T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

KONVEKSLİK KAVRAMININ SOYUTLAŞTIRILMASI ÜZERİNE

Yücel DEMİRSOY

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEMMUZ 2019

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

KONVEKSLİK KAVRAMININ SOYUTLAŞTIRILMASI ÜZERİNE

Yücel DEMİRSOY

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEMMUZ 2019

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONVEKSLİK KAVRAMININ SOYUTLAŞTIRILMASI ÜZERİNE

Yücel DEMİRSOY

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 05/07/2019 tarihinde jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Gabil ADİLOV (Danışman)

Dr. Öğr. Üyesi Serap KEMALİ

Dr. Öğr. Üyesi Şerife YILMAZ

ÖZET

KONVEKSLİK KAVRAMININ SOYUTLAŞTIRILMASI ÜZERİNE

Yücel DEMİRSOY

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Gabil ADİLOV

Temmuz 2019 ; 41 sayfa

Bu tezdeki amacımız konvekslik kavramının soyutlaştırılması üzerine bir tür literatür taraması yapmak, bu zamana kadar ortaya konmuş konvekslik sınıflarını incelemek ve aralarındaki ilişkileri tespit ederek ortaya konabilecek yeni konvekslik sınıfları hakkında fikir üretmektir. Bu tezde B-konvekslik kavramına dair detaylı inceleme ve tartışmalara yer verilmiştir.

Bu bağlamda yapmış olduğumuz çalışmada, öncelikle konvekslik ile ilgili temel tanım ve teoremler üzerinde durulmuş, konveks küme ve konveks fonksiyonlar üzerine literatür taranmıştır. Konveksliğin soyutlaştırılması yollarına değinilmiş, bu alanda gerekli temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Farklı konvekslik sınıfları için bir literatür taraması yapılmış ve her bir konvekslik sınıfının tanımı verilerek bazı konveks fonksiyonların hiyerarşisi ifade edilmiştir.

Soyut konvekslik kavramları olan B-konvekslik ayrıca ele alınıp incelenmiş, B- konveks kümeler, fonksiyonlar ve özelliklerine yer verilmiştir. Ayrıca, $\mathbb{R}^2_+$de B-konveks olan ve olmayan fonksiyon örnekleri bulunmuş ve bu örnekler üzerinden klasik konveks fonksiyonlarla *B*-konveks fonksiyonlar sınıfının ilişkisi incelenmiştir.

Bunun yanı sıra, tek değişkenli B-konveks fonksiyonların Elemanter fonksiyonlar ailesi bulunmuş ve bu fonksiyon ailesi üzerinden tek değişkenli B-konveks fonksiyonların bazı özellikleri incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: B-konveks Fonksiyonlar, B-konveksliklik Kavramı, Konvekslik Kavramı, Soyut Konveks Fonksiyonlar, Soyut Konvekslik Kavramı,

JÜRİ: Prof. Dr. Gabil ADİLOV

Dr. Öğr. Üyesi Serap KEMALİ

Dr. Öğr. Üyesi Şerife YILMAZ

ABSTRACT

THE ABSTRACTION OF THE CONCEPT OF CONVEXITY

Yücel DEMİRSOY

MSc. Thesis, Department of Mathematics

Advisior: Prof. Dr. Gabil ADİLOV

July 2019; 41 pages

Our aim in this theisis is to make a kind of literature search on the abstraction of convex term, to examine convex classes, revealed untill this time and to produce ideas about new convex classes by identifying the relationship between them. In this thesis, a detailed examination and discussion of the concept of B-convexity was given.

In this study we have done, firstly we focused on the topological definitions and teorems and we make literatüre search about convex sets and basics of convex functions, together. With the identificion methods for abstraction of convexity were mentioned and necessary basic definitions and theorems in this field were given. A literature rewiev was conducted for different convexity classes and the hierarchy of some convex functions was expressed by given definition of each convexcity class.

B-convexcity which are abstract convexity concepts were discussed and examined, B-convex sets, functions and properties are given. In addition, examples were found for B-convex and non B-convex function examples in $\mathbb{R}^2_+$were found and the relationship between classical convex functions and B-convex function class was examined throuhg these examples.

Besides that Elementary functions family of univariate B-convex function were found and some properties of univariate B-convex function were examined through this family functions.

KEY WORDS:, Abstract convexty, Abstract convex function, B convexty, B-convex function, Convexty.

JURY: Prof. Dr. Gabil ADİLOV

Asst. Prof. Dr Serap KEMALİ

Asst. Prof. Dr. Şerife YILMAZ

ÖNSÖZ

2014 yılında başlamış olduğum yüksek lisans öğrenciliği hayatımı bu tez ile birlikte sonlandırmanın mutluluğunu yaşamaktayım. Tez yazım sürecinde, akademik hayat içinde ve dışında hayatın getirdiği bazı sürprizler neticesinde yaşanan problemler karşısında kaybettiğim motivasyonun yeniden kazanılmasında danışman hocamın emeği çoktur. Bu ve bunun gibi birçok nedenden ötürü bu çalışmanın tamamlanması adına yapmış olduğu tüm destekleri için danışman hocam Prof. Dr Gabil ADİLOV'a teşekkürlerimi sunuyorum.

Öğrenmek hayat boyu devam eden bir süreç ve insan olarak geride bırakabileceğimiz tek unsur belki de öğrendiklerimiz. Bu çalışma ile öğrendiklerimi yanıma alıp yeni öğrenmeler peşinde koşma heyecanı içinde hayatımı devam ettirmeyi ümid ediyorum. Bu çalışmanın geride bıraktıklarımıza umut ışığı olmasını temenni ediyorum.

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Konvekslik Kavramının Soyutlaştırılması Üzerine" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

05/07/2019

Yücel DEMİRSOY

SİMGELER

Simgeler

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_+$	: Negatif olmayan reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n boyutlu öklid uzayı
$\mathbb{R}^n_+$	: $\{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_i \geq 0$, i=1,2,…n$\}$
$\mathbb{R}^n_{++}$	: $\{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_i > 0$, i=1,2,…n$\}$
$\langle\, . \,\rangle$	: İç çarpım
$\|\, . \,\|$	: Öklid normu
d(x,y)	: Öklid metriği
B(a,r)	: a noktasının r yarıçaplı açık komşuluğu
$\overline{B(a,r)}$	: a noktasının r yarıçaplı kapalı komşuluğu
$B^*(a,r)$	: a noktasının r yarıçaplı delinmiş komşuluğu
İnt A	: A kümesinin iç noktalar kümesi
YığA	: A kümesinin yığılma noktaları kümesi
$\overline{A}$	: A kümesinin kapanışı
bd A	: A kümesinin sınırı
inf D	: D kümesinin infimumu
sup D	: D kümesinin supremumu
L	: Lineer alt uzay
H(x)	: Hessian matrisi
L(I)	: Logaritmik konveks fonksiyon
C(I)	: Konveks fonksiyon
QC(I)	: Quasi konveks fonksiyon
P(I)	: P sınıfı fonksiyon

Q(I)	: Godunova Levin konveks fonksiyon
WQC(I)	: Wright Quasi konveks fonksiyon
JQC(I)	: Jensen Quasi konveks fonksiyon
K(b)	: Konveks fonksiyonlar sınıfı
$K_m(b)$	: m-konveks fonksiyonlar sınıfı
$K_n(b)$	: n-konveks fonksiyonlar sınıfı
$S^*(b)$	: Starshaped konveks fonksiyon
$\vee$	: Koordinatlara göre maksimum
$\circ$	: Fonksiyonların bileşkesi
$f\|_A$	: f fonksiyonunun A kümesine kısıtlanışı
epif	: f fonksiyonunun grafiküstü kümesi
hypf	: f fonksiyonunun hypografı
dom f	: f fonksiyonunun tanım kümesi
supp (f,H)	: $\{h \in H \mid h \leq f\}$
$k = \overline{1,n}$	: k = 1,2,…,n
Conv(A)	: A kümesinin konveks örtüsü
Co(C)	: C kümesinin konveks kabuğu
$Co_H f$	: f fonksiyonun H-konveks kabuğu
$Co^r(A)$	: A kümesinin r-konveks kabuğu
$Co^\infty(A)$	: A kümesinin B-konveks kombinasyonu
B[A]	: A kümesinin B-konveks kabuğu
lim sup	: Üst limit
lim inf	: Alt limit
Ls	: Kuratowski-Painleve anlamında üst limit
Li	: Kuratowski-Painleve anlamında alt limit
IPH	: Artan pozitif homojen

InR	: Artan radyant
ICR	: Artan ko-radyant
ICAR	: Artan ve ışınlar üzere konveks
■	: İspatın bittiğini gösterir.

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Matematiğin önemli alanlarından biri olan konveks analiz, özellikle son yıllarda yapılan çalışmalar neticesinde, hız kazanmış ve yeniliklere açık hale gelmiştir. Günlük hayatta konvekslik kavramının uygulama alanları olduğu kadar bilimsel hayatta da kayda değer şekilde çalışma alanı bulmakta ve önemini gittikçe arttıran bir konu haline gelmektedir. Konveks analizin uygulama alanları olarak Optimizasyon Teorisi, Eşitsizlikler Teorisi, Matematiksel Ekonomi, Yöneylem Araştırması örnek verilebilir. Bu alanlarda konveks analiz bir çalışma alanı olarak ilgi toplamaktadır.

Bu tezde ise konvekslik kavramı üzerinde durularak, konveksliğin bir dalı olan soyut konvekslik kavramına yer verilmiştir. Soyut konveks analiz son zamanlarda oldukça ilgi toplayan bir konu haline gelmiştir. Uygulama ve teorik çalışmaların ürettiği sonuçlar neticesinde konvekslik kavramının soyutlaştırılması zorunlu hale gelmiştir. Topolojik soyut konvekslik, fonksiyonel soyut konvekslik şeklinde yöntemlerle genelleştirme yapılabilmektedir.

Bu tezde öncelikle temel tanım ve teoremlere yer verilmiş, konvekslik kavramının temelinde farklı kombinasyonlar oluşturulmuş ve bunun üzerine tanımlanan konveks kombinasyon ve konveks küme tanımlanmış, grafiküstü küme (*epi(f)*) yardımıyla konveks fonksiyonlar tanımlanmıştır.

Örneğin;

$$x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n \ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R} \text{ ve } \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \,, \lambda_i \geqslant 0 \text{ olmak üzere}$$

$\lambda_1 x + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m$ noktasına $x_1, x_2, \ldots x_m$ noktalarının konveks kombinasyonu denir.

$$C \subset \mathbb{R}^n \text{ olmak üzere, eğer } \forall \ x_1, x_2, \ldots, x_m \in C \text{ ve} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \text{ şartını sağlayan}$$

$$\forall \ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R} \text{ için } \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \in C \ \text{ sağlanıyorsa } C \text{ kümesine konveks küme denir.}$$

Başka bir deyişle *C* kümesinden olan noktaların konveks kombinasyonları da *C* kümesi içerisinde kalıyorsa *C* kümesine bir konveks küme denir.

Grafiküstü kümesi konveks küme olan fonksiyonlara konveks fonksiyon denir. Bir başka deyişle bir $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu için *epi(f)* kümesi $\mathbb{R}^{n+1}$ uzayında konveks ise *f* fonksiyonuna $\mathbb{R}^n$ uzayında konvekstir denir.

Bu tanımlamalar yapıldıktan sonra soyut konveksliğe ait temel özelliklere değinilerek soyut konvekslik biçimleri için literatür taraması yapılmıştır. Görüleceği üzere çok sayıda farklı konveks fonksiyon sınıfı üretilmiş olup yeni sınıfların üretilmesine de açık durumdadır. Bu çalışmada üretilen konveks fonksiyon sınıfları ve çalışmaları üzerinde durulmuştur.

Örneğin;

I, reel sayılar içerisinde bir aralık olsun. Eğer bir $f : I \to \mathbb{R}_{++}$ fonksiyonu için *log f* konveks oluyorsa, ya da $\forall\ x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(tx+(1-t)y\right) \le \left[f(x)\right]^t \left[f(y)\right]^{1-t}$$

eşitsizliği doğru ise *f* fonksiyonuna *log*-konveks fonksiyon denir (Pečarić et al. 1992).

$I \subset \mathbb{R}$ *ve* $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall\ x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \max\left\{f(x), f(y)\right\}$$

eşitsizliği doğru ise, f fonksiyonuna Jensen Quasi konveks fonksiyon denir (Dragomir, Pearce 2000).

Eğer, $I \subset \mathbb{R}$ ve $p : I \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu $\forall\ x, y \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$p\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right) \le p(x)+p(y)$$

eşitsizliği doğru ise, bu fonksiyona P-tipi bir fonksiyon denir (Singer 1997).

$U \subset \mathbb{R}^n$ ve $f : U \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ olsun. Eğer, *epif* kümesi *B*-konveks ise f fonksiyonuna B-konveks fonksiyon denir (Adilov 2006).

Bu tip bazı konveks fonksiyon sınıfları verildikten sonra fonksiyon sınıflarından bazıları için hiyerarşik ilişkiye değinilmiştir. Söz konusu hiyerarşik ilişki için tüm konveks fonksiyonların içine dahil edilebileceği bir genelleme yapılması mümkün olmadığından kendi içindeki hiyerarşi bazı fonksiyon sınıfları için sağlanmıştır.

B-konvekslik de soyut konvekslik kavramlarından biridir. B-konveks ve kümeler ile fonksiyonlar farklı araştırmacılar tarafından incelenmiş, ekonomi ve eşitsizlikler teorisi alanlarındaki uygulamaları üzerine çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Tezde bu soyut konvekslik sınıfının incelenmesine ayrıca yer verilmiştir. Bunun yanı sıra, $\mathbb{R}^2_+$ de B-konveks olduğu ispatlanan fonksiyonlar örnekleri bulunmuştur. Bu fonksiyonlar daha geniş bir aile oluşturarak, Yeşilce'de verilen örnekleri de içermektedir. Bu örnekler üzerinden B-konveks fonksiyonlar sınıfı ile klasik konveks fonksiyonlar arasındaki ilişki araştırılmıştır.

En sonunda, tek değişkenli B-konveks fonksiyonlar için Elementer fonksiyonlar bulunmuş ve bu fonksiyonlar üzerinden tek değişkenli B-konveks fonksiyonların bazı özellikleri incelenmiştir.

2. KAYNAK TARAMASI

Konvekslik kavramı, M.Ö. 250 yılında Achimedes'in π'nin hesaplamasına kadar uzanabilecek bilinen bir kavramdır. Ancak matematik dünyasında yer alması 19.yy. sonunu bulmuştur. İlk kez Hermite tarafından 1881 yılında elde edilen bir sonucun, Mathesis adlı dergide 1883 yılında yayınlanması ile birlikte ortaya çıkmıştır.

Birçok matematikçi konveks fonksiyon ve eşitsizlikler teorisi ile ilgili birçok çalışmaya imza atmışlardır.

- Inequalities (Hardy, 1952)
- Inequalities (Beckenbach ve Bellman, 1961)
- Analytic Inequalities (Mitrinović, 1970)
- Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivative (Mitrinović, 1991)
- Clasical and New Inequalities in Analysis (Mitrinović, 1993)
- Mathematical Inequalities (Pachpatte, 2005)
- Convex Functions and Their Applications (Persson, 2006)

Bu kitapların yanı sıra birçok doktora ve yüksek lisans tezinde de bu çalışmalara rastlamak mümkündür.

Öncesinde de söylendiği gibi konveks fonksiyonların tarihi çok eskiye dayanmak ile birlikte başlangıcı 19. yüzyılın sonları olarak gösterilebilir. 1893'te Hadamard'ın çalışmasında açıkça belirtilmese de bu türden fonksiyonların temellerinden bahsedilmektedir. Bu tarihten sonra literatürde konveks fonksiyonları ima eden sonuçlara rastlanılmasına rağmen konveks fonksiyonların ilk kez sistemli olarak 1905 ve 1906 yıllarında J.L.W.V. Jensen tarafından çalışıldığı ve Jensen'ın bu öncü çalışmalarından itibaren konveks fonksiyonlar teorisinin hızlı bir gelişme gösterdiği kabul edilmektedir. Beckenbach and Bellman (1961) ve Mitrinović (1970) gibi pek çok araştırmacı, konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler konusunu kitaplarında ele almışlardır. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikleri içeren ilk kaynak 1987 yılında Pečarić tarafından yazılan 'Convex Funtions: Inequalities' adlı kitaptır. Ayrıca Roberts ve Varberg (1973), Pečarić et al. (1992), Niculescu ve Persson (2006) gibi pek çok kişi konveks fonksiyonlar üzerinde eşitsizliklerle ilgi çok sayıda çalışma yapmışlardır. Bu çalışmaların bir kısmını integral eşitsizlikleri oluşturmaktadır.

