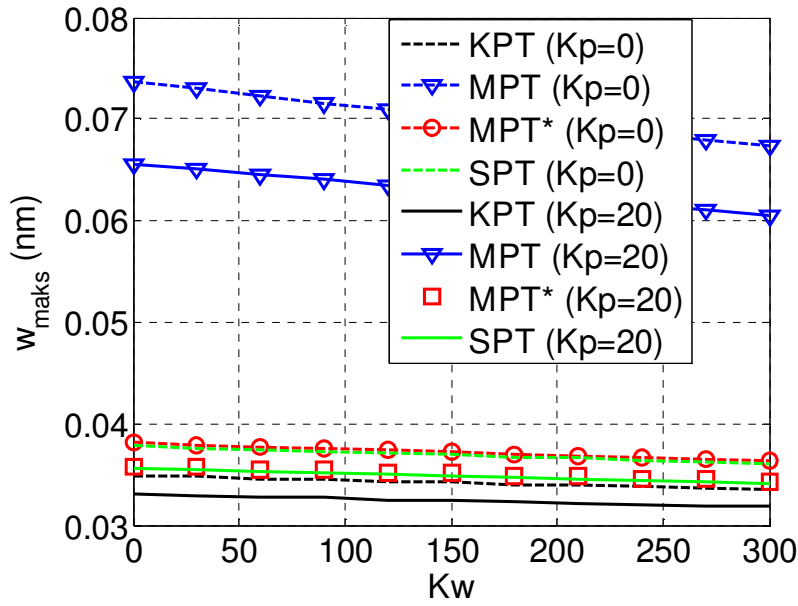
Şekil 5.15. Elastik zemin parametrelerinin karbon nanotüpe ait doğal frekans değeri üzerindeki etkisi ($L=8D$) a) KT b) DŞDD

Şekiller 5.16–5.18’de elastik zemin parametrelerinin grafen plakaya ait en büyük deplasman, burkulma yükü ve doğal frekans değerleri üzerindeki etkisi irdelenmiştir. Burada, elastik zemin parametrelerinin hesaba katılmasıyla grafen plakanın orta noktasında meydana gelen deplasman değerlerinde azalma gözlemlenirken burkulma yükü ve doğal frekans değerlerinde artışın meydana geldiği görülmektedir. Bu değişimlerin özellikle klasik sonuçlarda daha belirgin olduğu söylenebilir. Ayrıca, uzunluk (genişlik)/kalınlık değerinin küçük olmasından dolayı özellikle boyut etkisinin dikkate alındığı durumlarda kayma deformasyonunun etkileri açık bir biçimde görülmektedir. Kayma deformasyonu etkilerine bağlı olarak KPT’ye göre elde edilen sonuçların diğerlerinden daha büyük ve SPT ile MPT*’ye göre elde edilen değerlerin ise neredeyse aynı olduğu vurgulanabilir. Bunlara ek olarak, klasik kayma düzeltme faktörlerinin kullanıldığı MPT’ye dayalı olarak ulaşılan sonuçların SPT ve MPT*’ye ait sonuçlardan gözle görülür bir biçimde farklı olduğu da belirtilebilir.

a)

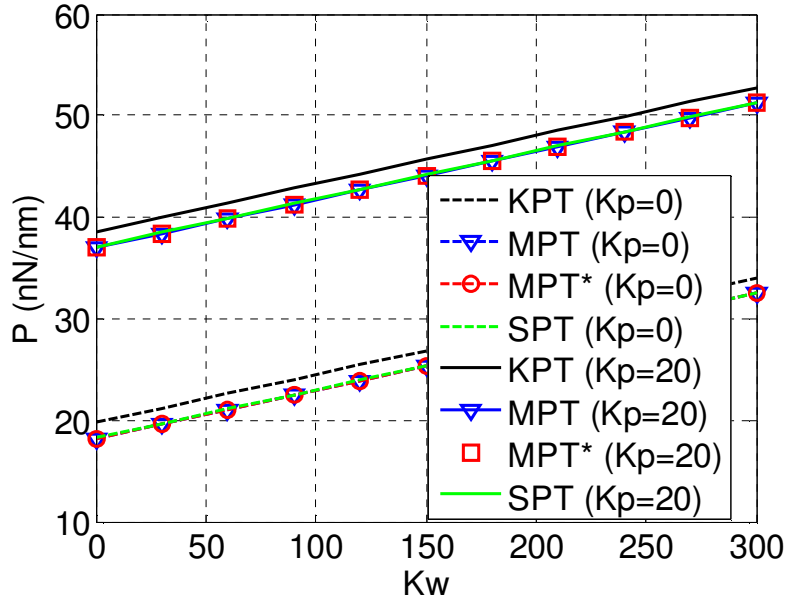


b)

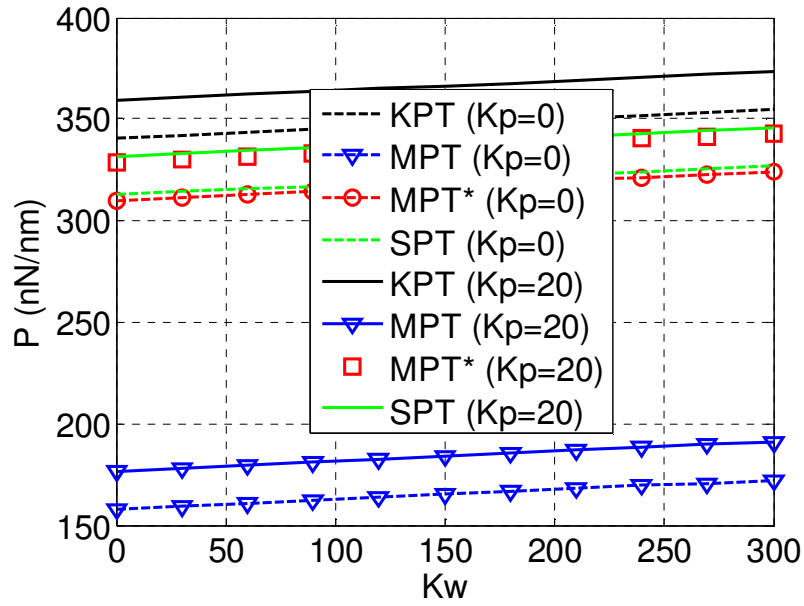


Şekil 5.16. Elastik zemin parametrelerinin grafen plakamın orta noktasındaki deplasman değeri üzerindeki etkisi ($a = b = 8h$) a) KT b) DŞDD