Bu çalışmada farklı konveks fonksiyon incelenmiştir ve özellikle B-konveks fonksiyon üzerinde durulmuştur. B-konvekslik kavramı ise ilk kez 2004 yılında W. Briec ve C. D. Horvath tarafından yayınlanan makalesinde ortaya konmuştur.

2008 yılında ise W. Briec ve C. D. Horvath tarafından, matematiksel analizde önemli yere sahip sabit nokta teorisi ile ilgili çalışmalar B-konvekslik kavramı için yapılmıştır. Bu çalışmalar ışığında kompakt B-konveks kümelerin sürekli dönüşümler için sabit nokta özelliğine sahip olduğunu ispatlamışlardır. B-konvekslik için Fan-Browders sabit Nokta Teoremi ve Kakutani Sabit Nokta Teoremi'ni ifade etmişlerdir. Soyut ekonomideki kararlılıkların varlığında önemli rollere sahip olan Ky-Fan Eşitsizliği ve Nash Kararlılıklarının Varlığını ispat etmişlerdir. Berge Maksimum Prensibi'nden yararlanarak B-konvekslik için Shafer-Sonnenschein Teoremi'ni vermişlerdir. (Briec, Horvath 2008)

B-konveks küme teorisi ekonomi ile ilgili yapılan çalışmalarda duyulan gereksinimlerden sebeple üretilmiştir. Ekonomide yapılmış çalışmalar pozitif reel sayılar ile gerçekleştirildiğinden ve bu uzayda B-konveks kombinasyon tanımının açık bir analitik gösterime sahip olmasından dolayı, ekonomi alanında yapılan çalışmalar $\mathbb{R}_+^n$ uzayında da devam ettirilerek genelleştirilmiştir.

B-konveks kümeler matematiksel ekonomide önemli bir yere sahip olduğundan, birçok çalışmada hem teorik olarak hem de bu uygulamaları ile birlikte çalışılmaktadır. Ayrıca, W. Briec, B-konvekslik kavramının uygulamaları ile birlikte çalışılmalarına devam etmektedir. Bu kavram çeşitli genelleştirmeler yapılarak tüm $\mathbb{R}^n$ uzayında incelenmiştir. Bir takım cebirsel özellikler verilerek, üst yarı kafes yapısı incelenmiş, B-konveksliğin genişletilmiş bir tanımı verilerek, şekiller üzerinde görsel olarak yansıtılmıştır. B-konveks fonksiyon ve B^{-1} konveks fonksiyonların Eşitsizlikler Teorisinde de farklı uygulamaları vardır. Bu alanda çok sayıda çalışma G. Adilov ve İ. Yeşilce tarafından 2016 yılında yapılmıştır (Adilov, Yeşilce 2016).

Öncelikle konveks kombinasyon kavramı ile konveks küme, grafik üstü küme tanımlanmıştır. Grafiküstü kümenin (epigraf) konvksliği ile fonksiyonların konveksliğine geçiş yapılmaktadır. Bu bağlamda konvekslik kavramının soyutlaştırılarak elde edilen fonksiyonlardan biri olan B-konveks fonksiyonlar $Co^{\infty}(A) = \lim_{r\to\infty} Co^{r}(A)$ şeklinde ifade edilmiş A kümesinin B-konveks kombinasyonu tanımı yardımıyla $\mathbb{R}^n$ kümesinde B-konveks küme, bir kümenin B-konveks kabuğu ve bu iki kavramın özellikleri ile birlikte verilmiştir. Bir A kümesinin B-konveks küme olması için gerek ve yeter koşul bir $A \subset \mathbb{R}_+^n$ kümesinden alınan $\forall x_1, x_2 \in A$ ve $\forall t \in [0,1]$ için $tx_1 \vee x_2 \in A$ olması sonucunu doğurmuştur. *B*-konveks kümenin içi ve kapanışının *B*-konveks olduğu belirtilmiştir. *B*-konveks kümelerle ilgili çalışmalar G. Adilov ve A. M. Rubinov tarafından devam ettirilmiştir.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Topolojik Temel Kavramlar

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şeklindeki tüm reel sayı n-lilerinin oluşturduğu kümeyi $\mathbb{R}^n$ ile gösterelim. Böylece $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki toplama ve bir skalerle çarpma işlemlerine göre $\mathbb{R}^n$ kümesi bir vektör uzayı olur;

i. $x + y = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 + \ldots, x_n + y_n)$

ii. $\lambda x = \lambda(x_1, x_2 \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2 \ldots, \lambda x_n)$

Herhangi iki $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ değişkenlerine bağlı bir fonksiyon tanımlayalım:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur yani aşağıdaki lemma doğrudur.

Lemma 3.1.1. Herhangi iki $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

i. $\langle x,x \rangle \geqslant 0$ ve $\langle x,x \rangle = 0$ için gerek ve yeter koşul x = 0 olmasıdır.

ii. $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$

iii. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

iv. $\langle x, y+z \rangle = \langle x,y \rangle + \langle x,z \rangle$

geçerlidir.

Herhangi bir $x \in \mathbb{R}^n$ elemanının Öklid normu aşağıdaki biçimde tanımlanır.

$$\| x \| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Bu tanımdan yararlanarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Lemma 3.1.2. Herhangi $x,y \in \mathbb{R}^n$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki koşullar sağlanır.

i. $\| x \| \geqslant 0$ ve $\| x \| = 0$ için gerek ve yeter koşul $x = 0$ olmasıdır.

ii. $\| \lambda x \| = | \lambda | . \| x \|$

iii. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ (Üçgen eşitsizliği)

iv. $|\langle x, y \rangle| \leq \| x \| \| y \|$ (Couchy-Scwartz eşitsizliği)

Herhangi iki $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ elemanları arasındaki Öklid metriği ya da uzaklığı;

$$d(x, y) = \| x - y \|$$

şeklinde tanımlanır. Doğrudan tanımlar kullanılarak aşağıdaki eşitlikler kolayca elde edilir.

$$d(x, y) = \| x - y \| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Lemma 3.1.3. Herhangi $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ için aşağıdakiler geçerlidir.

i. $d(x, y) \geqslant 0$ ve $d(x, y) = 0$ için gerek ve yeter koşul $x = y$ olmasıdır.

ii. $d(x, y) = d(y, x)$

iii. $d(x, z) \geqslant d(x, y) + d(y, z)$ (Üçgen eşitsizliği)

Tanım 3.1.1. Herhangi bir $a \in \mathbb{R}^n$ noktasının $r > 0$ yarıçaplı komşuluğu aşağıdaki gibi tanımlanır.

i. $B(a,r) := \{ x \in \mathbb{R}^n : \| x - a \| < r \}$, açık komşuluk

ii. $\overline{B(a,r)} := \{ x \in \mathbb{R}^n : \| x - a \| \leqslant r \}$, kapalı komşuluk

iii. $B^*(a,r) := \{ x \in \mathbb{R}^n : 0 < \| x - a \| < r \} = B(a,r) \setminus \{a\}$, delinmiş komşuluk.

Tanım 3.1.2. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $a \in A$ olmak üzere , eğer $\exists\, \varepsilon > 0$ öyle ki $B(a, \varepsilon) \subset A$ gerçekleniyor ise a noktasına A kümesinin bir iç noktası denir. A kümesinin tüm iç noktalarının kümesi *intA* ile gösterilir

Tanım 3.1.3. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ olmak üzere, eğer A kümesinin her noktası A kümesinin bir iç noktası ise A kümesine $\mathbb{R}^n$ uzayında bir açık küme denir.

Lemma 3.1.4. Bir $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi için aşağıdaki önermeler denktir.

i. A kümesi açıktır.

ii. $\forall a \in A$ için $\exists\, \varepsilon > 0$ öyle ki $B(a, \varepsilon) \subset A$ geçerlidir.

iii. $intA = A$

Tanım 3.1.4. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ olmak üzere, eğer $\mathbb{R}^n \setminus A$ kümesi bir açık küme ise A kümesine kapalı küme denir.

Lemma 3.1.5. $\mathbb{R}^n$ uzayındaki açık ve kapalı kümelerin kesişim ve birleşimlerine dair aşağıdaki önermeler doğrudur.

i. Herhangi sayıdaki açık kümenin birleşimi açıktır.

ii. Sonlu sayıdaki açık kümenin kesişimi açıktır.

iii. Herhangi sayıdaki kapalı kümenin kesişimi kapalıdır.

iv. Sonlu sayıdaki kapalı kümenin birleşimi kapalıdır.

Tanım 3.1.5. $\forall k \in N$ için $x_k \in \mathbb{R}^n$ sağlayan bir $\{x_k\}$ dizisi ve bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ noktası göz önüne alınsın. Eğer

$$\lim_{x\to\infty} \| x_k - x_0 \| = 0$$

ise, '$\{x_k\}$ dizisi x_0 noktasına yakınsar' denir. Burada x_0 noktasına $\{x_k\}$ dizisinin limiti denir. Bu durum $\lim_{x\to\infty} x_k = x_0$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 3.1.6. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *ve* $y \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, eğer

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } A \cap B^*(y, \varepsilon) \neq \emptyset$$

ise, y noktasına A kümesinin bir yığılma noktası, ya da limit noktası denir. A kümesinin tüm yığılma noktalarının kümesi *YığA* ile gösterilir.

Tanım 3.1.7. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *ve* $z \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, eğer

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } A \cap B(z, \varepsilon) \neq \emptyset$$

ise *z* noktası *A* kümesinin bir kapanış noktasıdır denir. *A* kümesinin tüm kapanış noktalarının kümesi $\bar{A}$ ile gösterilir ve *A* kümesinin kapanışı ya da kapanış kümesi olarak adlandırılır. Bu durumda $\bar{A}$ kapanış kümesi elemanları *A* kümesinden alınan tüm yakınsak dizilerin limitlerinin kümesi olur.

Tanım 3.1.8. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *ve* $s \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, eğer

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } A \cap B(s, \varepsilon) \neq \emptyset \text{ ve } (\mathbb{R}^n \setminus A) \cap B(s, \varepsilon) \neq \emptyset$$

ise, *s* noktasına *A* kümesinin bir sınır noktası denir. *A* kümesinin tüm sınır noktalarının kümesine *A*'nın sınırı denir ve *bdA* ile gösterilir.

Tanım 3.1.9. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ bir küme olmak üzere,

$$\exists M > 0 \text{ öyle ki } A \subset \overline{B(0, M)} \text{ yani } \forall x \in A \text{ için } \| x \| \leqslant M$$

ise, *A* kümesine bir sınırlı küme denir.

Tanım 3.1.10. $\{x_k\}$, $\mathbb{R}^n$'de bir dizi olmak üzere, eğer

$$\exists M > 0 \text{ öyle ki } \forall k \in N \text{ için } \| x_k \| \leqslant M$$

ise $\{x_k\}$ dizisine bir sınırlı dizi denir.

Tanım 3.1.11. $\{x_k\}$, $\mathbb{R}^n$'de bir dizi ve $\{k_1\}$ kesin artan bir doğal sayı dizisi olmak üzere $\{x_{k_1}\}$ dizisine $\{x_k\}$ dizisinin bir alt dizisi denir.

Teorem 3.1.1. (Bolzano-Weierstrass Teoremi) Her sınırlı dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır.

Tanım 3.1.12. Eğer A içerisindeki her dizinin A içerisindeki bir noktaya yakınsayan bir alt dizisi var ise, 'A kümesi $\mathbb{R}^n$ uzayında kompaktır' denir.

Teorem 3.1.2. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ olmak üzere A kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter koşul kapalı ve sınırlı olmasıdır.

Tanım 3.1.13. $D \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $\exists\, m \in \mathbb{R}$ öyle ki $\forall x \in D$ için $m \leqslant x$ ise m sayısı D kümesi için bir alt sınırdır ve D kümesine de alttan sınırlı küme denir. Benzer biçimde $\exists\, M \in \mathbb{R}$ öyle ki $\forall x \in$ D için $x \leqslant M$ ise 'M sayısı D kümesi için bir üst sınırdır' ve D kümesine de üstten sınırlı küme denir.

Lemma 3.1.6. Bir kümenin sınırlı olması için gerek ve yeter koşul hem alttan hem üstten sınırlı olmasıdır.

Tanım 3.1.14. $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ kümesi alttan sınırlı olsun. D kümesinin alt sınırlarının en büyüğüne D kümesinin infimumu denir ve $inf\, D$ ile gösterilir. $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ kümesi üstten sınırlı olsun. D kümesinin üst sınırlarının en küçüğüne D kümesinin supremumu denir ve $supD$ ile gösterilir.

Eğer D kümesi alttan sınırlı değil ise $infD = -\infty$, üstten sınırlı değil ise $supD = +\infty$ yazılır. Ayrıca $infD = -\infty$ ve $supD = +\infty$ kabul edilir.

Aksiyom 3.1.1. (Tamlık aksiyomu) $\mathbb{R}$ uzayındaki boştan farklı ve üstten sınırlı her kümenin supremumu vardır, bu supremum bir reel sayıdır.

Tanım 3.1.15. $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ve $x_0 \in A$ olsun. Eğer

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists\, \delta > 0 \text{ öyle ki } x \in A,\ \| x - x_0 \| < \delta \text{ iken } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

doğru ise 'f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir' denir. Eğer f fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise, 'f fonksiyonu A üzerinde süreklidir' denir.

Tanım 3.1.16 $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ve $x_0 \in A$ olsun. Eğer A kümesi içindeki limiti x_0 olan tüm $\{x_k\}$ dizilerinin f altındaki görüntülerinden oluşan $\{f(x_k)\}$ reel sayı dizilerinin limitleri $f(x_0)$ sayısı ise, 'f fonksiyonu x_0 noktasında dizisel süreklidir' denir.

Tanım 3.1.17. $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ve $x_0 \in A$ olsun. Eğer

$$\exists\, \delta > 0 \text{ öyle ki } \forall x \in B(x_0, \delta) \cap A \text{ için } f(x_0) \leqslant f(x)$$

gerçekleniyor ise, 'f, A üzerinde x_0 noktasında yerel minimuma sahiptir' denir. Eğer

$$\forall x \in A \text{ için } f(x_0) \leqslant f(x)$$

geçerli ise 'f, A üzerinde x_0 noktasında mutlak minimuma sahiptir' denir.

Teorem 3.1.3. (Weierstrass Varlık Teoremi) $K \neq \emptyset$ kompakt bir küme ve f : K $\to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonu K kümesi üzerinde mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerine ulaşır, yani

$\exists\, x_0, y_0 \in K$ *öyle ki* $f(x_0) = min\,\{f(x) : x \in K\}$ ve $f(y_0) = max\,\{ f(x) : x \in K\}$

olur.

Tanım 3.1.18. $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ kümeleri için $A \cap \bar{B} = \emptyset = B \cap \bar{A}$ doğru ise A ve B kümeleri ayrılmıştır denir. Eğer bir küme boştan farklı iki ayrılmış kümenin birleşimi olarak ifade edilemiyorsa o kümeye bağlantılı küme denir.

3.2. Klasik Konvekslik İle İlgili Temel Kavramlar

Tanım 3.2.1 $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots \lambda_m x_m$ noktasına $x_1, x_2, \ldots, x_m$ noktalarının lineer kombinasyonu denir.

Tanım 3.2.2.

$x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ ve $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ olmak üzere

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m$ noktasına $x_1, x_2, \ldots, x_m$ noktalarının afin kombinasyonu denir

Tanım 3.2.3.

$x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m > 0$ ve $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ olmak üzere

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m$ noktasına $x_1, x_2, \ldots, x_m$ noktalarının konveks kombinasyonu denir.

Tanım 3.2.4 $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m > 0$ olmak üzere$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m$ toplamına $x_1, x_2, \ldots, x_m$ noktalarının konik kombinasyonu denir.

Tanım 3.2.5. $L \subseteq \mathbb{R}^n$ olmak üzere

i. $x_1\, x_2$, $\in L$ için $x_1 + x_2 \in L$
ii. $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda x \in L$ gerçekleniyorsa

L kümesine bir lineer alt uzay denir.

Lemma 3.2.1. $L \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinin bir lineer alt uzay olabilmesi için gerek ve yeter koşul $x_1, x_2 \in L$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ için $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in L$ olmasıdır.

Lemma 3.2.2. $L \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinin bir lineer alt uzay olması için gerek ve yeter koşul L kümesinin, içerdiği noktaların lineer kombinasyonlarını da içermesidir.

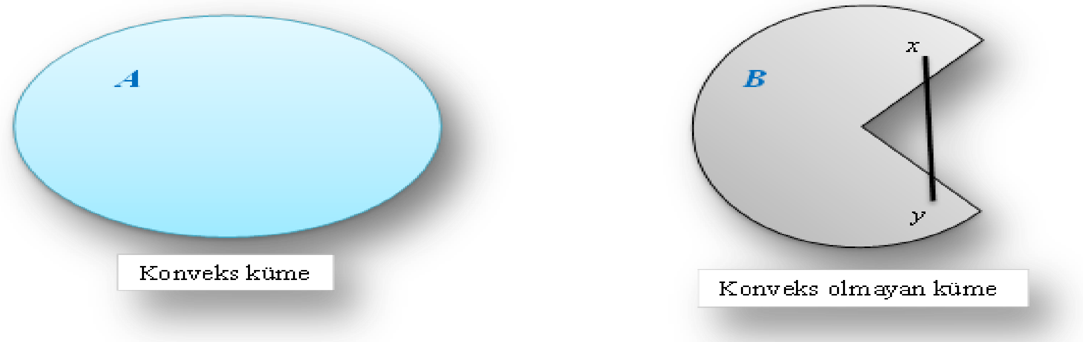
Tanım 3.2.6. $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall x, y \in M$ için $(1-\lambda)x + \lambda y \in M$ gerçekleniyor ise M kümesine $\mathbb{R}^n$ de bir afin küme denir.

Not: $x, y \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\{z \in \mathbb{R}^n : z = (1-\lambda)x + \lambda y, \lambda \in \mathbb{R}\}$ kümesi x ve y noktalarından geçen doğru olduğundan afin kümeyi böyle de tanımlayabiliriz: Herhangi iki noktasından geçen doğruyu da içeren kümelere afin küme denir.

Lemma 3.2.3. $M \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin afin küme olabilmesi için gerek ve yeter koşul, M kümesinin içerdiği noktaların afin kombinasyonlarını da içermesidir. Yani,

$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ eşitliğini sağlayan $\forall\, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ ve $x_1, x_2, \dots, x_m \in M$ için $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \in M$ olmasıdır.

Tanım 3.2.7. $C \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere, eğer $\forall\, x, y \in C, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ için $(1-\lambda)x + \lambda y \in C$ içermesi doğru ise, diğer bir deyişle C kümesindeki herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası C kümesi içerisinde kalıyor ise C kümesine bir konveks küme denir (Rockafellar 1970).



Şekil 3.1. Konveks olan ve olmayan küme

Lemma 3.2.4. $C \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin konveks küme olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$\forall\, x_1, x_2, \dots, x_m \in C$ ve $0 \leq \lambda_i \leq 1$ $(i = 1,2, \dots, m)$, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ için $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \in C$ olmasıdır.

yani, C kümesinden olan sonlu sayıda noktanın konveks kombinasyonlarının da C kümesinde olmasıdır.

Tanım 3.2.8. $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesine $\lambda \in \mathbb{R}_+$ve $x \in K$ için $\lambda x \in K$ ise yani pozitif skaler çarpım işlemine göre kapalı ise K kümesine bir koni denir. Eğer K kümesi aynı zamanda konveks bir küme ise konveks koni olur (Rockafellar 1970).

Lemma 3.2.5. $K \subseteq \mathbb{R}^n$kümesinin konveks koni olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ve x_1,$x_2 \in K$ için $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in K$ olmasıdır.

Lemma 3.2.6. $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi konveks koni belirtmesi için gerek ve yeter koşul

$\forall\, x_1, x_2, \dots, x_m \in K$ ve $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}_+$ *için* $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \in K$ olmasıdır.

Yani K kümesinin, K kümesine ait olan noktalarının koni kombinasyonlarını da içermesidir.
Konvekslik özelliğini koruyan bazı önemli işlemler aşağıdakilerdir (Rockafeller 1970).

Lemma 3.2.7. I herhangi bir indis kümesi olmak üzere $\forall\, i \in I$ için $C_i \subseteq \mathbb{R}^n$ kümeleri konveks ise $\bigcap_{i \in I} C_i$ kesişim kümesi de konvekstir.

Lemma 3.2.8. C_1, $C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks ise aşağıdaki toplam kümesi de konvekstir.

$$C_1+C_2 = \{ x_1+x_2: \ x_1 \in C_1, \ x_2 \in C_2 \}$$

Lemma 3.2.9. $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $C \subseteq \mathbb{R}^n$ bir konveks küme ise aşağıdaki skaler kat kümesi de konvekstir.

$$\alpha C = \{x: x = \alpha x_1, x_1 \in C\}$$

Lemma 3.2.10. $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks ise $\bar{C}$ kapanış kümesi de konvekstir.

Lemma 3.2.11. $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks ise *intC* iç kümesi de konvekstir.

Lemma 3.2.12. $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ lineer dönüşüm ve $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks bir küme olsun. Bu durumda $T(C) = \{ y : y = T(x) , x \in C \}$ görüntü kümesi $\mathbb{R}^m$ de konvekstir.

Tanım 3.2.9. Bir $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesini kapsayan tüm konveks kümelerin kesişimine , yani

$$\bigcap \{B \subset \mathbb{R}^n | \ B \text{ konvekstir ve } A \subset B \}$$

kesişim kümesine A kümesinin konveks örtüsü ya da konveks zarfı denir ve bu küme *conv(A)* ile gösterilir (Rockafellar 1970).

Lemma 3.2.13. Bir A kümesini kapsayan en küçük konveks küme, A kümesinin konveks örtüsüdür. Daima $A \subseteq conv(A)$ geçerlidir. A konveks bir küme ise $conv(A) = A$ doğrudur.

Lemma 3.2.14. $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin elemanlarının tüm konveks kombinasyonlarının kümesi $K(A)$ ile gösterilmek üzere, $A \subset \mathbb{R}^n$ için $conv(A) = K(A)$ geçerlidir.

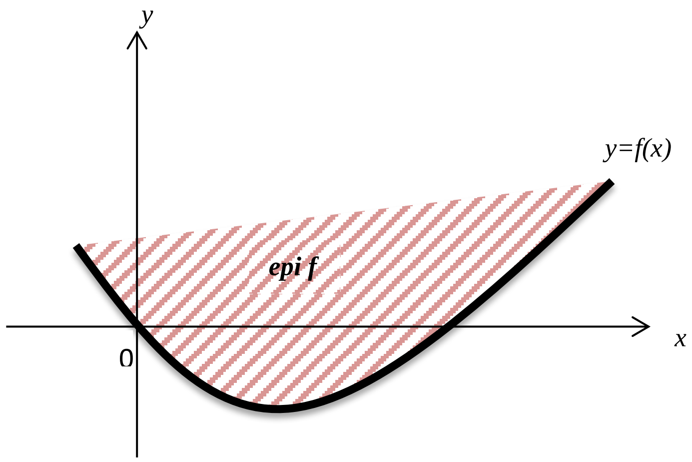
Teorem 3.2.1. (Caratheodory Teoremi) $A \subset \mathbb{R}^n$ herhangi bir küme olsun. $conv(A)$ kümesinin herhangi bir elemanı, A kümesinin en fazla $(n+1)$ elemanının konveks kombinasyonu şeklinde yazılabilir.

Teorem 3.2.2. (Radon Teoremi) $C = \{ x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ kümesi $\mathbb{R}^n$'de herhangi sonlu bir küme olsun. Eger $m \geq (n+2)$ ise C kümesi $conv(C_1) \cap conv(C_2) \neq \emptyset$ sağlanacak biçimde ayrık iki C_1ve C_2 alt kümesine parçalanabilir.

Teorem 3.2.3. (Helly Teoremi) $C_1, C_2 \ldots, C_r \subset \mathbb{R}^n$, $r \geq n+1$ ve $i = 1,\ldots,r$ için C_i kümeleri konveks olsunlar. Eğer bu konveks kümelerden herhangi $(n+1)$ tanesinin kesişimi boş değil ise $\bigcap_{i=1}^{r} C_i \neq \emptyset$ gerçeklenir.

Teorem 3.2.4. (Ayırma Teoremi) $M, N \subset \mathbb{R}^n$, $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall m \in M$, $\forall n \in N$ için $\langle a, m\rangle \leq b \leq \langle a, n\rangle$ eşitsizliği sağlanıyor ise, $H = \{x : \langle a, x\rangle = b\}$ hiperdüzlemi M ve N kümelerini ayırır denir.

Tanım 3.2.10. $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = [-\infty, +\infty]$ genişletilmiş reel sayılar kümesi olmak üzere $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu için $dom(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < +\infty\}$ kümesine f fonksiyonunun tanım kümesi, $epi(f) = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n\, x\, \mathbb{R} : f(x) \leqslant \alpha\}$ kümesine f fonksiyonunun grafiküstü (ya da f fonksiyonunun epigrafı) denir (Rockafellar 1970).



Şekil 3.2. f fonksiyonunun grafiküstü kümesi

Tanım 3.2.11. Grafiküstü kümesi konveks küme olan fonksiyonlara konveks fonksiyon denir. Bir başka deyişle bir $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu için $epi(f)$ kümesi $\mathbb{R}^{n+1}$ uzayında konveks ise f fonksiyonuna $\mathbb{R}^n$ uzayında konvekstir denir (Rockafellar 1970).

Tanım 3.2.12. Eğer $-f$ fonksiyonu konveks ise f fonksiyonuna konkav fonksiyon denir (Rockafellar 1970).

Tanım 3.2.13. $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ olmak üzere $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $-\infty < f(x)$ ve $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}^n$ $f(x_0) < +\infty$ eşitsizliğini sağlayan bir fonksiyona has (proper) fonksiyon denir (Rockafellar 1970).

Örnek 3.2.1. $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ olmak üzere $f(x) = \begin{cases} xlnx - x, x > 0 \\ 0 \qquad\quad , x = 0 \\ +\infty \qquad , x < 0 \end{cases}$ fonksiyonu bir has fonksiyondur (Değer 2012).

Teorem 3.2.5. $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ olsun, f fonksiyonunun konveks olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ ve $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ için $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ eşitsizliğinin doğru olmasıdır (Rockafellar 1970).

İspat: Eğer $x_1 \notin dom(f)$ ya da $x_2 \notin dom(f)$ ise sağ taraf $+\infty$ olacağından eşitsizlik geçerlidir.Varsayalım ki $x_1, x_2 \in dom(f)$ olsun. Öyle ise

$\alpha_1 \coloneqq f(x_1) < +\infty$ ve $\alpha_2 \coloneqq f(x_1) < +\infty$ olup, $f(x_1) \leqslant \alpha_1$ ve $f(x_2) \leqslant \alpha_2$ eşitsizlikleri, eşitliği hali ile sağlanacağından

$$(x_1, f(x_1)) \in epi(f) \text{ ve } (x_2, f(x_2)) \in epi(f)$$

içermeleri geçerlidir. f konveks ise *epi(f)* konvekstir. Bu sebepten $0 < \lambda < 1$ için,

$$\lambda(x_1, f(x_1)) + (1-\lambda)(x_2, f(x_2)) = (\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2\,, \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)) \in epi(f)$$

doğrudur ve yine bu sebepten

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

eşitsizliği geçerlidir. ■

Tanım 3.2.14. Eğer $x_1 \neq x_2$ ve $0 < \lambda < 1$ için

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

ise f fonksiyonu kesin konvekstir denir (Rockafellar 1970).

Lemma 3.2.15. $\forall\, i \in I$ için f_i fonksiyonları konveks ise $f(x) = sup_{i\in I}\, f_i(x)$ şeklinde tanımlanan konveks fonksiyonların supremum fonksiyonu da konvekstir.

Lemma 3.2.16. $\forall\, i \in \{1,2,\dots,m\}$ için f_i fonksiyonları konveks ve $\alpha_i \geqslant 0$ olmak üzere $f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \cdots + \alpha_m f_m(x)$ fonksiyonu da konvekstir.

Lemma 3.2.17. f konveks ise $dom(f)$ konveks bir kümedir.

Teorem 3.2.6. (Jensen eşitsizliği)

f konveks fonksiyon olmak üzere $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ ve $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ için,

$$f(\lambda_1, x_1 + \lambda_2, x_2 + \dots + \lambda_m, x_m) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_m f(x_m)$$

eşitsizliği geçerlidir. (Rockafellar 1970)

İspat: $\forall\, i \in \{1,2,\dots,m\}$ için $f(x_i\,) \leq f(x_i\,)$ olması nedeniyle $(x_i, f(x_i)) \in epi(f)$ geçerlidir. *f* konveks olduğundan *epi(f)* konveks kümedir. Dolayısıyla $\lambda_i \geq 0$ ve

$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ olmak üzere

$$\lambda_1\big(x_1, f(x_1)\big) + \lambda_2\big(x_2, f(x_2)\big) + \cdots + \lambda_m\big(x_m, f(x_m)\big) \in epi(f)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m, \lambda_1 f\,(x_1) + \lambda_2 f\,(x_2) + \cdots + \lambda_m f\,(x_m)) \in epi(f)$$

$$\Leftrightarrow f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m) \leq \lambda_1 f\,(x_1) + \lambda_2 f\,(x_2) + \cdots + \lambda_m f\,(x_m))$$

olur. ■

Lemma 3.2.18. $I \subseteq \mathbb{R}$ açık bir aralık ve $a, b \in I$, $a < x < b$ ve $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu konveks olmak üzere;

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

eşitsizliği geçerlidir (Rockafellar 1970).

Lemma 3.2.19. $I \subseteq \mathbb{R}$ açık bir aralık, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ve $c \in int(I)$ olsun. Bu durumda c noktasında $f'(c^-)$ sol ve $f'(c^+)$ sağ türevleri vardır ve bu türevler $int(I)$ üzerinde artandır. Üstelik $f'(c^-) \leqslant f'(c^+)$ geçerlidir.

Lemma 3.2.20. $I \subseteq \mathbb{R}$ açık bir aralık olsun. $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ikinci mertebeden sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonunun konveks olabilmesi için gerek yeter koşul $\forall x \in I$ için $f''(x) \geqslant 0$ sağlanmasıdır.

Tanım 3.2.15. $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, Q_{nxn} bir simetrik reel matris olmak üzere $f(x) = \langle x, Qx \rangle$ şeklinde tanımlanan fonksiyona bir kuadratik form denir. $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $g(x) = \langle \alpha, x \rangle + b$ şeklindeki fonksiyon afin fonksiyondur ve tüm afin fonksiyonlar bu biçimde yazılabilir. Bir kuadratik form ile bir afin fonksiyonun toplamı biçiminde yazılan fonksiyona bir kuadratik fonksiyon denir, yani kuadratik fonksiyonlar $h(x) = \langle x, Qx \rangle + \langle \alpha, x \rangle + b$ şeklinde yazılabilen fonksiyonladır (Rockafellar 1970).

Tanım 3.2.16. Q_{nxn} bir simetrik reel matris olmak üzere, eğer $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $\langle x, Qx \rangle \geqslant 0$ sağlanıyor ise Q_{nxn} simetrik matrisine pozitif yarı-tanımlı matris ve $\langle x, Qx \rangle$ kuadratik formuna da pozitif yarı-tanımlı form denir. Eğer $\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ için $\langle x, Qx \rangle > 0$ sağlanıyor ise pozitif tanımlı matris ve $\langle x, Qx \rangle$ kuadratik formuna da pozitif tanımlı form denir (Rockafellar 1970).