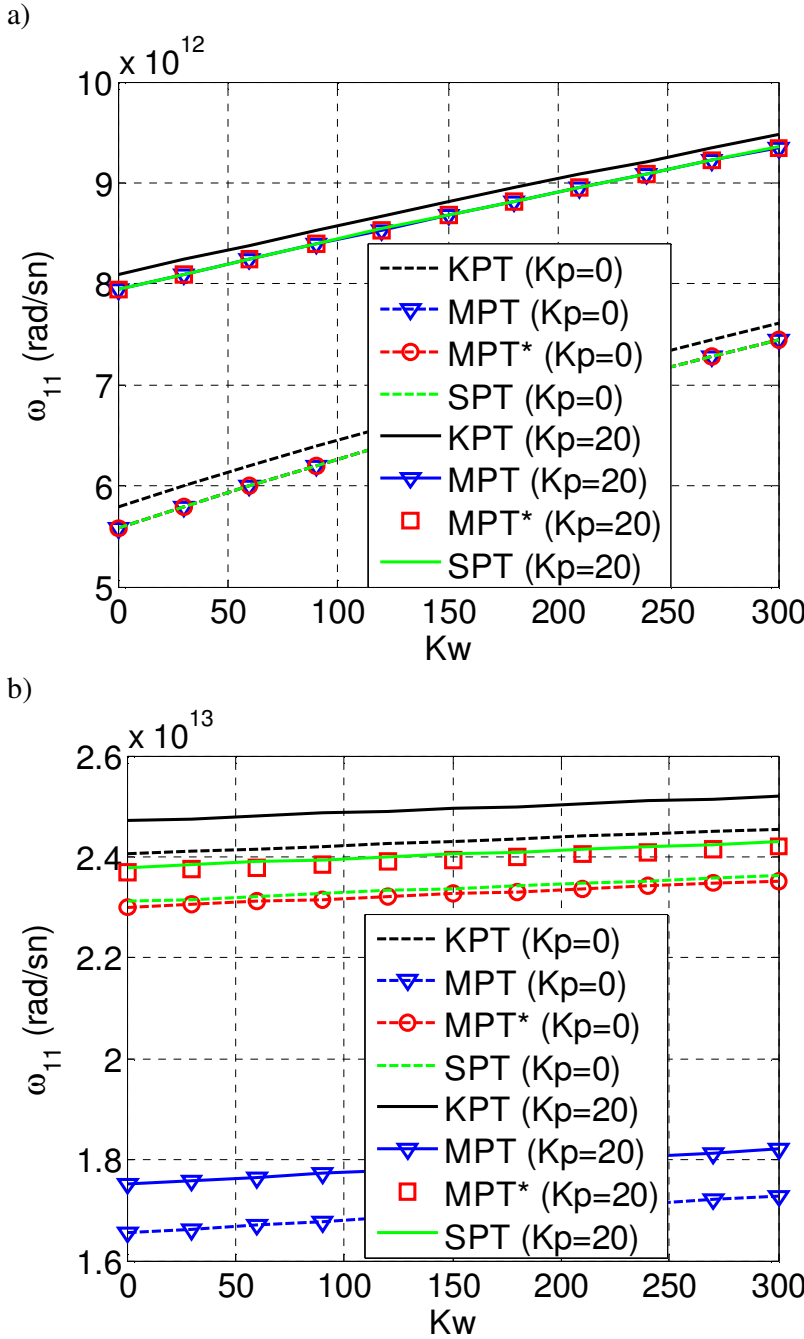
a)



b)



Şekil 5.17. Elastik zemin parametrelerinin grafen plakaya ait burkulma yükü değeri üzerindeki etkisi ($a = b = 8h, m = n = 1$) a) KT b) DŞDD



Şekil 5.18. Elastik zemin parametrelerinin grafen plakaya ait doğal frekans değeri üzerindeki etkisi ($a = b = 8h, m = n = 1$) a) KT b) DŞDD

Çizelgeler 5.3–5.8’de izole edilmiş veya elastik zemin üzerinde bulunan mikrotüpçüğe ait en büyük deplasman, kritik burkulma yükü ve temel frekans değerleri $L = 50D_d$ ve $L = 500D_d$ için sunulmuştur. Mikrotüpçüğün izotrop ve anizotrop özelliklere sahip olması durumları dikkate alınmıştır. Bu sonuçlardan daha büyük deplasman değerlerinin KT ve SBT için, daha büyük kritik burkulma yükü ve temel

frekans değerlerinin ise DŞDD ve EBT için elde edildiği görülmektedir. Ayrıca mikrotüpçüğün anizotropik yapısının eğilme, burkulma ve titreşim davranışları üzerindeki etkisi kayma deformasyonlu SBT'de EBT'ye nazaran çok daha önemli olduğu vurgulanabilir. Bunlara ek olarak, elastik zemin etkisinin hesaba katılması sonucunda maksimum deplasman değerleri azalırken kritik burkulma yükü ve temel frekans değerlerinin yükseldiği açıkça belirtilebilir.

Çizelge 5.3. Tekil yük etkisi altındaki mikrotüpçüğün en büyük deplasman değerleri (μm) ($Q_0 = 0,01nN, l = D_d, K_w = K_p = 0$)

$r = G/E$	Kiriş Teorisi	$L=50D_d$			$L=500D_d$		
		KT	DGÇ	DŞDD	KT	DGÇ	DŞDD
İzotropik	EBT	0,0244	0,0044	0,0014	24,3803	4,4128	1,4351
	SBT	0,0244	0,0044	0,0015	24,3805	4,4129	1,4353
10^{-4}	EBT	0,0244	0,0244	0,0243	24,3803	24,3516	24,2794
	SBT	0,1196	0,1192	0,1186	25,4688	25,4385	25,3656
10^{-5}	EBT	0,0244	0,0244	0,0244	24,3803	24,3774	24,3702
	SBT	0,6570	0,6562	0,6546	34,9382	34,9332	34,9241
10^{-6}	EBT	0,0244	0,0244	0,0244	24,3803	24,3800	24,3793
	SBT	1,6259	1,6254	1,6245	119,5624	119,5585	119,5521

Çizelge 5.4. Tekil yüke maruz kalan elastik zemin üzerindeki mikrotüpçüğün en büyük deplasman değerleri (μm) ($Q_0 = 0,01nN, l = D_d, K_w = 100, K_p = 10$)

$r = G/E$	Kiriş Teorisi	$L=50D_d$			$L=500D_d$		
		KT	DGÇ	DŞDD	KT	DGÇ	DŞDD
İzotropik	EBT	0,0082	0,0032	0,0013	8,2221	3,2389	1,2834
	SBT	0,0082	0,0032	0,0013	8,2222	3,2389	1,2835
10^{-4}	EBT	0,0082	0,0082	0,0082	8,2221	8,2187	8,2102
	SBT	0,0136	0,0136	0,0135	8,4799	8,4762	8,4675
10^{-5}	EBT	0,0082	0,0082	0,0082	8,2221	8,2218	8,2209
	SBT	0,0150	0,0150	0,0150	10,0643	10,0635	10,0621
10^{-6}	EBT	0,0082	0,0082	0,0082	8,2221	8,2221	8,2220
	SBT	0,0152	0,0152	0,0152	13,6041	13,6039	13,6035

Çizelge 5.5. Mikrotüpçük için burkulma yükü (nN) değerleri ($l = D_d, K_w = K_p = 0, m = 1$)

$r = G/E$	Kiriş Teorisi	$L=50D_d$			$L=500D_d$		
		KT	DGÇ	DŞDD	KT	DGÇ	DŞDD
İzotropik	EBT	0,1054	0,5824	1,7913	0,0011	0,0058	0,0179
	SBT	0,1053	0,5815	1,7709	0,0011	0,0058	0,0179
10^{-4}	EBT	0,1054	0,1055	0,1059	0,0011	0,0011	0,0011
	SBT	0,0231	0,0232	0,0233	0,0010	0,0010	0,0010
10^{-5}	EBT	0,1054	0,1054	0,1055	0,0011	0,0011	0,0011
	SBT	0,0040	0,0040	0,0040	0,0008	0,0008	0,0008
10^{-6}	EBT	0,1054	0,1054	0,1054	0,0011	0,0011	0,0011
	SBT	0,0016	0,0016	0,0016	0,0002	0,0002	0,0002

Çizelge 5.6. Elastik zemin üzerindeki mikrotüpçük için burkulma yükü (nN) değerleri
($l = D_d$, $K_w = 100$, $K_p = 10$, $m = 1$)