Tanım 3.2.17. Q bir nxn reel matris olsun ve elemanları a_{ij} ile gösterilsin.

$$\Delta_1 = a_{11}\ ,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},$$

şeklinde tanımlanan Δ_k determinantlarına Q_{nxn} matrisinin öncü esas minörleri denir (Rockafellar 1970).

Teorem 3.2.7. (Slyvester Kriteri) Simetrik bir Q_{nxn} matrisin pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter koşul $\forall\ k = 1,2, \ldots, n$ için $\Delta_k > 0$ gerçeklenmesidir (Rockafellar 1970).

Teorem 3.2.8. $f: C \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu açık konveks bir *C* kümesi üzerinde reel değerli ve ikinci mertebeden sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere *f* fonksiyonunun *C* üzerinde konveks olabilmesi için gerek ve yeter koşul Hessian matris denilen

$$H(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right), \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

şeklinde tanımlanmış simetrik matrisin $\forall x \in C$ için pozitif yarı-tanımlı olmasıdır.

Eğer *H(x)* matrisi $\forall x \in C$ için pozitif tanımlı ise o zaman *f* kesin konveks fonksiyondur (Rockafellar 1970).

Örnek 3.2.2. $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^3$de konveksliğini inceleyelim. Hessian matrisini oluşturalım.

$f_x(x,y,z) = 2x + 2y + 2z$, $f_y(x,y,z) = 4y + 2x$, $f_z(x,y,z) = 6z + 2x$

$f_{xx}(x,y,z) = 2$, $f_{xy}(x,y,z) = 2$, $f_{xz}(x,y,z) = 2$

$f_{yx}(x,y,z) = 2$, $f_{yy}(x,y,z) = 4$, $f_{yz}(x,y,z) = 0$

$f_{zx}(x,y,z) = 2$, $f_{zy}(x,y,z) = 0$, $f_{zz}(x,y,z) = 6$

$$H(x) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Şimdi de öncü esas minörlerini hesaplayalım,

$\Delta_1 = 2 > 0$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 8 > 0,$$

$\forall\, x \in \mathbb{R}^3$ için Δ_1, Δ_2, $\Delta_3 > 0$ gerçeklendiğine göre *H(x)* Hessian matrisi pozitif tanımlı bir matristir. Dolayısıyla f fonksiyonu $\mathbb{R}^3$ üzerinde kesin konveks bir fonksiyondur (Değer 2012).

Tanım 3.2.18. (Ağırlıklı Aritmetik Ortalama- Geometrik Ortalama Eşitsizliği)

$x_1, \dots, x_n \geq 0, \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$$

Tanım 3.2.19. (Aritmetik Ortalama – Geometrik Ortalama Eşitsizliği)

$x_1, \dots, x_n \geq 0, \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ olmak üzere $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \dfrac{1}{n}$ için

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada eşitlik hali yalnızca $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ eşitliği için doğrudur.

Tanım 3.2.20. Young Eşitsizliği

$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ eşitsizliğinde *n=2*, $\lambda_1 = \frac{1}{p}$, $\lambda_2 = \frac{1}{q}$ ve $x_1 = x^p$, $x_2 = y^q$ alınırsa;

$$xy \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q$$

eşitsizliği elde edilir. Dikkat edilirse burada $x, y \geq 0$, $p, q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ geçerlidir.

3.3. Soyut Konvekslik İle İlgili Temel Kavramlar

Tanım 3.3.1. H, X kümesi üzerinde tanımlanmış sonlu fonksiyonlara ait bir küme ve

$f : X \to \mathbb{R} \cup \{\mp\infty\}$ olsun. Eğer, H'nin $f(x) = sup\{h(x) : h \in U\}, \forall x \in X$ olacak şekilde

bir U alt kümesi bulunursa, f fonksiyonu H'ye göre soyut konvekstir ya da H-konvekstir denir. Burada H fonksiyonlar sınıfına elementer fonksiyonlar ailesi denir. $H = \emptyset$ olması durumunda $f(x) = -\infty$ olarak kabul edilecektir (Rubinov 2000).

Tanım 3.3.2. $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonlarının sınıfı *Y* ile gösterilsin ve $H \subset Y$ olsun. Eğer, $f \in Y$ fonksiyonu *H*-konveks ise, *H* kümesine *Y*'nin süpremal üreteç sınıfı denir (Rubinov 2000).

Teorem 3.3.1. *f* fonksiyonunun *H*-konveks olması için gerek ve yeter koşul

$$f(x) = sup\,\{h(x) : h \in H, h \leqslant f\}, \forall x \in X$$

biçiminde gösterilebilir olmasıdır.

Tanım 3.3.3. $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ olsun. $sup(f, H) = \{h \in H : h \leqslant f\}$ kümesine f fonksiyonunun destek kümesi denir. Burada *H*, elementer fonksiyonların kümesini gösterir (Rubinov 2000).

Tanım 3.3.4. $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ olmak üzere $Co\_Hf(x) = sup\{h(x) : h \in supp(f, H)\}, x \in X\}$ kümesine *f* fonksiyonunun *H*-konveks kabuğu denir.

Teorem 3.3.2. Tanım 3.3.4'e göre; *f* fonksiyonunun *H*-konveks olması için gerek ve yeter koşul $f = Co_H f$ olmasıdır (Rubinov 2000).

Tanım 3.3.5. Topolojik Soyut Konvekslik: X bir vektör uzay, $C \subset X$ olsun. $\forall m \geqslant 2$ tamsayısı için, $V_m \subset R^m$ kümesi alalım. Bir $\phi_m : C^m\ x\ V_m \to C$ fonksiyonlar ailesi verilsin. Eğer, $U \subset C$ için,

$(x_1, x_2, \dots, x_m \in U,\ (\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_m) \in V_m) \Longrightarrow \phi_m(x_1, x_2 \dots, x_m, \alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_m) \in U, m = 2,3, \dots$

şeklinde verilen U kümesi ϕ_m fonksiyonlar ailesine göre soyut konvekstir denir (Rubinov 2000).

Tanım 3.3.6. Fonksiyonel Soyut Konvekslik: X bir vektör uzay, $C \subset X$ ve L'de $\ell : C \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının bir ailesi olsun. (Rubinov 2000)

Eğer $U \subset C$ olmak üzere, $\forall x \notin U$ noktası L'den bir fonksiyon ile U kümesinden ayrılabilir ise, yani öyle bir $\ell \in L$ vardır ki

$$\ell(x) > \sup_{u \in U} \ell(u)$$

ise U kümesine L'ye göre soyut konveks küme denir (Rubinov 2000).

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Farklı Konvekslik Sınıfları

Çok sayıda literatür taraması yapılarak, günümüzdeki gibi belli olan ve incelenen farklı soyut konvekslik sınıfları, varsa aralarındaki ilişkiler de araştırılarak bir araya getirilmiş ve aşağıdaki gibi listelenmiştir.

4.1.1. Log konveks fonksiyonlar

I, reel sayıların bir aralığı olmak üzere eğer bir $f : I \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ fonksiyonu için $log - f$ konveks ise, ya da, denk olarak, $\forall\, x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq [f(x)]^t [f(y)]^{1-t}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna *log*-konveks fonksiyon denir (Pečarić 1992).

4.1.2. r-konveks fonksiyonlar

Eğer $r \in \mathbb{R}$ olmak üzere, f: $[a,b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu, $\forall\, x, y \in [a,b]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \begin{cases} [\lambda f^r(x) + (1-\lambda) f^r(y)]^{\frac{1}{r}}, & r \neq 0 \\ f^{\lambda} + f^{1-\lambda}(y), & r = 0 \end{cases}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonu $[a,b]$'de r-konveks fonksiyondur denir (Avriel 1972).

4.1.3. Godunova-Levin fonksiyonları

$I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere bir $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ,$\forall\, x, y \in I$ ve $\lambda \in (0,1)$ için,

$$f(\lambda\, x + (1-\lambda\,)y) \leq \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{f(y)}{1-\lambda}$$

eşitsizliğini sağlarsa f fonksiyonuna Godunova-Levin fonksiyonu denir (Godunova 1985).

4.1.4. Jensen-Quasi konveks fonksiyon

$I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall\, x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq max\ \{f(x), f(y)\}$$

eşitsizliği doğru ise, f fonksiyonuna Jensen Quasi konveks (veya kısaca J-Quasi konveks) fonksiyon denir (Jensen 1905, Dragomir ve Pearce 2000).

4.1.5. Wright konveks fonksiyonlar

$f : I \rightarrow R$ tanımlı ve $y > x, \delta > 0$ şartları altında her bir $y + \delta,\ x \in I$ için

$$f(x+\ \delta\ )-f\ (x)\leq f(y+\delta)-f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna $I\subseteq\mathbb{R}$ de Wright konveks fonksiyon denir (Dragomir, Pearce 1998).

4.1.6. Wright-Quasi konveks fonksiyonlar

$I\subset\mathbb{R}$ olmak üzere, $f\ :\ I\ \rightarrow\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer, $\forall\ x,y\in I$ ve $t\ \in[0,1]$ için

$$\frac{1}{2}\big[f(tx+(1-t)y)+f\big((1-t)x+ty\big)\big]\leq max\ \{f(x),f(y)\}$$

eşitsizliği, ya da denk olarak $\forall x,y+\delta\in I$ olmak üzere $x<y$ ve $\delta>0$ için;

$$\frac{1}{2}[f(y)+f(\delta)]\ \leq max\ \{f(x),f(y+\delta)\}$$

eşitsizliği doğru ise, f fonksiyonu Wright-Quazikonvekstir (veya kısaca W-Quazikonvekstir) denir (Wright 1954, Dragomir, Pearce 1998).

4.1.7. P-fonksiyonlar

Eğer, $I\subset\mathbb{R}$ olmak üzere $p\ :\ I\rightarrow\mathbb{R}_{+}$ fonksiyonu $\forall\ x,y\in\ I$ ve $\lambda\ \in[0,1]$ için

$$p(\ \lambda x+(1-\lambda)y\ )\leq\ p(x)+p(y)$$

eşitsizliği doğru ise, bu fonksiyona P-tipi bir fonksiyon (ya da kısaca, P-fonksiyon) denir (Singer 1997).

4.1.8. Quasi konveks fonksiyonlar

$f\ :\ S\rightarrow\mathbb{R}$ fonksiyon ve $S\subset\mathbb{R}^{n}$ boştan farklı konveks küme olsun. $\forall\ x,y\in\ S$ ve $\lambda\in[0,1]$ *için*

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y\ )\leq max\ \{f(x),f(y)\}$$

eşitsizliği doğru ise *f* fonksiyona quasi-konveks fonksiyon, eğer

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y\ )<max\ \{f(x),f(y)\}$$

eşitsizliği doğru ise *f* fonksiyona kesin quasi-konveks fonksiyon denir. Benzer şekilde

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y\ )\geq\ max\ \{f(x),f(y)\}$$

eşitsizliği doğru ise *f* fonksiyona quasi-konkav fonksiyon ve

$$f(\lambda x\ +(1-\lambda)y\ )>max\ \{f(x),f(y)\}$$

eşitsizliği doğru ise f fonksiyona kesin quasi-konkav fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

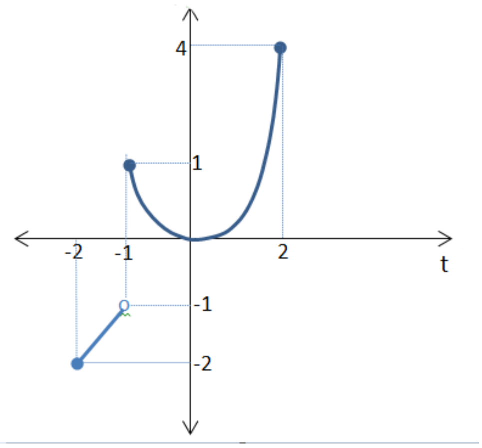
Tanım 4.1.8.1. f hem quasi-konveks hem de quasi-konkav ise f fonksiyona quasi monotonik denir (Greenberg and Pierskalla 1971).

Lemma 4.1.8.1. Herhangi bir konveks fonksiyon quasi koveks fonksiyondur. Ancak tersi her zaman doğru değildir. Yani quasi konveks olup konveks olmayan fonksiyonlar vardır.

Örneğin, $g : [-2,2] \to \mathbb{R}$,

$$g(t) = \begin{cases} t, & t \in [-2,-1) \\ t^2, & t \in [-1,2] \end{cases}$$

fonksiyonu [-2,2] aralığında konveks değildir. Fakat g fonksiyonu [-2,2] aralığında quasi-konveks fonksiyondur (Ion 2007).



Şekil 4.1.8.1. Konveks olmayan ancak quasi-konveks olan fonksiyon grafiği

4.1.9. Multiplikativ konveks fonksiyonlar

$I, J \subset (0,\infty)$ olmak üzere, $f : I \to J$ bir fonksiyon olmak üzere eğer $\forall\, x, y \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(x^{1-\lambda}y^{\lambda}) \leq f(x)^{1-\lambda}f(y)^{\lambda}$$

eşitsizliği doğru ise f fonksiyonuna multiplikativ konveks fonksiyon denir (Rubinov 2000).

4.1.10. Birinci anlamda s-konveks fonksiyonlar

$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $s \in (0,1]$ olsun. Eğer $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+$ ve $\alpha^s + \beta^s = 1$ olmak üzere $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y)$$

eşitsizliği doğru ise, f fonksiyonuna birinci anlamda s-konveks fonksiyon denir (Orlicz 1961).

4.1.11. İkinci anlamda s-konveks fonksiyonlar

$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $s \in [0,1]$ olsun. Eğer $\forall\, x, y \geq 0,\ \alpha, \beta \geq 0$ ve $\alpha + \beta = 1$ için

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y)$$

eşitsizliği doğru ise, f fonksiyonuna ikinci anlamda s-konveks fonksiyon denir (Hudzik ve Mligranda 1994).

4.1.12. m-konveks fonksiyonlar

$f\,:\,[0,b]\to\mathbb{R},\;\; b>0$ olmak üzere, $\forall\, x,y\;\in[0,b]$ ve $m\in[0,1],\;\; t\;\in[0,1]$ için,

$$f(tx\;+\;m(1-t)y)\;\leq tf(x)\;+\;m(1-t)f(y)$$

eşitsizliği doğru ise, f fonksiyonuna m-konveks fonksiyon denir (Toader 1988, Dragomir ve Pečarić 1995, Toader 1984).

4.1.13. Artan pozitif homojen (IPH) fonksiyonlar

$f\;\mathbb{R}^n_{++}$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun.

Tanım 4.1.13.1. Eğer, $\forall\; x,y\in\mathbb{R}^n_{++}$ için $x\geq y$ iken $f(x)\;\geq\;f(y)$ ise, f fonksiyonu artan fonksiyondur denir ($x\geq y\;\Leftrightarrow\;x_i\;\geq y_i\;\;\forall\, i\in\{\,1,\ldots,n\}$) (Rubinov 2000).

Tanım 4.1.13.2. Eğer, $\forall\, x\;\in\;\mathbb{R}^n_{++}$ ve $\lambda\;>\;0$ için $f(\lambda x)=\lambda f(x)$ ise f fonksiyona homojen fonksiyon denir. (Rubinov 2000)

Tanım 4.1.13.3. $f\,:\,\mathbb{R}^n_{++}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu hem artan hem de homojen ise; bu fonksiyona artan pozitif homojen (IPH) fonksiyon denir. Yan f fonksiyonu;

i. $\forall\, x,y\in\mathbb{R}^n_{++}$ için $x\geq\; y$ iken $f(x)\geq f(y)$
ii. $\forall\, x\in\mathbb{R}^n_{++}\; ve\; \lambda>0\; için\; f(\lambda x)=\lambda f(x)$

koşullarını sağlıyorsa bu fonksiyona artan pozitif homojen fonksiyon denir.

$\forall\, x,l\in\mathbb{R}^n_{++}$ için $\langle l,x\rangle=\min\limits_{1\leq i\leq n}\dfrac{x_i}{l_i},\;\; \langle x,l\rangle^{+}=\max\limits_{1\leq i\leq n}\dfrac{l_i}{x_i}$ ‘dir ve bu fonksiyonlara, sırasıyla, min-tip ve max-tip fonksiyonlar denir (Rubinov 2000).

Teorem 4.1.13.1. $D\subset\mathbb{R}^n_{++}$ olmak üzere $f\,:D\to[0,+\infty]$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

i. f fonksiyonu, $\langle l,.\rangle\;:D\;\to[0,+\infty]$ fonksiyonlar ailesine göre konvekstir;
ii. $\forall\, l,x\;\in D$ için, $f(l)\langle l,x\rangle\leq f(x)$ eşitsizliği doğrudur;
iii. f fonksiyonu D üzerinde IPH'dir (Rubinov 2000).

4.1.14. Artan radyant (InR) fonksiyonlar

Tanım 4.1.14.1. Q, $\mathbb{R}^n_{+}$ içinde konik küme ve $U\subset Q$ olsun. Eğer

$$\left(x\in U,\;\; 0<\lambda\leq 1\right)\Rightarrow\lambda x\in U$$

eşitsizliği doğru ise *U* kümesi *Q*'nun radyant alt kümesidir denir (Rubinov 2000).

Tanım 4.1.14.2. $Q\subset\mathbb{R}^n_{+}$ kapalı koni, *V* boş kümeden farklı ve $V\subset Q$ olsun. Eğer

$$\left(x \in V,\ \ \lambda \geq 1\right) \Rightarrow \lambda x \in V$$

ise V kümesi Q'nun ko-radyant alt kümesidir denir (Rubinov 2000).

Tanım 4.1.14.3. $Q \subset \mathbb{R}^n_+$ radyant küme olmak üzere, $f : Q \to [0, +\infty]$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu için aşağıdaki koşulları doğru ise f artan radyant fonksiyondur denir;

i. Eğer $\forall\, x, y \in Q$ için $x \geq y$ ise $f(x) \geq f(y)$;
ii. Eğer $\forall\, x \in Q$ ve $\lambda \in (0,1)$ için $f(\lambda x) \leq \lambda f(x)$.

$\mathbb{R}^n_{++}$ üzerinde tanımlı ϕ fonksiyonu

$$\phi(u,x) = \begin{cases} 0\ , & \text{eğer} \quad \langle u,x \rangle < 1 \\ \langle u,x \rangle, & \text{eğer} \quad \langle u,x \rangle \geq 1 \end{cases}$$

ve $\mathbb{R}^n_{++}$ üzerinde tanımlı ϕ_u fonksiyonu $\phi_u(x) = \phi(u,x)$ olsun.

$$U = \left\{ \frac{1}{c}\phi_u : u \in \mathbb{R}^n_{++}, c \in (0, +\infty] \right\}$$

kümesi $\mathbb{R}^n_{++}$ üzerinde tanımlı InR fonksiyonların süpremal üreteç sınıfıdır. (Sharikov 2003).

4.1.15. Artan ko-radyant (ICR) fonksiyonlar

$Q \subset \mathbb{R}^n_+$ co-radyant küme olmak üzere, $f : Q \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyon olmak üzere;

i. Eğer $\forall x \in Q$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $f(\lambda x) \leq \lambda f(x)$ ise f fonksiyonu radyanttır denir.
ii. Eğer $\forall x \in Q$ ve $\lambda \geq 1$ *için* $f(\lambda x) \leq \lambda f(x)$ ise f fonksiyonu ko-radyanttır denir (Rubinov 2000).

$\mathbb{R}^n_{++}$ üzerinde verilen ψ_l fonksiyonu,

$$\psi_l(x) = \begin{cases} \langle l,x \rangle, & \langle l,x \rangle \leq 1 \ \text{ ise} \\ 1\ , & \langle l,x \rangle > 1 \ \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. Burada $l \in \mathbb{R}^n_{++}$'dir. H ile gösterilen,

$$H = \{ c\psi_i : l \in \mathbb{R}^n_{++}, \qquad c \in [0, +\infty]\}$$

küme, $\mathbb{R}^n_{++}$ üzerinde tanımlı olan artan ko-radyant (ICR) fonksiyonların süpremal üreteç sınıfıdır (Adilov 2011).

Teorem 4.1.15.1. $f : D \to [0, +\infty]$ bir fonksiyon ve $D \subset \mathbb{R}^n_{++}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki iddialar denktir:

i. f fonksiyonu, $l \in D$, $c \in [0,+\infty]$ olmak üzere $c\psi_l : D \to [0,+\infty]$, fonksiyonlar ailesine göre soyut konvekstir;
ii. f fonksiyonu, D üzerinde artan ko-radyant fonksiyondur;
iii. $\forall\, l, x \in D$ için $f(l)\psi_l(x) \leq f(x)$'dir.

4.1.16. Artan ve ışınlar üzere konveks (ICAR) fonksiyonlar

$K \subset \mathbb{R}^n$ bir konik küme ve $f : K \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ olsun. Eğer f konveks bir fonksiyon ve sıfırdan başlayan ışın üzerine daraltılmışı bir değişkenli konveks fonksiyon ise, bu fonksiyona ışınlar üzere konveks fonksiyon denir. Farklı bir ifadeyle, her bir x ∈ K için,

$$f_x(t) = f(tx), t \geq 0$$

fonksiyonu konveks ise, $f : K \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonuna ışınlar üzere konveks fonksiyon denir ve ICAR ile gösterilir (Rubinov 2000).

Teorem 4.1.16.1 h fonksiyonlarının sınıfı H_L olsun,

$$h(x) = \langle \mathrm{l}, \mathrm{x} \rangle - \mathrm{c}$$

burada $\langle l, x \rangle$ min-tip fonksiyon ve $c \in \mathbb{R}$. Bir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ H_L-konveks olması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun alttan yarı sürekli ve ICAR fonksiyon olmasıdır (Rubinov 2000).

4.1.17. (α,m) – konveks fonksiyon

$f : [0,b] \to \mathbb{R}\ ve\ b > 0$ olsun. $\forall x, y \in [0,b]$, $t \in [0,1]$ ve $(\alpha, m) \in [0,1]^2$ için

$$f(tx + m(1-t)y) \leq t^\alpha f(x) + m(1 - t^\alpha)f(y)$$

şartı sağlanıyorsa 'f fonksiyonu (α,m)–konvekstir' denir (Miheşan1993, Bakula 2006). Burada $(\alpha, m) \in \{(0,0), (\alpha, 0), (1,0), (1, m), (1,1), (\alpha, 1)\}$ seçilirse, sırasıyla artan, α-strashaper, strashaped, m-konveks ve α-konveks fonksiyon sınıfları elde edilir.

4.1.18. h - konveks fonksiyon

Varošanec, h-konveks fonksiyonlar sınıfı adını verdiği negatif olmayan fonksiyonlar için yeni ve büyük bir sınıf tanımladı. Öyle ki bu sınıf literatürde iyi bilinen negatif olmayan konveks fonksiyonlar, ikinci anlamda s-konveks fonksiyonlar, Godunova-Levin fonksiyonlar ve P- fonksiyonları içerisine dahil etmiştir.

$h : J \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $f : I \to \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyonu $x, y \in I$, $\alpha \in (0,1)$ olsun

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + h(1-\alpha)f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna, h-konveks fonksiyondur veya $SX(h, I)$ sınıfına aittir denir (Varošanec 2007).

Bu eşitsizlik yön değiştirirse, bu durumda f fonksiyona h-konkav fonksiyon veya $SV(h\ ,I)$ sınıfına aittir denir. Eğer $h(\alpha) = \alpha$ alınırsa, bu takdirde tüm negatif olmayan konveks fonksiyonlar $SX\ (h\ ,I)$ sınıfına ve tüm negatif olmayan konkav fonksiyonlar $SV(h, I)$ sınıfına aittir.

4.1.19. tgs- konveks fonksiyon

$f\ :\ I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde $\forall u, v \in\ I$ ve $t \in (0,1)$ için

$$f\ (t\ u + (\ 1 - t)v\ ) \leq\ t\ \ (1 - t)\ [\ f(u) + f(v)]$$

eşitsizliği doğru ise f fonksiyona tgs - konveks fonksiyon denir. Eğer (-*f*), tgs konveks fonksiyon ise *f* fonksiyonu tgs - konkav fonksiyon olur (Tunç 2015).

4.1.20. Starshaped fonksiyon

$f\ :\ [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x \in [0, b]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx) \leq tf(x)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna starshaped fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 2000).

4.1.21. (k,h) – konveks fonksiyon

$k : (0,1) \to \mathbb{R},\ h : (0,1) \to \mathbb{R}$ verilen iki fonksiyon ve $D \subset X$ kümesi konveks küme olsun. $\forall\ x, y \in D$ ve $t \in (0,1)$ olmak üzere $f\ : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$f(k(t)x + k\ (1 - t)y)\ \leq\ h(t)\ f(x) + h(1 - t)\ f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonuna (k,h)-konveks fonksiyon denir. Uygun h ve k fonksiyonları için

$$f(k(t)x + k(1 - t)y)\ \leq\ h(t)f(x) + h(1 - t)f(y)$$

eşitsizliği, konveks, jensen-konveks, h-konveks, s-olricz konveks, s-breckner konveks, godunova levin, strashaped fonksiyonlar ile P-fonksiyonlarını ve alttoplamsal (subbadditive) dönüşümlerin ailesini üretir.

4.1.22. φ- konveks konksiyon

$f : [a, b]\ \to \mathbb{R}\ ,\ \varphi : [a, b] \to [a, b]$ fonksiyonları verilsin. $\forall x \in [a, b],\ y \in [a, b]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(t\ \varphi(x) + (1 - t)\ \varphi(y)) \leq t(f(\varphi(x)) + (1 - t)f(\varphi(y))$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna ye φ-konveks fonksiyon denir (Cristescu 2004).

4.1.23. φ_h - konveks fonksiyon

$h:(0,1)\to(0,\infty)$ bir fonksiyon ve $I\subset\mathbb{R}$ olsun. $f:I\to(0,\infty)$ fonksiyonu $\forall x,y\in I$ ve $t\in(0,1)$ için

$$f(t\,\varphi(x)+(1-t)\,\varphi(y))\ \leq\ h(t)\,f(\varphi(x))+h(1-t)\,f(\varphi(y))$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna φ_h-konveks fonksiyon denir. Eşitsizlik yön değiştirir ise f fonksiyonuna φ_h-konkav fonksiyon denir. f fonksiyonu $h(t)=\ t$, $h(t)=t^s$, $h(t)=\frac{1}{t}$ ve $h(t)=1$ için sırasıyla φ-konveks, φ_s – konveks, φ – Godunuva – Levin fonksiyonu ve φ – P-fonksiyonuna indirgenir (Sarıkaya 2012b).

4.1.24. log- φ – konveks fonksiyon

$[a,b]\subset\mathbb{R}$ olmak üzere $\varphi:[a,b]\to[a,b]$ bir fonksiyon ve $I\subset\mathbb{R}$ konveks küme olsun. $f:\ I\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\forall\ x,y\in I$ ve $t\in[0,1]$ için

$$f(t\,\varphi(x)+(1-t)\,\varphi(y))\leq[f\big(\varphi(x)\big)]^t\,[f\big(\varphi(y)\big)]^{1-t}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa log – φ -konveks fonksiyon olarak adlandırılır (Sarıkaya 2012c).

4.1.25. (h,m) – konveks fonskiyon

$h:J\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $\forall x,y\in\ [0,b]$, $m\in[0,1]$ ve $\alpha\in[0,1]$ olacak şekilde $f:[0,b]\to\mathbb{R}$ negatif olmayan f fonksiyonu

$$f(\alpha x+m(1-\alpha)y\,)\leq h(\alpha)\,f(x)+mh(1-\ \alpha)f(y)$$

şartını sağlıyorsa *f* fonksiyonuna (h,m)-konveks fonksiyonu denir (Özdemir 2011).

4.1.26. g – baskın konveks fonksiyon

$g:I\to\mathbb{R}$ konveks fonksiyon ve $f:I\to\mathbb{R}$ reel fonksiyon olsun.$\forall x,y\in I$ ve $\lambda\in[0,1]$ için *f* ve g fonksiyonları

$$|\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\ f(\lambda x+(1-\ \lambda)y)|\leq\ \lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)-g(\lambda x+(1-\lambda)y)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna g-baskın konveks fonksiyon denir (Dragomir and Ionescu 1990).

Lemma 4.1.26.1. $g:I\to\mathbb{R}$ konveks fonksiyon ve $f:\ I\to\ \mathbb{R}$ reel fonksiyon olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

i. *f* fonksiyonu *I* üzerinde g-baskın konveks fonksiyondur;
ii. g-f ve g+f fonksiyonları *I* üzerinde konveks fonksiyonlardır;
iii. $f=\frac{1}{2}$ *(h-k)* ve $g=\frac{1}{2}$ *(h+k)* şartlarını sağlayan *I* üzerinde tanımlı *h, k* gibi iki konveks fonksiyon vardır (Dragomir 2002).

4.1.27. (g,h) –baskın konveks fonksiyon

$h \neq 0,\ h : J \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon, $\forall x, y \in I$ ve $\lambda \in (0,1]$ olacak şekilde $g : I \to \mathbb{R}$ tanımlı bir h-konveks fonksiyon olsun. Eğer $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$|h(\lambda)f(x) + h(1-\lambda)f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)\, y)| \leq h(\lambda)g(x) + h(1-\lambda)g(y) - g(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna (g,h)-baskın konveks fonksiyon denir (Kavurmacı 2012).

4.1.28. (g , (α, m)) –baskın konveks fonksiyon

$g : [0,b] \to \mathbb{R}$ tanımlı bir (α ,m)-konveks fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y \in [0,b], \lambda \in [0,1]$ ve $(\alpha, m) \in [0,1]^2$ için $f : [0,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$|\lambda^\alpha f(x) + m(1-\lambda^\alpha)f(y) - f(\lambda x + m(1-\lambda)y)| \leq \lambda^\alpha g(x) + m(1-\lambda^\alpha)g(y) - g(\lambda x + m(1-\lambda)y)$$

şartını sağlıyorsa *f* fonksiyonuna (g,(α, m))-baskın konveks fonksiyon denir (Kavurmacı 2012).

4.1.29. Geometrik konveks fonksiyon

$f : I \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu verilsin. Eğer *f* fonksiyonu, $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(x^t y^{1-t}) \leq [f(x)]^t [f(y)]^{1-t}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna geometrik konveks fonksiyon denir (Zhang 2012).

4.1.30. s-Geometrik konveks fonksiyon

$f : I \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu için $\forall x, y \in I$ ve $s \in (0,1]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(x^t y^{1-t}) \leq [f(x)]^{t^s} [f(y)]^{(1-t)^s}$$

eşitsizliği doğru ise f fonksiyonuna s-geometrik konveks fonksiyon denir (Zhang 2012).

s=1 için, s-geometrik konveks fonksiyon tanımının geometrik konveks fonksiyon tanımına dönüşmektedir.

4.1.31. α – star s-konveks fonksiyon

$t, \alpha \in [0,1]$ olmak üzere $\forall x, y \in I$ için $f : I \subseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer

$$f(tx + (1-t)y) \leq t^s f(x) + \{(1-t)\alpha\}^s f(y)$$

eşitsizliği doğru ise *f* fonksiyonuna α-star s-konveks fonksiyon denir (Park 2010).

4.1.32. Harmonik konveks fonksiyon

$I \subset \mathbb{R} / \{0\}$ bir açık aralık $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere eğer, $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{xy}{tx + (1-t)y}\right) \leq tf(y) + (1-t)f(x)$$

eşitsizliği doğru ise f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 2000).

4.1.33. B-konveks fonksiyonlar

$U \subset \mathbb{R}^n$ ve $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere $f : U \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ fonksiyonu $\forall x, y \in U$ için

$$f(\lambda x \vee y) \leq \lambda f(x) \vee f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyor ise f fonksiyonuna B-konveks fonksiyon denir (Adilov 2011).