$r = G/E$	Kiriş Teorisi	$L=50D_d$			$L=500D_d$		
		KT	DGÇ	DŞDD	KT	DGÇ	DŞDD
İzotropik	EBT	0,3205	0,7975	2,0064	0,0032	0,0080	0,0201
	SBT	0,3204	0,7966	1,9858	0,0032	0,0080	0,0201
10^{-4}	EBT	0,3205	0,3206	0,3209	0,0032	0,0032	0,0032
	SBT	0,2382	0,2382	0,2383	0,0032	0,0032	0,0032
10^{-5}	EBT	0,3205	0,3205	0,3205	0,0032	0,0032	0,0032
	SBT	0,2190	0,2190	0,2191	0,0029	0,0029	0,0029
10^{-6}	EBT	0,3205	0,3205	0,3205	0,0032	0,0032	0,0032
	SBT	0,2166	0,2166	0,2166	0,0024	0,0024	0,0024

Çizelge 5.7. Mikrotüpçüğe ait doğal frekans (MHz) değerleri ($l = D_d$, $m = 1$)

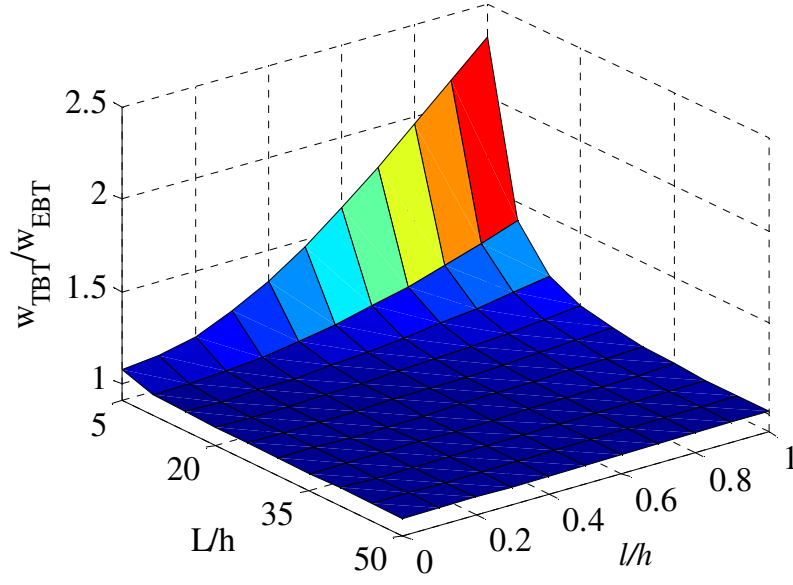
$r = G/E$	Kiriş Teorisi	$L=50D_d$			$L=500D_d$		
		KT	DGÇ	DŞDD	KT	DGÇ	DŞDD
İzotropik	EBT	6,0425	14,2030	24,9082	0,0604	0,1421	0,2491
	SBT	6,0406	14,1939	24,7694	0,0604	0,1421	0,2491
10^{-4}	EBT	6,0425	6,0461	6,0551	0,0604	0,0605	0,0606
	SBT	2,8305	2,8338	2,8385	0,0593	0,0594	0,0595
10^{-5}	EBT	6,0425	6,0429	6,0438	0,0604	0,0604	0,0604
	SBT	1,1768	1,1775	1,1788	0,0516	0,0516	0,0516
10^{-6}	EBT	6,0425	6,0426	6,0426	0,0604	0,0604	0,0604
	SBT	0,7409	0,7410	0,7412	0,0283	0,0283	0,0283

Çizelge 5.8. Elastik zemin üzerindeki mikrotüpçüğe ait doğal frekans (MHz) değerleri
($l = D_d$, $K_w = 100$, $K_p = 10$, $m = 1$)

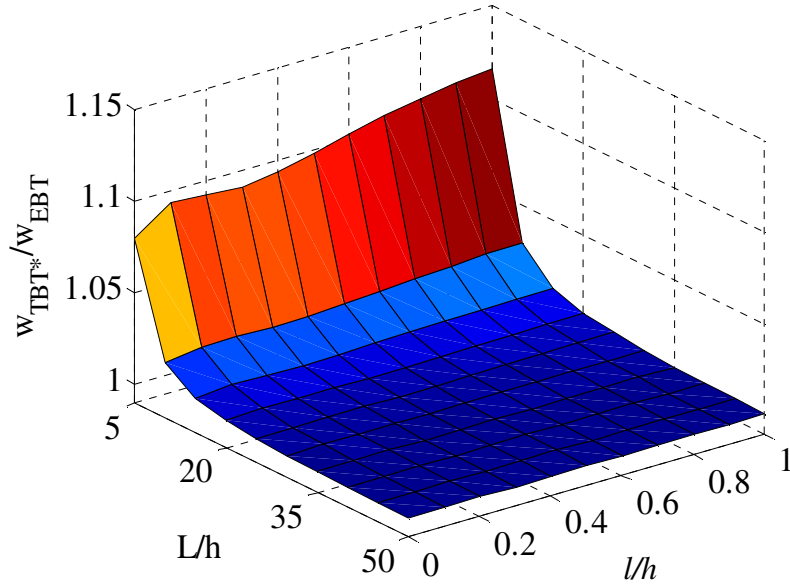
$r = G/E$	Kiriş Teorisi	$L=50D_d$			$L=500D_d$		
		KT	DGÇ	DŞDD	KT	DGÇ	DŞDD
İzotropik	EBT	10,5352	16,6193	26,3609	0,1054	0,1662	0,2636
	SBT	10,5352	16,6123	26,2303	0,1054	0,1662	0,2636
10^{-4}	EBT	10,5352	10,5372	10,5424	0,1054	0,1054	0,1054
	SBT	9,0824	9,0835	9,0849	0,1047	0,1048	0,1048
10^{-5}	EBT	10,5352	10,5354	10,5359	0,1054	0,1054	0,1054
	SBT	8,7094	8,7095	8,7097	0,1006	0,1006	0,1006
10^{-6}	EBT	10,5352	10,5352	10,5352	0,1054	0,1054	0,1054
	SBT	8,6612	8,6612	8,6613	0,0908	0,0908	0,0908

Düzgün yayılı yük altındaki FDM'den yapılmış mikro kirişin DŞDD teorisine dayalı boyutsuz deplasman değerlerinin L/h ve l/h bağlı olarak değişimi Şekil 5.19'da çizdirilmiştir. Açıkça görülmektedir ki l/h değeri arttıkça boyutsuz deplasman değerleri de özellikle w_{TBT}/w_{EBT} 'de olmak üzere giderek artmaktadır. L/h arttıkça ise deplasman oranı bire yaklaşmaktadır. Ayrıca, w_{TBT^*}/w_{EBT} ve w_{SBT}/w_{EBT} 'nin birbirlerine benzer olduğu vurgulanabilir.

a)