4.1.34. B^{-1}konveks fonksiyonlar

$U \subset \mathbb{R}^n_{++}$ ve $\lambda \in [1, +\infty)$ olmak üzere $f : U \to \mathbb{R}^n_{++}$ fonksiyonu $\forall x, y \in U$ için

$$f(\lambda x \wedge y) \leq \lambda f(x) \wedge f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyor ise f fonksiyonuna B^{-1}- konveks fonksiyon denir (Adilov 2011, Yeşilce 2016).

4.2. Bazı Konveks Fonksiyon Sınıflarının Hiyerarşisi

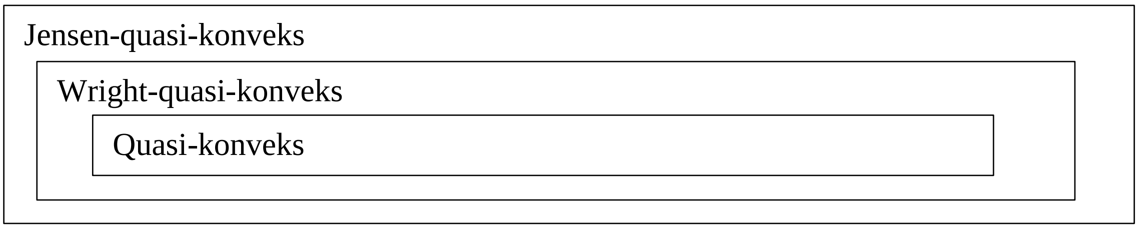
Fonksiyonlar teorisi çalışmalarında yeni sonuçlar ve genelleştirmeler elde edebilmek adına fonksiyon şartlarında birtakım kısıtlamalar yapmak, ya da fonksiyona ek özellikler katmak gerekmektedir. Çünkü fonksiyonlar aynı anda birçok özelliği sağlayabilmekte, veya bir fonksiyon sınıfı başka bir fonksiyon sınıfıyla bazı özellikleri yönüyle benzeyebilmektedir. Yapılmış çalışmalarda farklı konveks fonksiyonlar için çeşitli integral eşitsizlikleri ispatlanabilirken, bu eşitsizliklerin belli durumlarda başka konveks fonksiyonlar için de geçerli olduğu görülmektedir. Buradan hareketle konveks fonksiyonlar arasında, özellikleri açısından, bir hiyerarşik durum olduğu sonucuna ulaşabilmekteyiz.

Fakat bu hiyerarşide tüm konvekslik sınıflarını bir arada değerlendirebilmek mümkün olmadığından bazı sınıflar aralarındaki ilişki, tanımları ve özellikleri yardımıyla gösterilebilir.

Teorem 4.2.1. I ⊆ ℝ olmak üzere, Quasi-konveks fonksiyonlar sınıfı, Wright-quasi-konveks fonksiyonlar sınıfı ve Jensen-quasi-konveks fonksiyonlar sınıfı QC(I), WQC(I), JQC(I) ile gösterilirse;

$$QC(I) \subset WQC(I) \subset JQC(I)$$

olduğu görülmektedir (Dragomir and Pearce 1998).

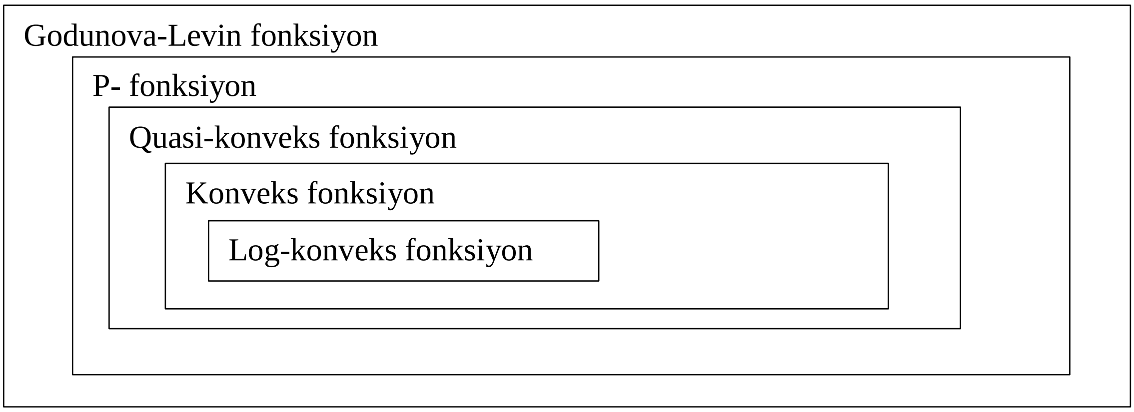


Şekil 4.2.1. Jensen Quasi konveks fonksiyon, Wright Quasi konveks fonksiyon, Quasi konveks fonksiyon arasındaki ilişki

Teorem 4.3.2. I ⊆ ℝ olmak üzere, Log-konveks fonksiyonlar sınıfı, Konveks fonksiyonlar sınıfı, Quasi-konveks fonksiyonlar sınıfı, P-fonksiyonlar sınıfı ve Godunova-Levin fonksiyonlar sınıfı L(I), C(I), QC(I),P(I),Q(I) ile gösterilirse;

$$L(I) \subset C(I) \subset QC(I) \subset P(I) \subset Q(I)$$

olduğu görülmektedir (Kavurmacı 2012).



Şekil 4.2.2. Godunova-Levin, P fonksiyon, Quasi konveks fonksiyon, Konveks fonksiyon arasındaki ilişki

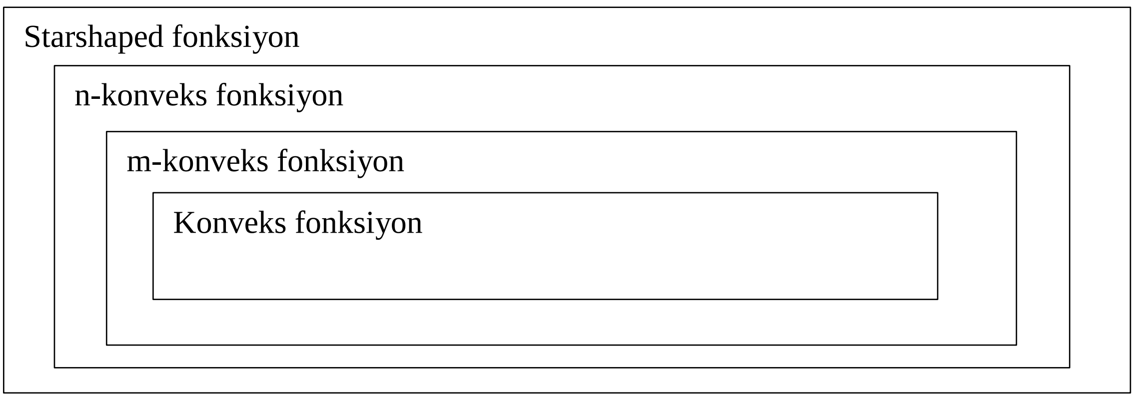
Lemma 4.2.1. Eğer f fonksiyonu m-konveks sınıfına dahil ise *f* fonksiyonu starshaped fonksiyondur (Toader 1988).

Lemma 4.2.2. Eğer f fonksiyonu m-konveks fonksiyon ve $0 \leq n < m \leq 1$ ise f fonksiyonu n-konveks fonksiyondur (Toader 1988).

Yukarıdaki Lemmalar yardımıyla; $0 \leq n < m \leq 1$ olmak üzere, konveks fonksiyonlar sınıfı, m-konveks fonksiyonlar sınıfı, n-konveks fonksiyonlar sınıfı ve starshaped fonksiyonlar sınıfı sırasıyla K(b), $\mathrm{K_m}$(b), $\mathrm{K_n}$(b), $\mathrm{S^*}$(b) ile gösterilirse;

$$K(b) \subset K_m(b) \subset K_n(b) \subset S^*(b)$$

olduğu görülmektedir.



Şekil 4.2.3. Starshaped fonksiyon, n-konveks fonksiyon, m-konveks fonksiyon arasındaki ilişki

h-konveks fonksiyon tanımından açıkça görüldüğü üzere eğer *h(t)*= t seçilirse negatif olmayan konveks fonksiyonlar veya eşitsizliğin yön değiştirmesi durumunda negatif olmayan konkav fonksiyonlar; *h(t)*= $\frac{1}{t}$ seçilirse Q(I) sınıfına ait fonksiyonlar; *h(t)=1* seçilirse P(I) sınıfına ait fonksiyonlar elde edilir. Bu bilgiler ışığında h(t) fonksiyonunun bazı özel değerleri için;

$$C(I) \subset SX(h,I), \qquad P(I) \subset SX(h,I)$$

yazılabilir. Burada h fonksiyonu negatif olmayan fonksiyon olduğu için negatif olmayan konveks fonksiyonlar SX(h,I) sınıfının alt kümesi olduğu söylenebilir (Varošanec 2007).

4.3. B-Konvekslik

4.3.1. B-konveks kümeler

B-konvekslik için, $\forall r \in N$ ve $\Phi_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\Phi_r\,(x_1, \dots, x_n) = (x_1^{2r+1}, \dots, x_n^{2r+1})$ homeomorfizmi ele alınır. Bu hemomorfizm aracılığı ile B-konveks ve B^{-1} konveks küme tanımlanmış ve devamında B-konveks kümelerin özelliklerine değinilerek üzerinde çalışmalar gerçekleştirilmiştir (Briec, Horvath 2004).

Tanım 4.3.1.1. $A \neq \emptyset \; ve \; A = \{x^{(1)}, \dots, x^{(m)}\} \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere.

$$Co^r(A) = \left\{ \Phi_r^{-1}\left(\sum_{i=1}^{m} t_i \Phi_r\,(x^{(i)})\right) \middle| \, t_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} t_i = 1 \right\}$$

kümesi A kümesinin r-konveks kabuğudur denir (Adilov 2011).

Tanım 4.3.1.2. A $\neq \emptyset$, sonlu bir $A = \{x^{(1)}, \dots, x^{(m)}\} \subset \mathbb{R}^n$ kümesi için

$$Co^{\infty}(A) = \lim_{r \to \infty} Co^r(A)$$

kümesine *A* kümesinin B-konveks kombinasyonu denir (Kuratowski 1968).

Tanım 4.3.1.3. Bir $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin ∀ sonlu alt kümesinin B-konveks kombinasyonu da *A*'nın elemanı ise *A* kümesine B-konveks küme denir (Yeşilce 2016).

Teorem 4.3.1.1.

i. $\emptyset, \mathbb{R}^n$ ve tek noktadan oluşan kümeler B-konvekstir.
ii. $I \neq \emptyset$ bir indis kümesi ve $\{L_\lambda \mid \lambda \in I\}$ kümesi B-konveks kümelerde bir aile olmak üzere, $\bigcap_{\lambda} \mathrm{L}_\lambda$şeklindeki kesişim kümesi de B − konveks olur.
iii. $\{L_\lambda \mid \lambda \in \mathrm{X}\}$ bir B-konveks kümeler ailesi olmak üzere, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in I$ için $L_{\lambda_1} \cup L_{\lambda_2} \subset L_{\lambda_3}$ koşulunu sağlayan bir $\lambda_3 \in X$ varsa $\bigcup_{\lambda} \mathrm{L}_\lambda$ birleşimi kümesi de B-konveks olur.

Konveks analizde önemli uygulamalardan biri olan ayırma teoremleri için kullanılan yarı-uzay kavramını B-konvekslik için de tanımlayalım.

Tanım 4.3.1.4. $A \subset \mathbb{R}^n$ B-konveks bir küme olmak üzere eğer $A' = \mathbb{R}^n \setminus A$ de B-konveks ise A kümesine B-konveks yarı-uzay denir (Yeşilce 2016).

Tanım 4.3.1.5. $A \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ de, A kümesini kapsayan tüm B-konveks kümelerin kesişimleri kümesine A kümesinin B-konveks kabuğu denir ve B[A] ile gösterilir (Yeşilce 2016).

Eğer $A \subset \mathbb{R}^n_+$ sonlu küme ve $A \neq \emptyset$ ise A'nın B-konveks kombinasyonu

$$Co^{\infty}(A) = \lim_{r\to\infty} Co^r(A)\left\{\bigvee_{i=1}^{m} t_i x^{(i)} | t_i \in [0,1], max_{1\le i\le m}\{t_i\} = 1\right\}$$

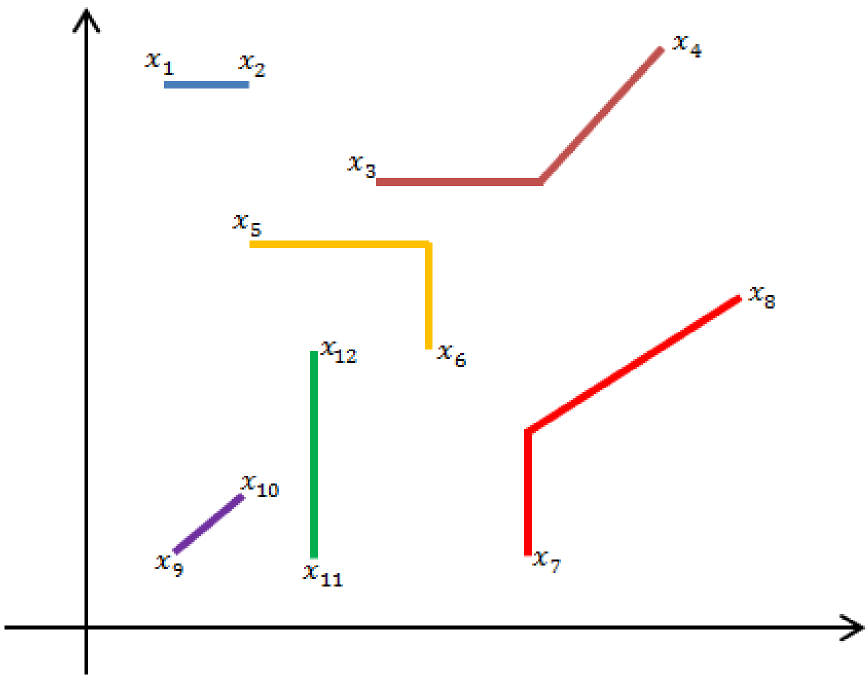
biçiminde gösterilebilir (Briec Horvath 2004).

$\mathbb{R}^2_+$ de iki noktanın B-konveks kombinasyonu olan $Co^{\infty}(\{x_1, x_2\})$ kümesini aşağıdaki noktalar için oluşturalım.

$x_1 = (1,10)$, $x_2 = (2,10)$, $x_3 = (4,8)$, $x_4 = (11,11)$

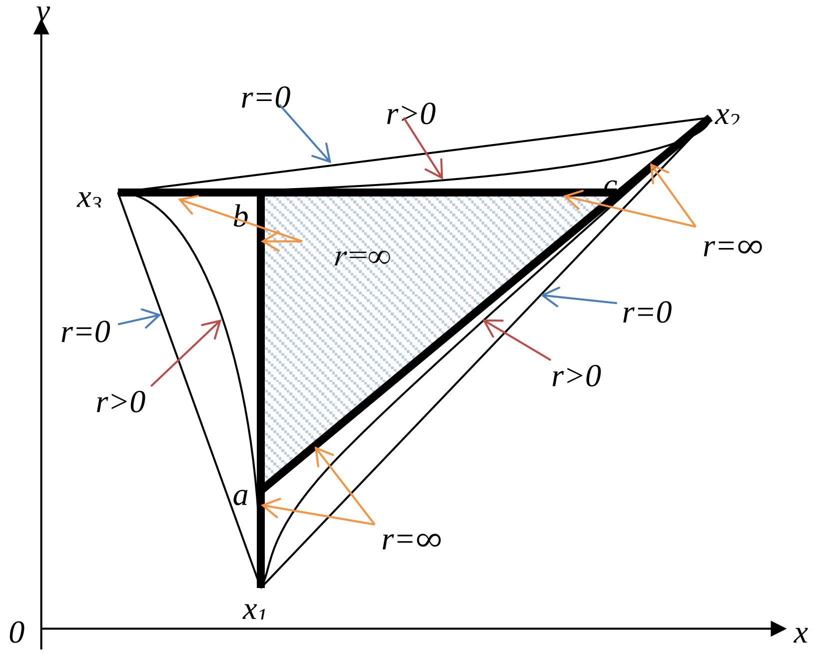
$x_5 = (2,7)$, $x_6 = (5,5)$, $x_7 = (8,1)$, $x_8 = (12,6)$

$x_9 = (1,1)$, $x_{10} = (2,2)$, $x_{11} = (3,1)$, $x_{12} = (3,5)$



Şekil 4.3.1.1. İki nokta için B-konveks kombinasyonunun gösterilişi

x_1, x_2, x_3 noktaları için $Co^{\infty}(\{x_1, x_2\})$ kümesi $[x_1, a, x_2]$ kırık doğru, $Co^{\infty}(\{x_1, x_3\})$ kümesi $[x_1, b, x_3]$ kırık doğru ve $Co^{\infty}(\{x_2, x_3\})$ kümesi ise $[x_2, c, x_3]$ kırık doğrudur. r = 0 değerinde x_1, x_2, x_3 noktalarının klasik konveks kabuğu üçgen karşımıza çıkarken, $r \to \infty$ olduğunda üçgenin kenarları içeri doğru bükülmekte ve bu noktaların B-konveks kabuğu oluşmaktadır (Yeşilce 2016).