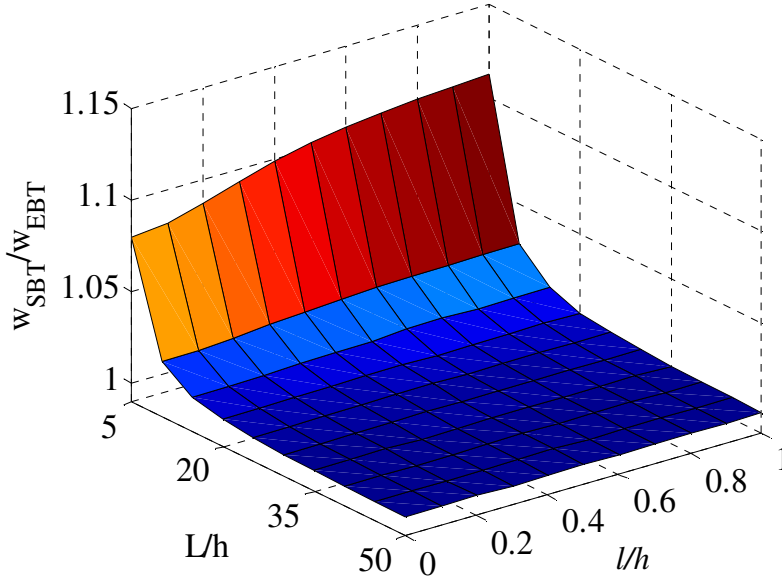


b)



Şekil 5.19. Düzgün yaylı yük altındaki FDM'den yapılmış mikro kirişin boyutsuz deplasman değerleri üzerinde L/h ve l/h etkileri ($k=1$) a) W_{TBT}/W_{EBT} b) W_{TBT^*}/W_{EBT} c) W_{SBT}/W_{EBT} (Devamı arkada)

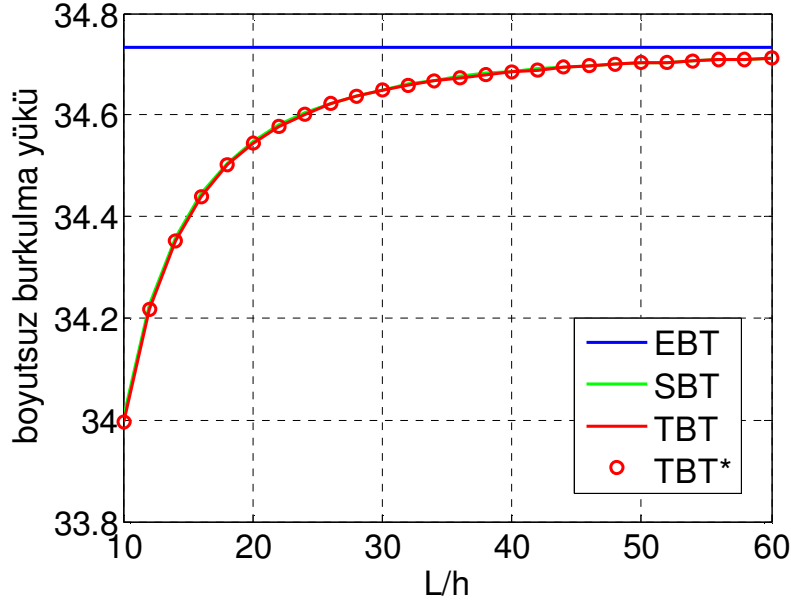
c)



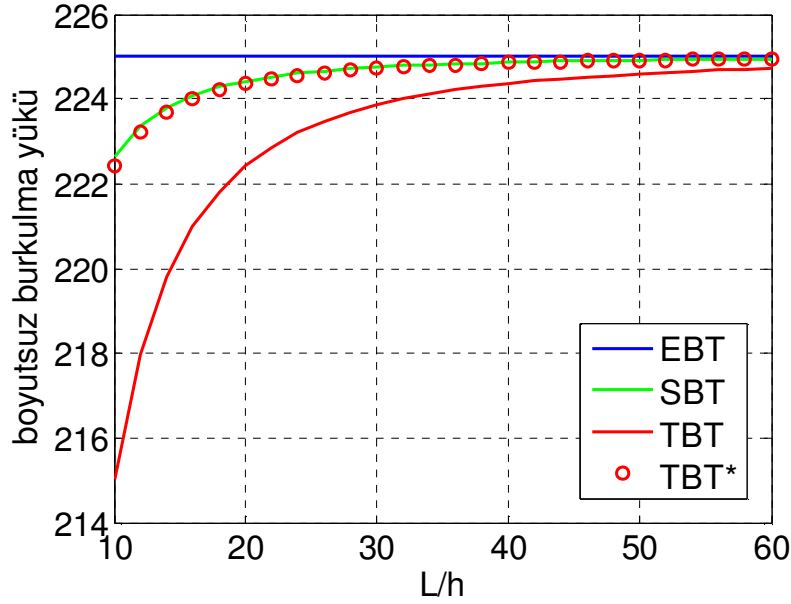
Şekil 5.19. Düzgün yayılı yük altındaki FDM'den yapılmış mikro kirişin boyutsuz deplasman değerleri üzerinde L/h ve l/h etkileri ($k = 1$) a) W_{TBT}/W_{EBT} b) W_{TBT^*}/W_{EBT} c) W_{SBT}/W_{EBT}

L/h değerinin FDM'den imal edilmiş basit mesnetli mikro kirişe ait boyutsuz kritik burkulma yükü değerleri üzerindeki etkileri $k = 0,5$ ve $k = 2$ için sırasıyla Şekil 5.20 ve Şekil 5.21'de verilmiştir. L/h değerindeki artışın kayma deformasyonu etkisinde azalmaya sebep olduğu ve EBT, TBT, TBT* ve SBT'ye dayalı boyutsuz kritik burkulma yükü değerleri arasındaki farkın $L/h > 60$ için neredeyse ortadan kalktığı gözlemlenmiştir. Ayrıca, TBT, TBT* ve SBT'ye göre elde edilen KT'ye dayalı boyutsuz kritik burkulma yükü değerleri neredeyse birbirlerine eşitken, TBT ve SBT'ye göre ulaşılan DGÇ ve DŞDD'ye dayalı sonuçlar arasındaki farkın özellikle düşük L/h değerlerinde dikkate değer olduğu söylenebilir. Bunlara ek olarak $k = 0,5$ 'e ait boyutsuz kritik burkulma yükü değerlerinin $k = 2$ 'ye bağlı değerlerden daha büyük olduğu belirtilebilir.

a)

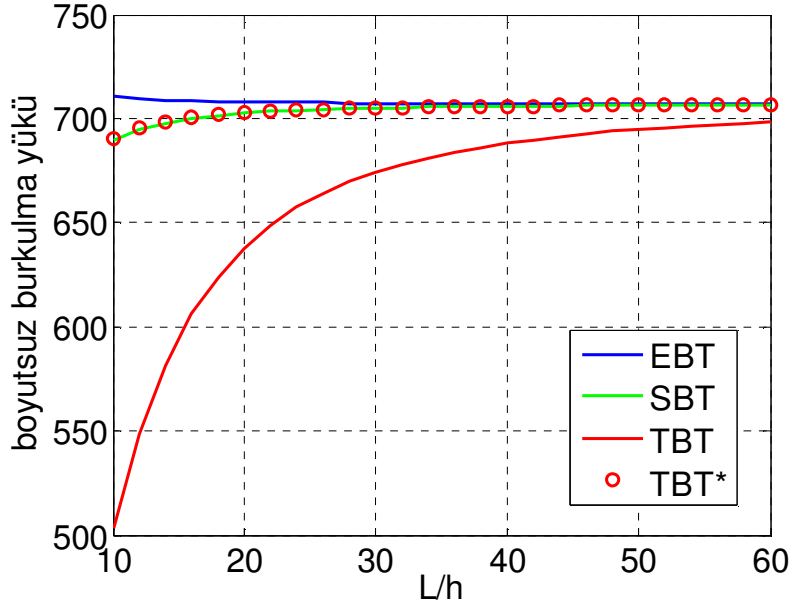


b)

Şekil 5.20. Boyutsuz burkulma yükü değerinin L/h 'a bağlı olarak değişimi ($k = 0,5$)

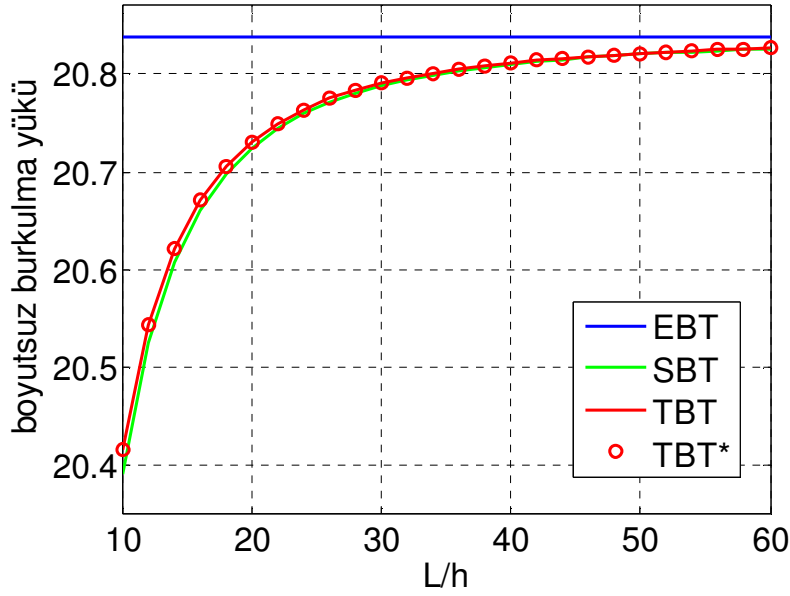
a) KT b) DGÇ c) DŞDD (Devamı arkada)

c)



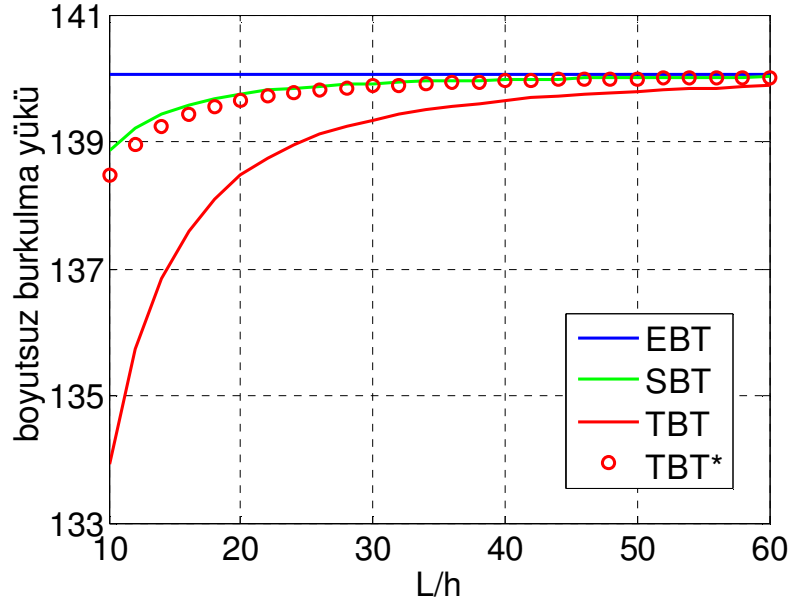
Şekil 5.20. Boyutsuz burkulma yükü değerinin L/h 'a bağlı olarak değişimi ($k = 0,5$)
a) KT b) DGÇ c) DŞDD

a)

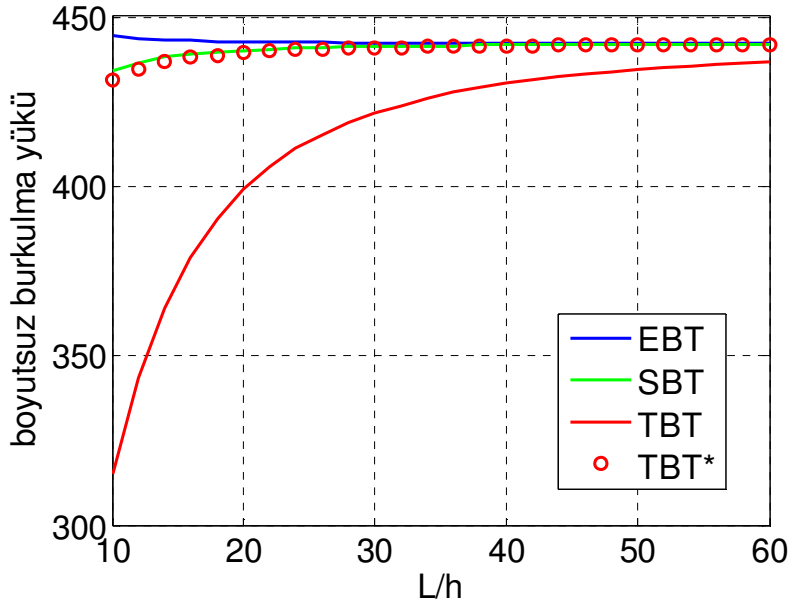


Şekil 5.21. Boyutsuz burkulma yükü değerinin L/h 'a bağlı olarak değişimi ($k = 2$)
a) KT b) DGÇ c) DŞDD (Devamı arkada)

b)



c)

Şekil 5.21. Boyutsuz burkulma yükü değerinin L/h 'a bağlı olarak değişimi ($k = 2$)

a) KT b) DGÇ c) DŞDD

6. SONUÇ

Bu tez kapsamında, yüksek mertebeden elastisite teorilerine dayalı olarak oluşturulan mikro kiriş ve mikro plak modellerine ait eğilme, burkulma ve serbest titreşim hesapları için genel yönetici denklemler ve ilgili sınır koşulları varyasyonel ilke yardımıyla elde edilmiştir. Modellemede kiriş ve plak için üç farklı teori kullanılmıştır: Bernoulli-Euler, Timoshenko ve sinüzoidal kiriş teorileri ile Kirchhoff, Mindlin ve sinüzoidal plak teorileri. Bunların yanı sıra nanoteknolojide geniş uygulama alanına sahip karbon nanotüpler ve ökaryot bir hücre iskeletinin üç temel bileşeninden en sağlam ve karmaşık yapıya sahip olan protein mikrotüpçükler kiriş biçiminde; sadece karbon atomlarından oluşan iki boyutlu hekzagonal yapıdaki grafen plakalar ise plak şeklinde modellenmiştir. Ayrıca bu yapıların elastik bir zemin üzerinde olmaları durumu da Winkler (bir parametrelili) ve Pasternak (iki parametrelili) elastik zemin modelleri ile dikkate alınmıştır. Bunların yanında, fonksiyonel değişimli malzemelerden (FDM) yapılmış kalın mikro kirişlere ait sinüzoidal kayma deformasyonlu kiriş modeli geliştirilmiş olup bu tip homojen olmayan mikro kirişlerin eğilme ve burkulma davranışları da incelenmiştir.