Şekil 4.3.1.2. x_1, x_2, x_3 noktaları için B-konveks kombinasyon oluşumu

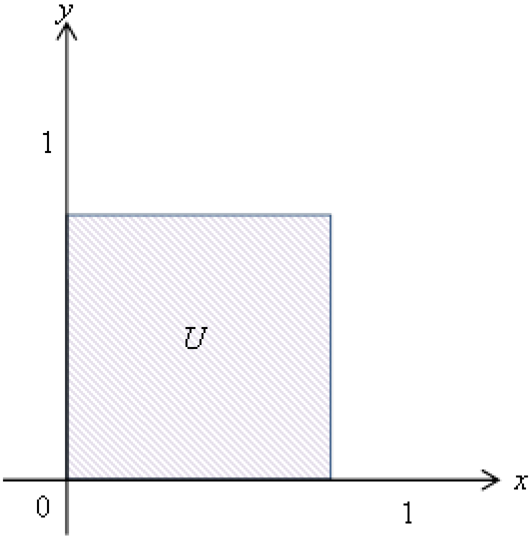
Tanım 4.3.1.6. A $\subset$ $\mathbb{R}^n_+$ ve m $\geq$ 2 için $x^{(1)}, \dots, x^{(m)} \in A$, $\alpha_i > 0$ ve $max(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = 1$

$$\bigvee_{i=1}^{m} \alpha_i x^{(i)} \in A$$

sağlanıyorsa A kümesine B-konveks küme denir (Briec 2004).

$\mathbb{R}^n_+$'de B-konveks küme tanımına denk olan aşağıdaki tanımı vermek mümkündür.

Tanım 4.3.1.7. Bir $A \subset \mathbb{R}^n_+$ kümesinden seçilen $\forall x_1, x_2 \in A$ ve $\forall$ $t \in [0,1]$ için $tx_1, x_2 \in A$ oluyorsa A kümesine B-konveks küme denir (Yeşilce 2016).

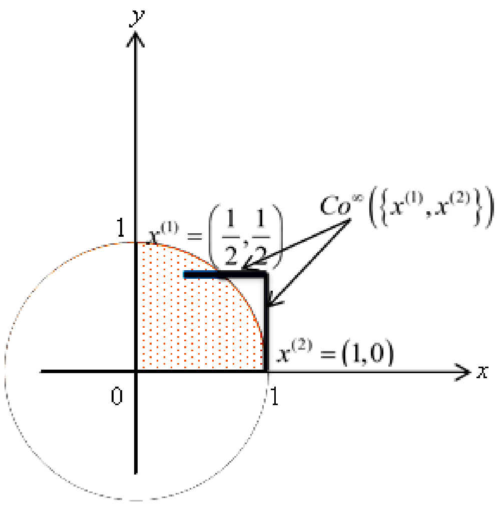


Şekil 4.3.1.3. $U = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ kümesi

Klasik anlamda konveks $U = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ kümesi B-konveks bir kümedir.

Gerçekten; herhangi $x^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right)$, $x^{(2)} = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right) \in U$ ve $\forall t \in [0,1]$ için $0 \leq tx_1^{(1)} \vee x_1^{(2)} \leq 1$ ve $0 \leq tx_2^{(1)} \vee x_2^{(2)} \leq 1$ olacağından $tx^{(1)} \vee x^{(2)} \in U$ olur. Fakat konveks bir küme daima B-konveks olmayabilir.

Gerçekten; $V = \{(x, y): x, y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\} \subset R_+^2$ kümesini incelersek $x^{(1)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $x^{(2)} = (1,0) \in V$ ve $t \in [0,1]$ için $\mathrm{t}\mathrm{x}^{(1)} \vee \mathrm{x}^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \vee (1,0) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$, $1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} > 1$ olduğundan $\mathrm{t}\mathrm{x}^{(1)} \vee \mathrm{x}^{(2)} \notin$ V, yani V kümesi B-konveks değildir.



Şekil 4.3.1.4. $V = \{(x, y) : x, y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}_+^2$ kümesi

Bunlarla birlikte Şekil 4.3.1.2.'de verilen $Co^{\infty}(\{x_1, x_2, x_3\})$ B-konveks kümesinin konveks küme olmadığı açıktır. Bu veriler ışığında B-konveks kümeler ve konveks kümelerin birbirini kapsamadığı söylenebilir (Yeşilce 2016).

Teorem 4.3.1.2. $\mathbb{R}^n_+$ da B-konveks bir kümenin kapanışı da B-konvekstir .

Lemma 4.3.1. $A \subset \mathbb{R}^n_+$ bir B-konveks küme olmak üzere,

$$U_\infty (A, \delta) \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n_+ \,|\exists y \in A, \left\|x - y\right\|_\infty < \delta$$

kümesi de B-konvekstir.

$U_\infty (A, \delta)$ B-konveks bir kümenin δ-komşuluğu için B-konveks olması önermesinden yararlanarak, aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 4.3.1.3. $\mathbb{R}^n_+$'da B-konveks bir kümenin içi de B-konveks kümedir ve $\mathbb{R}^n_+$ kümesini keyfi alınan bir $z \in \mathbb{R}^n_{++}$ noktası ile $n+1$ parçaya ayırmak mümkündür (Briec 2005) ;

$N_0(z) \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n_{++} |\, x_i \leq z_i, i = \overline{1,n}\}$

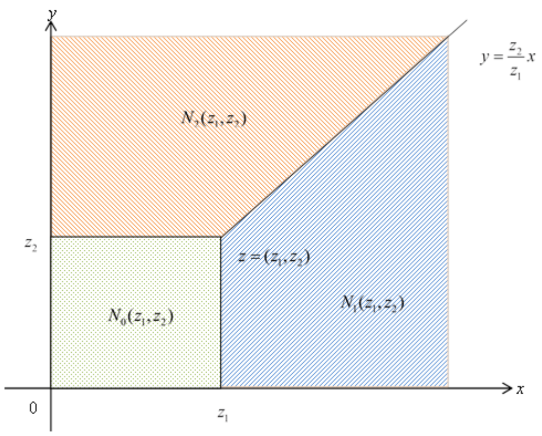
$N_j(z) \coloneqq \{\, x \in \mathbb{R}^n_{++} \,|z_j \leq x_j \; ve \; \forall \, i = \overline{1,n} \; için \; x_i z_j \leq z_i x_j\}, j = \overline{1,n}$

$N_0(z)$ kümesi kapalı, konveks ve radyant bir küme, $N_j(z)$ $j = \overline{1,n}$ kümeleri ise, kapalı, konveks ve ko-radyant kümelerdir.

$j \in (0,1, \dots, n\}$ için $M_j(z) \coloneqq \mathbb{R}^n_{++} \setminus N_j(z)$ ve $U_j(z) \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n_+ |\, z \in N_j(x)\}$ olsun.

Teorem 4.3.1.6. $\forall\, j = \overline{0,n}$ için $N_j(z)$ kümeleri kapalı ve B-konveks, $M_j(z)$ kümeleri ise açık ve B-konveks kümelerdir. Bu sebepten, $N_j(z)$ ve $M_j(z)$ B-konveks yarı-uzaylarıdır (Briec, Horvath 2008).

Herhangi bir $z \in R^2_{++}$ noktası için R^2_+ kümesinde oluşan B-konveks yarı-uzayların biçimleri aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 4.3.1.5. $\mathbb{R}^2_+$ kümesi için B-konveks yarı-uzaylar

4.3.2. B-konveks fonksiyonlar

Tanım 4.3.2.1. $U \subset \mathbb{R}^n$ ve $f : U \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ olmak üzere eğer epif kümesi B-konveks ise *f* fonksiyonuna B-konveks fonksiyon denir (Yeşilce 2016).

Teorem 4.3.2.1. $U \subset \mathbb{R}^n$ ve $f : U \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ olsun. f fonksiyonunun B-konveks olması için gerek ve yeter koşul B-konveks olması ve $\forall\ x, y \in U,\ \lambda \in [0,1]$ için $f(\lambda x \vee y) \leq \lambda f(x) \vee f(y)$ eşitsizliğinin doğru olmasıdır (Yeşilce 2016).

Teorem 4.3.2.2. (B-konveks fonksiyonlar için Jensen Eşitsizliği)
$U \subset \mathbb{R}^n$ ve $f : U \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ olsun. *f* fonksiyonunun B-konveks olması için gerek ve yeter koşul U kümesinin B-konveks olması ve $i = \overline{1,m}$ için $\forall x_i \in U$ ve $\forall \lambda_i \in [0,1]$, $\max\limits_{i=\overline{1,m}}\{\lambda_i\} = 1$ için $f\left(\mathop{\vee}\limits_{i=1}^{m} \lambda_i x_i\right) \leq \mathop{\vee}\limits_{i=1}^{m} \lambda_i f(x_i)$ eşitsizliğinin doğru olmasıdır (Yeşilce 2016).

$U \subset \mathbb{R}_+^n$'da fonksiyonun B-konkavlığının tanımı aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 4.3.2.2. $f : U \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ olsun. $hyp^+ f \coloneqq \{(x,\mu) | x \in U, \mu \in \mathbb{R}_+, \mu \leq f(x)\}$ kümesi B-konveks ise f fonksiyonuna B-konkav fonksiyon denir (Yeşilce 2016).

Teorem 4.3.2.3. $U \subset \mathbb{R}_+^n$, $f : U \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ olsun. f fonksiyonun B-konkav olması için gerekli ve yeterli koşul U kümesinin B-konveks olması ve $\forall\, x, y \in U$ ve $\lambda \in [0,1]$ için, $\lambda f(x) \vee f(y) \leq f(\lambda x \vee y)$ eşitsizliğinin doğru olmasıdır (Yeşilce, 2016).

Tanım 4.3.2.3. Aynı anda B-konveks ve B-konkav olan fonksiyona B-afin fonksiyon denir (Yeşilce 2016).

Teorem 4.3.2.4. $U \subset \mathbb{R}_+^n$, $f : U \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ olsun. f fonksiyonunun B-afin olması için gerekli ve yeterli koşul U kümesinin B-konveks olması ve $\forall\, x, y \in U$, $\lambda \in [0,1]$ için, $f(\lambda x \vee y) = \lambda f(x) \vee f(y)$ eşitliğinin doğru olmasıdır (Yeşilce 2016).

Teorem 4.3.2.5. $U \subset \mathbb{R}_+^n$ ve $f : U \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ olsun. Bu durumda *f* fonksiyonunun B-konkav olması için gerek ve yeter koşul $i = \overline{1,m}$ olmak üzere $\forall x_i \in U$ ve $\forall \lambda_i \in [0,1]$, $\max\limits_{i=\overline{1,m}}\{\lambda_i\} = 1$ için $\mathop{\vee}\limits_{i=1}^{m} \lambda_i f(x_i) \leq f\left(\mathop{\vee}\limits_{i=1}^{m} \lambda_i x_i\right)$ eşitsizliğinin doğru olması ve U kümesinin B-konveks olmasıdır. (Yeşilce 2016).

4.4. B-Konveks Fonksiyon Örnekleri Ve B-Konveks Fonksiyon Sınıfı İle Klasik Konveks Fonksiyonlar Arasındaki İlişki

Örnek 4.4.1. $U = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}_+^2 | z_1 \geq z_2\} \in \mathbb{R}_+^2$ olmak üzere $f: U \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, $f(z) = f(z_1, z_2) = z_1^n - z_2^n,\ n \in N^+$ fonksiyonlarını ele alalım. Bu fonksiyonların $\forall\, n \in N^+$ için B konveks olduğunu gösterelim. Yani ;

$$x = (x_1, x_2) \in U,\ \ y = (y_1, y_2) \in U\ ve\ \lambda\ \in [0,1]\ için \quad f(\lambda x\ \vee\ y)\ \leq\ \lambda f(x)\ \vee\ f(y)$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim.

$$f(\lambda x\ \vee\ y) =\ f\big(\lambda(x_1, x_2)\ \vee (y_1, y_2)\big) = f(\lambda x_1 \vee y_1, \lambda x_2 \vee y_2) = (\lambda x_1 \vee y_1)^n - (\lambda x_2 \vee y_2)^n$$

Aşağıdaki dört durum söz konusudur.

a) $\lambda x_1 \vee y_1 = \lambda x_1,\ \lambda x_2 \vee y_2 = \lambda x_2$ olabilir. Bu durumda

$$f(\lambda x \vee y) = (\lambda x_1)^n - (\lambda x_2)^n = \lambda^n(x_1^n - x_2^n) < \lambda\,(x_1^n - x_2^n)$$
$$\leq max\{\lambda\,(x_1^n - x_2^n), y_1^n - y_2^n\} = \lambda f(x) \vee f(y)$$

olur;

b) $\lambda x_1 \vee y_1 = \lambda x_1,\ \lambda x_2 \vee y_2 = y_2$ olduğunda

$$f(\lambda x \vee y) = (\lambda x_1)^n - y_2^n \leq (\lambda x_1)^n - (\lambda x_2)^n = \lambda^n(x_1^n - x_2^n) \leq \lambda\,(x_1^n - x_2^n)$$
$$\leq max\{\lambda\,(x_1^n - x_2^n), y_1^n - y_2^n\} = \lambda f(x) \vee f(y)$$

eşitsizliği sağlanır;

c) $\lambda x_1 \vee y_1 = y_1,\ \lambda x_2 \vee y_2 = \lambda x_2$ ise,

$$f(\lambda x \vee y) = y_1^n - (\lambda x_2)^n \leq y_1^n - y_2^n \leq max\{\lambda\,(x_1^n - x_2^n), y_1^n - y_2^n\} = \lambda f(x) \vee f(y)$$

elde edilir;

d) $\lambda x_1 \vee y_1 = y_1, \lambda x_2 \vee y_2 = y_2$ durumunda ise ,

$$f(\lambda x \vee y) = y_1^n - y_2^n \leq max\{\lambda\,(x_1^n - x_2^n), y_1^n - y_2^n\} = \lambda f(x) \vee f(y)$$

olur.

Böylece, f fonksiyonunun B-konveks olduğu gösterilmiş olur. Şimdi bu fonksiyonların klasik konveks olup olmadığını inceleyelim.

n = 1 durumunda, $f(z) = z_1 - z_2$ fonksiyonu afin bir fonksiyon olduğundan konvekstir (aynı zamanda konkavdır).

$n \geq 2$ durumlarını ele alalım. $f(z) = z_1^n - z_2^n$ fonksiyonu için ;

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} = n z_1^{n-1}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z_2} = n z_2^{n-1} \ \ ve$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_1} = n(n-1)z_1^{n-2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_1} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_2} = -n(n-1)z_2^{n-2}$$

olur. Yani, Hess matrisi

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n(n-1)z_1^{n-2} & 0 \\ 0 & -n(n-1)z_2^{n-2} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu Hess matrisisinin birinci baş minör determinantı $n(n-1)z_1^{n-2} \geq 0$, ikinci baş minör determinantı $|H| = -n^2(n-1)^2(z_1 z_2)^{n-2} \leq 0$ olduğundan bu fonksiyon konveks değildir.