Elde edilen sonuçlara bakıldığında kayma deformasyonlarının kolon/kiriş veya plak biçimindeki yapıların mekanik davranışları üzerindeki etkisinin, uzunluk (ya da genişlik)/yükseklik oranının küçük olması ($L/h < 10$ (veya $a/h < 10$) gibi durumlarda çok daha belirgin olduğu görülmektedir. Bu narinlik oranının artmasına bağlı olarak (ince, narin yapılar) kayma deformasyonlarının etkisi de giderek azalmaktadır. Bu etki, sinüzoidal (trigonometrik) kayma deformasyonlu kiriş ve plak teorileri ile herhangi bir kayma düzeltme faktörüne ihtiyaç duymadan başarılı bir biçimde yorumlanmıştır. Ayrıca, sinüzoidal kiriş ve plak teorileri ile kesit tipine göre çeşitli kayma düzeltme faktörü içeren Timoshenko (birinci dereceden kayma deformasyonlu) kiriş ve Mindlin plak teorilerine ait sonuçlar incelendiğinde klasik durumda sonuçların birbiriyle çok uyumlu olduğu; ancak bu uyumun boyut etkisi dikkate alındığında ortadan kaybolduğu gözlemlenmiştir. Bu bağlamda, yüksek mertebeden elastisite teorilerine dayalı Timoshenko mikro kiriş modeli ve Mindlin mikro plak modeli için boyut etkisine bağlı yeni kayma düzeltme faktörleri de ilk kez önerilmiştir. Elastik zemin ve boyut etkilerinin hesaba katılmasıyla birlikte deplasman değerleri azalırken kritik burkulma yükü ve temel frekans değerleri artmıştır. Göz önüne alınan yapıların karakteristik boyutlarında meydana gelen artış sonucunda boyut etkisi giderek azalmakta olduğu ve elde edilen sonuçların klasik sonuçlara yaklaştığı görülmüştür. Fonksiyonel değişimli malzemelerden imal edilmiş mikro kirişlerde ise malzeme özelliği değişim indeksi değeri arttıkça boyutsuz burkulma yükü değerlerinin azaldığı gözlemlenmiştir.

Bu süreçte bir ve iki boyutlu mikro yapıların eğilme, burkulma ve titreşim analizleri yüksek mertebeden elastisite teorilerine ve çeşitli kiriş ve plak teorilerine dayalı olarak gerçekleştirilmiş olup ulaşılan sonuçlar bilimsel dergilerde yayımlanmıştır (Akgöz ve Civalek 2012b, 2013a, 2013b, 2013c, 2014a, 2014b, 2014c, 2015a, 2015b, 2015c, 2016). Ayrıca, inceleme aşamasındaki makaleler ile literatürdeki mevcut boşluğun büyük ölçüde kapatıldığı düşünülmektedir.

Bundan sonraki yapılacak çalışmalarda, farklı kayma deformasyonlu kiriş/plak teorilerine dayalı mikro yapıların analizi için modeller kurulabilir ve geometrik açıdan

doğrusal olmama durumu ile termal, piezoelektrik ve viskoelastik zemin gibi etkiler de dikkate alınabilir. Ayrıca bu yapıların içinden sıvı geçmesi durumları da yüksek mertebeden elastisite ve çeşitli kiriş/plak teorilerine dayalı olarak kurulacak modellerle incelenebilir.

7. KAYNAKLAR

- AIFANTIS, E.C. 1999. Gradient deformation models at nano, micro, and macro scales. *J. Eng. Mater. Technol.*, 121: 189–202.
- ALBERTS, B., BRAY, D., LEWIS, J., RAFF, M., ROBERTS, K. and WATSON, J.D. 1994. *Molecular Biology of the Cell*. (3rd ed.), Garland Publishing, New York.
- AKGÖZ, B. and CİVALEK, Ö. 2011a. Strain gradient elasticity and modified couple stress models for buckling analysis of axially loaded micro-scaled beams. *Int. J. Eng. Sci.*, 49 (11): 1268–1280.
- AKGÖZ, B. and CİVALEK, Ö. 2011b. Application of strain gradient elasticity theory for buckling analysis of protein microtubules. *Curr. Appl. Phys.*, 11 (5): 1133–1138.
- AKGÖZ, B. and CİVALEK, Ö. 2012a. Analysis of micro-sized beams for various boundary conditions based on the strain gradient elasticity theory. *Arch. Appl. Mech.*, 82 (3): 423–443.
- AKGÖZ, B. and CİVALEK, Ö. 2012b. Free vibration analysis for single-layered graphene sheets in an elastic matrix via modified couple stress theory. *Mater. Des.*, 42: 164–171.
- AKGÖZ, B. and CİVALEK, Ö. 2013a. A size-dependent shear deformation beam model based on the strain gradient elasticity theory. *Int. J. Eng. Sci.*, 70: 1–14.
- AKGÖZ, B. and CİVALEK, Ö. 2013b. Buckling analysis of functionally graded microbeams based on the strain gradient theory. *Acta Mech.*, 224: 2185–2201.
- AKGÖZ, B. and CİVALEK, Ö. 2013c. Modeling and analysis of micro-sized plates resting on elastic medium using the modified couple stress theory. *Meccanica*, 48(4): 863–873.
- AKGÖZ, B. and CİVALEK, Ö. 2014a. A new trigonometric beam model for buckling of strain gradient microbeams. *Int. J. Mech. Sci.*, 81: 88–94.
- AKGÖZ, B. and CİVALEK, Ö. 2014b. Shear deformation beam models for functionally graded microbeams with new shear correction factors. *Compos. Struct.*, 112: 214–225.
- AKGÖZ, B. and CİVALEK, Ö. 2014c. Thermo-mechanical buckling behavior of functionally graded microbeams embedded in elastic medium. *Int. J. Eng. Sci.*, 85: 90–104.
- AKGÖZ, B. and CİVALEK, Ö. 2015a. A microstructure-dependent sinusoidal plate model based on the strain gradient elasticity theory. *Acta Mech.*, 226: 2277–2294.
- AKGÖZ, B. and CİVALEK, Ö. 2015b. Bending analysis of FG microbeams resting on Winkler elastic foundation via strain gradient elasticity. *Compos. Struct.*, 134: 294–301.

- AKGÖZ, B. and CİVALEK, Ö. 2015c. A novel microstructure-dependent shear deformable beam model. *Int. J. Mech. Sci.*, 99: 10–20.
- AKGÖZ, B. and CİVALEK, Ö. 2016. Bending analysis of embedded carbon nanotubes resting on an elastic foundation using strain gradient theory. *Acta Astronaut.*, 119: 1–12.
- AMOS, L.A. and AMOS, W.B. 1991. *Molecules of the Cytoskeleton*. MacMillan, London.
- ANSARI, R., GHOLAMI, R. and SAHMANI, S. 2011. Free vibration analysis of size-dependent functionally graded microbeams based on the strain gradient Timoshenko beam theory. *Compos. Struct.*, 94 (1): 221–228.
- ASGHARI, M., AHMADIAN, M.T., KAHROBAIYAN, M.H. and RAHAEIFARD, M. 2010. On the size-dependent behavior of functionally graded micro-beams. *Mater. Des.*, 31 (5): 2324–2329.
- ASGHARI, M., RAHAEIFARD, M., KAHROBAIYAN, M.H. and AHMADIAN, M.T. 2011. The modified couple stress functionally graded Timoshenko beam formulation. *Mater. Des.*, 32 (3): 1435–1443.
- BATRA, R.C., PORFIRI, M. and SPINELLO, D. 2008. Vibrations of narrow microbeams predeformed by an electric field. *J. Sound Vib.*, 309: 600–612.
- BOAL, D. 2002. *Mechanics of the Cell*. Cambridge University Press, Cambridge.
- CHRETIEN, D. and WADE, R.H. 1991. New data on the microtubule surface lattice. *Biol. Cell*, 71: 161–174.
- ERINGEN, A.C. 1967. Theory of micropolar plates. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 18: 12–30.
- ERINGEN, A.C. 1972. Nonlocal polar elastic continua. *Int. J. Eng. Sci.* 10: 1–16.
- ERINGEN, A. C. 1983. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *J. Appl. Phys.*, 54 (9): 4703–4710.
- FLECK, N.A. and HUTCHINSON, J.W. 1993. A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 41: 1825–1857.
- FLECK, N.A. and HUTCHINSON, J.W. 2001. A reformulation of strain gradient plasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 49: 2245–2271.
- FLECK, N.A., MULLER, G.M., ASHBY, M.F. and HUTCHINSON, J.W. 1994. Strain gradient plasticity: theory and experiment. *Acta Metall. Mater.*, 42 (2): 475–487.
- FU, Y., DU, H. and ZHANG, S. 2003. Functionally graded TiN/TiNi shape memory alloy films. *Mater. Lett.*, 57: 2995–2999.
- FU, Y. and ZHANG, J. 2010. Modeling and analysis of microtubules based on a modified couple stress theory. *Physica E*, 42 (5): 1741–1745.

- HEIRECHE, H., TOUNSI, A., BENHASSAINI, H., BENZAI, A., BENDAHMANE, M., MISSOURI, M. and MOKADEMD, S. 2010. Nonlocal elasticity effect on vibration characteristics of protein microtubules. *Physica E*, 42 (9): 2375–2379.
- HOWARD, J. 2001. *Mechanics of Motor Proteins and the Cytoskeleton*. Sinauer Associates, Inc, Sunderland.
- HU, F., QIAN, Y., LI, Z., NIU, J., NIE, K., XIONG, X., ZHANG, W. and PENG, Z. 2013. Design of a tunable terahertz narrowband metamaterial absorber based on an electrostatically actuated MEMS cantilever and split ring resonator array. *J. Optics*, 15: 055101.
- IJJIMA, S. 1991. Helical Microtubules of Graphitic Carbon. *Nature*, 354: 56-58.
- IJJIMA, S., BRABEC, C., MAITI, A. and BERNHOLC, J. 1996. Structural flexibility of carbon nanotubes. *J. Chem. Phys.*, 104: 2089–2092.
- JOMEHZADEH, E., NOORI, H.R. and SAIDI, A.R. 2011. The size-dependent vibration analysis of micro-plates based on a modified couple stress theory. *Physica E*, 43 (4): 877–883.
- KAHROBAIYAN, M.H., RAHAEIFARD, M., TAJALLI, S.A. and AHMADIAN, M.T. 2012. A strain gradient functionally graded Euler-Bernoulli beam formulation. *Int. J. Eng. Sci.*, 52: 65–76.
- KAHROBAIYAN, M.H., ASGHARI, M. and AHMADIAN, M.T. 2013. Strain gradient beam element. *Finite Elem. Anal. Des.*, 68: 63–75.
- KASAS, S., KIS, A., RIEDERER, B.M., FORRO, L., DIETLER, G. and CATSICAS, S. 2004. Mechanical properties of microtubules explored using the finite elements method. *Chem. Phys. Phys. Chem.*, 5: 252–257.
- KIKUMOTO, M., KURACHI, M., TOSA, V. and TASHIRO, H. 2006. Flexural rigidity of individual microtubules measured by a buckling force with optical traps. *Biophys. J.*, 90: 1687–1696.
- KOITER, W.T. 1964. Couple stresses in the theory of elasticity: I and II. *Proc. K. Ned. Akad. Wet. B-Phys. Sci.*, 67: 17–44.
- KONG, S., ZHOU, S., NIE, Z. and WANG, K. 2008. The size-dependent natural frequency of Bernoulli-Euler micro-beams. *Int. J. Eng. Sci.*, 46 (5): 427–437.
- KONG, S., ZHOU, S., NIE, Z. and WANG, K. 2009. Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory. *Int. J. Eng. Sci.*, 47 (4): 487–498.
- KROTO, H.W., HEATH, J.R., O'BRIEN, S.C., CURL, R.F. and SMALLEY, R.E. 1985. C60: Buckminsterfullerene. *Nature*, 318: 162–163.
- LAI, T. and TSOU, C. 2011. Design, fabrication, and evaluation of vacuum testing of a novel electromagnetic microactuator. *J. Micro/Nanolithography, MEMS, and MOEMS*, 10(4): 043001.

- LAM, D.C.C., YANG, F., CHONG, A.C.M., WANG, J. and TONG, P. 2003. Experiments and theory in strain gradient elasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 51 (8): 1477–1508.
- LAZOPOULOS, K.A. 2009. On bending of strain gradient elastic micro-plates. *Mech. Res. Commun.*, 36 (7): 777–783.
- LAZOPOULOS, K.A. and LAZOPOULOS, A.K. 2010. Bending and buckling of thin strain gradient elastic beams. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 29 (5): 837–843.
- LI, C., RU, C.Q. and MIOUCHOWSKI, A. 2006. Length-dependence of flexural rigidity as a result of anisotropic elastic properties of microtubules. *Biochem. Biophys. Res. Commun.*, 349: 1145–1150.
- LUN, F.Y., ZHANG, P., GAO, F.B. and JIA, H.G. 2006. Design and fabrication of micro-optomechanical vibration sensor. *Microfabr. Technol.*, 120: 61–64.
- MA, H.M., GAO, X.-L. and REDDY, J.N. 2008. A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory. *J. Mech. Phys. Solids*, 56 (12): 3379–3391.
- MA, H.M., GAO, X.-L. and REDDY, J.N. 2011. A non-classical Mindlin plate model based on a modified couple stress theory. *Acta Mech.*, 220 (1–4): 217–235.
- MAHDAVI, M.H., FARSHIDIANFAR, A., TAHANI, M., MAHDAVI, S. and DALIR, H. 2008. A more comprehensive modeling of atomic force microscope cantilever. *Ultramicroscopy*, 109: 54–60.
- McFARLAND, A.W. and COLTON, J.S. 2005. Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors. *J. Micromech. Microeng.*, 15 (5): 1060–1067.
- MINDLIN, R.D. 1965. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. *Int. J. Solids Struct.*, 1 (4): 417–438.
- MINDLIN, R.D. and TIERSTEN, H.F. 1962. Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 11: 415–448.
- MURMU, T. and PRADHAN, S.C. 2009. Buckling analysis of a single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium based on nonlocal elasticity and Timoshenko beam theory and using DQM. *Physica E*, 41: 1232–1239.
- NANOTECHMAG. Company receives funding for atomic force microscope probes. <http://www.nanotechmag.com/company-receives-funding-atomic-force-microscope-probes/>. [Son erişim tarihi: 04.02.2015]
- NATEGHI, A., SALAMAT-TALAB, M., REZAPOUR, J. and DANESHIAN, B. 2012. Size dependent buckling analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory. *Appl. Math. Modell.*, 36: 4971–4987.