Örnek 4.4.2. $f: \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(z) = z_1^n + z_2^n,\ n \in N$ fonksiyonları klasik anlamda konveks fonksiyonlardır. Gösterelim;

n = 1 durumu için, $f(z) = z_1 + z_2$ fonksiyonu bir afin fonksiyon olduğundan konveks olduğu açıktır.

$n \geq 2$ durumunda, f fonksiyonunun Hess matrisi

$$H = \begin{bmatrix} n(n-1)z_1^{n-2} & 0 \\ 0 & n(n-1)z_2^{n-2} \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Bu matris pozitif yarı tanımlı olduğundan (Teorem 3.1.8) f fonksiyonu konvekstir.

Şimdi de bu fonksiyonun B-konveksliğini inceleyim. Bu fonksiyon B-konveks değildir. Gerçekten, x = (1,5), y = (5,1) ve λ = 1 olursa;

$f(\lambda x \vee y) = f\big((1,5) \vee (5,1)\big) = f(5,5) = 2 \cdot 5^n$

λf(x) ∨ f(y) = f(1,5) ∨ f(5,1) = $(1^n + 5^n) \vee (5^n + 1^n)$ = 1+ 5^n

olur. Yani, ∀ n ∈ N^+ için f fonksiyonu B-konveks değildir.

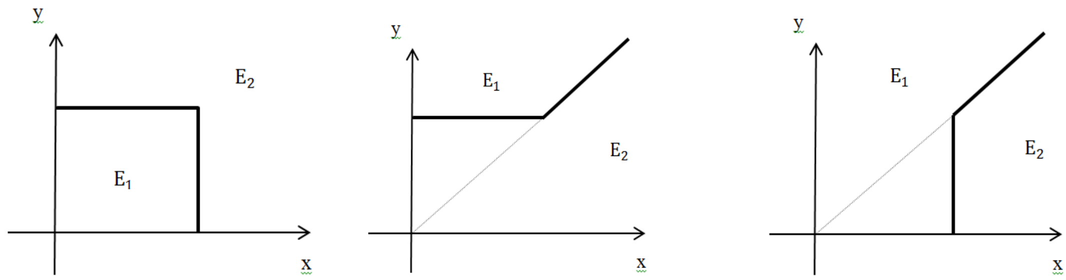
Bu örnekler dikkate alınırsa, B-konveks fonksiyonlar kümesi B, konveks fonskiyonlar kümesi C olmak üzere, bu iki fonksiyon kümesi için aşağıdakiler yazılabilir.

i. $B \cap C \neq \emptyset$ (Örnek 4.4.1., n=1 durumu)
ii. $B \not\subset C$ (Örnek 4.4.1., n ≥2 durumu)
iii. C ⊄ B (Örnek 4.4.2.)

Yani, B-konveks fonksiyonlar kümesi ile Klasik konveks fonksiyonlar kümesinin kesişimi boş değildir ve biri diğerini kapsamıyor.

4.5. $\mathbb{R}_+$'da Tanımlı B-Konveks Fonksiyonların Elementer Fonksiyonlar Ailesi

Şekil 4.3.1.5.'de görüldüğü gibi $\mathbb{R}^2_+$ uzayı üç şekilde iki B-konveks kümeye (yarım uzaya) ayrılabilir:



Şekil 4.5.1. $\mathbb{R}^2_+$ uzayının iki B-konveks kümeye ayrılış biçimleri

Bu bilgilere dayanarak $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$bir değişkenli B-konveks fonksiyonlar için elementer fonksiyonlar ailesini bulabiliriz. Bu fonksiyonlar ailesi, aşağıda verilen üç türlü fonksiyonlar ailesinin birleşimidir.

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere ;

i. $h_1^{\alpha,\beta} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, \quad h_1^{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \alpha\ , & 0 \le x \le \beta \\ 0\ , & \beta < x < \infty \end{cases}$

ii. $h_2^{\alpha,\beta} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, \quad h_2^{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \alpha\ , & 0 \le x \le \beta \\ \frac{\alpha}{\beta} x\ , & \beta < x < \infty \end{cases}$

iii. $h_3^{\alpha,\beta} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, \quad h_3^{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} 0\ , & 0 \le x \le \beta \\ \frac{\alpha}{\beta} x\ , & \beta < x < \infty \end{cases}$

Yani, B-afin fonksiyonlar ailesini H ile gösterirsek,

$$H = \bigcup_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}_+} \{ h_1^{\alpha,\beta}, h_2^{\alpha,\beta}, h_3^{\alpha,\beta} \}$$

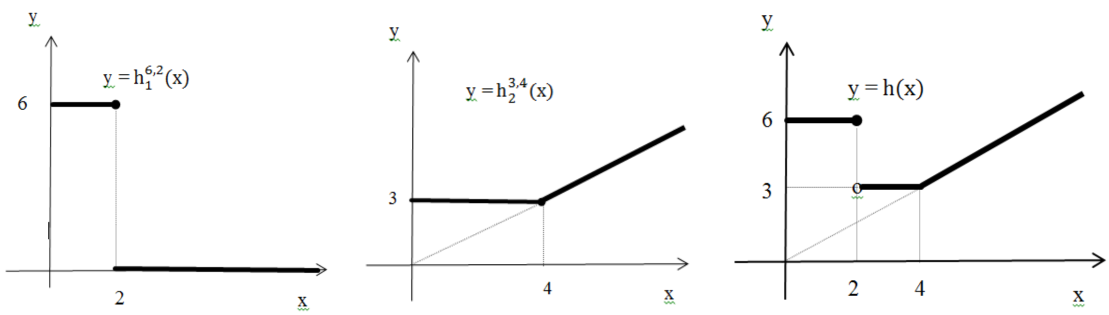
olur.

$\forall h \in H$ için $epih$ B-konveks olduğundan H'ın her elemanı birer B-konveks fonksiyondur. H kümesinden olan fonksiyonların supremumları da birer B-konveks fonksiyonlardır.

Örneğin:

$h_1^{6,2}\, ve\ h_2^{3,4} fonksiyonlarının\ supremumu\ h(x) = \begin{cases} 6, & 0 \le x \le 2 \\ 3, & 2 \le x \le 4 \\ \frac{x}{2}, & 4 \le x \le \infty \end{cases}$ şeklindedir

ve B-konveks fonksiyondur.



Şekil 4.5.2. Supremum Fonkiyonun B-konveksliği

Tersi de doğrudur. Bir değişkenli f fonksiyonu B-konveks ise, öyle $U \subset H$ fonksiyonlar kümesi vardır ki

$$f(x) = \sup_{h \in U} h(x)$$

doğrudur.

5. SONUÇLAR

Soyut konvekslik ile ilgili çalışmalar gün geçtikçe daha çok önem taşımaktadır. Bu güne kadar farklı matematikçilerin bu alanda çok sayıda makaleleri, kitapları yayınlanmış, tezler savunulmuştur. Makale, kitap ve tezlerin büyük bir kısmını kapsayan literatür taraması yapılan bu tezde:

1. Bu güne kadar belli olan soyut konvekslik sınıfları ve aralarındaki ilişkiler araştırılarak özetlenmiştir.
2. B-konveks fonksiyonlar ayrıca ele alınmış ve daha ayrıntılı araştırılmıştır.
3. Verilmiş B-konveks fonksiyon örnekleri daha geniş fonksiyon ailesini kapsıyor ve Yeşilce'de verilen örnekleri de içermektedir.
4. Bu örnekler üzerinden de B-konveks ve klasik konvekslik arasındaki ilişki incelenmiştir.
5. Tek değişkenli B-konveks fonksiyonlar için Elementer fonksiyonlar ailesi bulunmuş ve bu aile üzerinden B-konveks fonksiyonlar incelenmiştir.
6. Böylece, günümüzdeki gibi belli olan soyut konvekslik sınıfları ve arasındaki ilişkiler özetlenip bir araya getirilerek, bu alanda çalışan araştırmacılara bir yardımda bulunulmuştur. Ayrıca, $\mathbb{R}_+^2$ de verilen B-konveks fonksiyon örnekleri ve $\mathbb{R}_+$ da tanımlı B-konveks fonksiyonlar için bulunan B-afin fonksiyonlar ailesi, B-konveks fonksiyonların araştırılmasına önemli bir katkı sağlamıştır.

Tezdeki araştırmalar doğrultusunda daha neler yapabiliriz?

1. Bazı soyut konvekslik sınıfları arasında ilişkiyi inceleyen araştırmacılar diğer soyut konvekslik sınıfları arasındaki ilişkiyi de inceleyebilir.
2. B-konvekslik ile ilgili daha farklı örnekler bulunabilir ve bu örnekler yardımıyla, klasik konvekslik sınıflarında olduğu gibi, diğer soyut konvekslik sınıfları ile B-konvekslik arasındaki ilişki araştırılabilir.
3. B-konveks fonksiyonlar için yapılan incelemeler (bulunan örnekler ve B afin fonksiyonlar) B^{-1}-konveks fonksiyonlar için de yapılabilir.
4. Tek değişkenli B konveks fonksiyonlar için bulunan Elementer fonksiyon ailesi n değişkenli fonksiyonlar için de genelleştirilebilir.
5. Yeni konvekslik sınıflarının bulunması üzerinde çalışılabilir.

6. KAYNAKLAR

Adilov, G. ve Rubinov, A., 2006. B-Convex Sets and Functions. Numerical Functional Analysis and Optimization, (3-4), 237-257.

Adilov, G. ve Yesilce, I., 2010. Some Inequalities for L(j)-convex Functions. Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications Proceeding Book ,19-24.

Adilov, G., 2011. Increasing Co-radiant Functions and Hermite-Hadamard Type Inequalities. Mathematical Inequalities and Applications, 14, 1, 45-60.

Avriel, M., 1972. r-convex Functions. Mathematical Programming, 2, 309-323

Bakula, M., Pečarić, J., Ribicic, M., 2006. Companion inequalities to Jensen's inequalityfor m-convex and (α,m)-convex functions, J Inequal Pure Appl Math. 7(5), Art. (194).

Beckenbach, E. F.; Bellman, R., 1961 Inequalities, Springer, Berlin,. 198 pp.

Briec, W.; Horvath, C. D., 2004. B-convexity. Optimization, 53, 103-127.

Briec W.; Horvath, C. D., 2008 Nash points, Ky Fan Inequality and Equilibria of Abstract Economies in Max-Plus and B-convexity. J. Math. Anal. Appl., 341, (1), 188–199.

Cristescu, G., 2004. Hadamard type inequalities for φ-convex functions, Analele University din Oradea.

Değer Ö., (2012), 'Konveks Analize Giriş' , özkandeger blog spot. Google search web. http://ozkandeger.blogspot.com/p/konveks-analize-giris.html [son erişim tarihi 28/05/2019]

Dragomir, S. and Ionescu N., 1990. On some inequalities for convex-dominated functions. Anal. Num. Theor. Approx., 19, 21-28.

Dragomir, S. S.; Pecaric, J. E.; Presson, L. E., 1995. Some Inequalities of Hadamard Type. Soochow J. Of Math., 21, 335-341.

Dragomir, S. S.; Pearce, C. E. M., 2000. Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications, RGMIA Monographs, Victoria University [ON-LINE:http://rgmia.vu.edu.au/monographs],.

Dragomir, S., 2002. On Some New Inequalities of Hermite-Hadamard type for m-Convex Functions. Tamkang J. of Math., 33 (1), Spring, 45-55.

Godunova, E. K.; Levin, V. I., 1985. Inequalities For Functions of a Broad Class That Contains Convex, Monotone and Some Other Forms of Functions. Numerical Mathematics and Mathematical Physics (Moskov. Gos. Ped. Inst, Moscow), 166, 138–142 (in Russian).

Greenberg, H.J. and Pierskalla, W.P., 1970. A review of quasi convex functions. Reprinted from Operations Research, 19, 7.

Hudzik, H.; Maligranda, L., 1994. Some remarks on s−convex functions. Aequationes Math., 48, 100-111.

Hardy, G., Littlewood, J.E., Polya, G., 1952. Inequalities. 2nd Ed., Cambridge University Press, 324, United Kingdom.

Ion, D.A., 2007. Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions. Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser., 34, 82-87.

Jensen, J. L. W. V., 1905. Om konvekse Funktioner og Uligheder imellem Middelvaerdier. Nyt Tidsskrift Mat. B, 16, 49-68.

Kavurmacı, H., 2012. Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar için Ostrowski ve Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Kuratowski, K., 1968. Topology. Vol. 2, Academic Press, New York.

Mitrinović, D., 1970. Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Berlin, 404, New York

Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., 1991. Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives. Kluwer Academic Publishers, 587 pp, Dordrecht/Boston/London. 104

Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., 1993. Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer Academic Publishers, 740 pp, Dordrecht/Boston/London.

Miheşan, V., 1993. A generalization of the convexity. Seminar on FunctionalEquations, Approx. and Convex., Cluj-Napoca, Romania.

Niculescu, C. P.; Persson, L. - E., 2006. Convex Functions and their Applications. A Contemporary Approach. CMS Books in Mathematics vol. 23, Springer-Verlag, New York.

Orlicz, W., 1961. A note on modular spaces. I. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys., 9, 157–162.

Özdemir, M., Akdemir, A. and Set, E., 2011. On (h,m)-convexity and Hadamard-type inequalities. arXiv:1103.6163v1 [math.CA]

Pachpatte, B., 2005. Mathematical Inequalities, Volume 67, Elsevier B.V., 606.

Park, J., 2010. Hermite-Hadamard-type inequalıtıes for real α-star s-convex mappings, J. Appl. Math. & Informatics, 28, No. 5 - 6, pp. 1507-1518.

Pečarić, J.; Proschan, F.; Tong, Y. L., 1992. Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications. Academic Press Inc.,

Rockafellar, R. Tyrrell, 1970. Convex Analysis. Princeton University Press, Princeton, New Jersey,

Rubinov, A., 2000. Abstract Convexity and Global Optimization, Kluwer Academic Publishers, Boston Dordrecht-London,

Rubinov, A. M., 2000. Abstract Convexity: Examples and Applications. Optimization, 47, 1-13

Sarıkaya, M.Z., 2012b. On Hermite-Hadamard type inequalities for convex functions, RGMIA Res. Rep. Coll., Vol. 15, Article 37.

Sarıkaya M.Z., 2012c., On Hermite-Hadamard inequalities for product of two convex functions, arXiv: 1203.5495v1.

Singer, I., 1997. Abstract Convex Analysis. Wiley-Interscience Publication, New York,

Sharikov, E. V., 2003. Hermite-Hadamard Type Inequalities for Increasing Radiant Functions. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 4, 2, Article 47.

Toader, G. H., 1988. On a generalisation of the convexity. Mathematic, 30, (53), 83-87.

Toader, G. H., 1984. Some generalisations of the convexity. Proc. Colloq. Approx. Optim, Cluj- Napoca (Romania), 329-338.

Tunç, M., Göv, E. and Şanal, Ü., 2015. On tgs-convex function and their inequalities, submitted.

Varošanec, S., 2007. On h-convexity, J. Math. Anal. and Appl., 326, 303-311.

Wright, E. M., 1954. An inequality for convex functions. Amer. Math. Monthly, 61, 620-622.

Yeşilce, İ. 2016. B-Konveks Fonksiyonlar ve Özellikleri. Doktora Tezi. Mersin Üniversitesi,Mersin, 62s.

Zhang, T., Ji, A. and Qi, F., 2012. On Integral Inequalities of Hermite-Hadamard Typefor s-Geometrically Convex Functions, Abstract and Applied Analysis,

ÖZGEÇMİŞ

YÜCEL DEMİRSOY

demirsoy35@hotmail.com

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2014-2019	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Antalya
Lisans 2002-2007	9 Eylül Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği, İzmir

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Öğretmen 2008-Devam Ediyor	Milli Eğitim Bakanlığı Hacı Ekrem Şerife Yazaroğlu Anadolu İ.H.L.