- PAPARGYRI-BESKOU, S., TSEROURA, K.G., POLYZOS, D. and BESKOS, D.E. 2003a. Bending and stability analysis of gradient elastic beams. *Int. J. Solids Struct.*, 40 (2): 385–400.
- PAPARGYRI-BESKOU, S., POLYZOS, D. and BESKOS, D.E. 2003b. Dynamic analysis of gradient elastic flexural beams. *Struct. Eng. Mech.*, 15 (6): 705–716.
- PAPARGYRI-BESKOU, S. and BESKOS, D.E. 2008. Static, stability and dynamic analysis of gradient elastic flexural Kirchhoff plates. *Arch. Appl. Mech.*, 78 (8): 625–635.
- PARK, S.K. and GAO, X.-L. 2006. Bernoulli-Euler beam model based on a modified couple stress theory. *J. Micromech. Microeng.*, 16 (11): 2355–2359.
- PEDDIESON, J., BUCHANAN, G.R. and McNITT, R.P. 2003. Application of nonlocal continuum models to nanotechnology. *Int. J. Eng. Sci.*, 41 (3-5): 305–312.
- PRADHAN, S.C. and KUMAR, A. 2010. Vibration analysis of orthotropic graphene sheets embedded in Pasternak elastic medium using nonlocal elasticity theory and differential quadrature method. *Comput. Mater. Sci.*, 50 (1): 239–245.
- PRADHAN, S.C. and MURMU, T. 2009. Small scale effect on the buckling of single-layered graphene sheets under biaxial compression via nonlocal continuum mechanics. *Comput. Mater. Sci.*, 47: 268–274.
- PRADHAN, S.C. and PHADIKAR, J.K. 2009. Small scale effect on vibration of embedded multilayered graphene sheets based on nonlocal continuum models. *Phys. Lett. A*, 373 (11): 1062–1069.
- RAHAEIFARD, M., KAHROBAIYAN, M.H., AHMADIAN, M.T. and FIROOZBAKHSH, K. 2012. Size-dependent pull-in phenomena in nonlinear microbridges. *Int. J. Mech. Sci.*, 54: 306–310.
- REDDY, J.N. 2002. *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics* (2nd ed.). John Wiley & Sons, New York.
- REDDY, J.N. 2007. Nonlocal theories of bending, buckling and vibration of beams. *Int. J. Eng. Sci.*, 45 (2-8): 288–307.
- REDDY, J.N. 2011. Microstructure-dependent couples stress theories of functionally graded beams. *J. Mech. Phys. Solids*, 59: 2382–2399.
- REDDY, J.N. and PANG, S.D. 2008. Nonlocal continuum theories of beams for the analysis of carbon nanotubes. *J. Appl. Phys.*, 103 (2): 023511.
- RHIZOMA WORLDWIDE. The Next Generation of MLM Enter Nano World. <http://rhizomajakarta.blogspot.com.tr/p/the-next-generation-of-mlm-enter-nano.html>. [Son erişim tarihi: 04.02.2015].

- SALAMAT-TALAB, M., NATEGHI, A. and TORABI, J. 2012. Static and dynamic analysis of third-order shear deformation FG micro beam based on modified couple stress theory. *Int. J. Mech. Sci.*, 57: 63–73.
- SAMAEI, A.T., ABBASION, S. and MIRSAYAR, M.M. 2011. Buckling analysis of a single-layer graphene sheet embedded in an elastic medium based on nonlocal Mindlin plate theory. *Mech. Res. Commun.*, 38 (7): 481–485.
- SANDIA NATIONAL LABORATORIES. Carbon nanotubes may help bridge the technical gap.
https://share.sandia.gov/news/resources/news_releases/carbon_nanotubes/#.VNI9MmiMmis. [Son erişim tarihi: 04.02.2015]
- SHEN, H.-S. 2011. Nonlinear vibration of microtubules in living cells. *Curr. Appl. Phys.*, 11 (3): 812–821.
- STOLKEN J.S. and EVANS A.G. 1998. A microbend test method for measuring the plasticity length scale. *Acta Mater.*, 46: 5109–5115.
- ŞİMŞEK, M. and REDDY, J.N. 2013a. Bending and vibration of functionally graded microbeams using a new higher order beam theory and the modified couple stress theory. *Int. J. Eng. Sci.*, 64: 37–53.
- ŞİMŞEK, M. and REDDY, J.N. 2013b. A unified higher order beam theory for buckling of a functionally graded microbeam embedded in elastic medium using modified couple stress theory. *Compos. Struct.*, 101: 47–58.
- ŞİMŞEK, M. and YURTCU, H.H. 2013. Analytical solutions for bending and buckling of functionally graded nanobeams based on the nonlocal Timoshenko beam theory. *Compos. Struct.*, 97: 378–386.
- TELAVIV UNIVERSITY. Polymer Optics.
<https://www.eng.tau.ac.il/~kobys/Polymers/polymers.html>. [Son erişim tarihi: 04.02.2015].
- THAI, H.-T. and VO, T.P. 2012. A nonlocal sinusoidal shear deformation beam theory with application to bending, buckling, and vibration of nanobeams. *Int. J. Eng. Sci.*, 54: 58–66.
- TOUPIN, R.A. 1964. Theory of elasticity with couple stresses. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 17: 85–112.
- TOURATIER, M. 1991. An efficient standard plate theory. *Int. J. Eng. Sci.*, 29 (8): 901–916.
- TSIATAS, G.C. 2009. A new Kirchhoff plate model based on a modified couple stress theory. *Int. J. Solids Struct.*, 46 (13): 2757–2764.

- TURNER, J.A. and WIEHN, J.S. 2001. Sensitivity of flexural and torsional vibration modes of atomic force microscope cantilevers to surface stiffness variations. *Nanotechnology*, 12: 322–330.
- VARDOULAKIS, I. and SULEM, J. 1995. Bifurcation analysis in geomechanics. Blackie/Chapman and Hall, London.
- VINCKIER, A., DUMORTIER, C., ENGELBORGHES, Y. and HELLEMANS, L. 1996. Dynamical and mechanical study of immobilized microtubules with atomic force microscopy. *J. Vacuum Sci. Technol. B: Microelectronics and Nanometer Struct.*, 14: 1427–1431.
- WANG, B., ZHAO, J. and ZHOU, S. 2010. A micro scale Timoshenko beam model based on strain gradient elasticity theory. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 29 (4): 591–599.
- WANG, B., ZHOU, S., ZHAO, J. and CHEN, X. 2011. A size-dependent Kirchhoff micro-plate model based on strain gradient elasticity theory. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 30 (4): 517–524.
- WANG, C.Y., RU, C.Q. and MIODUCHOWSKI, A. 2006. Orthotropic elastic shell model for buckling of microtubules. *Phys. Rev. E*, 74: 052901-1-4.
- YAKOBSON, B.I., CAMPBELL, M.P., BRABEC, C.J. and BERNHOLC, J. 1997. High strain rate fracture and C-chain unraveling in carbon nanotubes. *Comput. Mater. Sci.*, 8: 341–348.
- YANG, F., CHONG, A.C.M., LAM, D.C.C. and TONG, P. 2002. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *Int. J. Solids Struct.*, 39 (10): 2731–2743.
- ZOOK, J.D., BURNS, D.W., GUCKEL, H., SNIEGOWSKI, J.J., ENGELSTAD, R.L. and FENG, Z. 1992. Characteristics of polysilicon resonant microbeams. *Sens. Actuators A: Phys.*, 35, 51–59.

ÖZGEÇMİŞ



Bekir AKGÖZ, 1987 yılında Ankara'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Ankara'da tamamladı. 2005 yılında girdiği Akdeniz Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'nden 2009 yılında İnşaat Mühendisi olarak mezun oldu. Aralık 2010'da, Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı. Aralık 2009'dan itibaren Akdeniz Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü Mekanik Anabilim Dalı'nda Araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır.