T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HURWITZ ZETA VE LERCH ZETA FONKSİYONLARININ ASİMPTOTİK AÇILIMI VE TAYLOR KATSAYILARI

LEVENT KARGIN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2009

HURWITZ ZETA VE LERCH ZETA FONKSİYONLARININ ASİMPTOTİK AÇILIMI VE TAYLOR KATSAYILARI

LEVENT KARGIN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2009

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HURWITZ ZETA VE LERCH ZETA FONKSİYONLARININ ASİMPTOTİK AÇILIMI VE TAYLOR KATSAYILARI

LEVENT KARGIN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez . . . / . . . / 2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından . . . (   ) not takdir edilerek oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Veli KURT	. . . .
(Danışman)	
Doç. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK	. . . .
Yard. Doç. Dr. Yusuf SUCU	. . . .

ÖNSÖZ

Bu çalışma esas olarak önbilgiler ve bulgular olmak üzere iki bölümden oluşmaktadır. Daha sonra kullanılmak üzere, Bernoulli polinomları, Frobenius Eulerian polinomları, Geometrik polinomlar, Üstel polinomlar, Riemann zeta, Hurwitz zeta, Lerch zeta Fonksiyonları, poly-üstel fonksiyonlar, H(s), H(s,z) Dirichlet Serileri, önbilgiler bölümünde tanıtılmış ve bazı özellikleri verilmiştir.

Bulgular bölümünde ise poly-üstel fonksiyonların açılımları yapılmış ve Frobenius Eulerian polinomlarının geometrik polinomlar cinsinden ifadeleri verilmiştir.

Bu tez çalışmasının, bu alandaki çalışmalara önemli katkılar sağlayacağı inancındayım.

Bu çalışma boyunca bilgisini ve zamanını benimle paylaşan, desteğini esirgemeyen danışmanım Sayın Prof.Dr. Veli KURT'a, yardımlarını gördüğüm Yrd. Doç. Dr. Mehmet CENKCİ, Yrd. Doç. Dr. Mümün Can ve Araş. Gör. Ayhan DİL'e teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

HURWITZ ZETA VE LERCH ZETA FONKSİYONLARININ ASİMPTOTİK AÇILIMI VE TAYLOR KATSAYILARI

Levent KARGIN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Veli KURT

Aralık 2009, 49 Sayfa

Bu tezin amacı poly-üstel fonksiyonları, geometrik ve üstel polinomlar yardımı ile incelemektir. Ayrıca Apostol-Bernoulli fonksiyonları ve Frobenius Eulerian polinomlarınının açılımlarını farklı bir yoldan araştırmaktır.

Tezin ilk bölümünde Bernoulli polinomları, Riemann zeta, Hurwitz zeta ve poly-üstel fonksiyonları, H(s) ve H(s,z) Dirichlet serileri hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde Apostol-Bernoulli, Riemann zeta ve Hurwitz Zeta fonksiyonları ile H(s,z) Dirichlet serisinin gerçeklediği temel teoremler ve bağıntılar verilmiştir. Üçüncü bölümde (xD) türev operatörünün sağladığı bazı özellikler verilmiştir. Daha sonra katsayıları Hurwitz zeta ve Lerch zeta fonksiyonları olan seriler incelenmiştir.

Son bölümde poly-üstel fonksiyonların seri açılımları yapılmış ve Frobenius Eulerian polinomlarının geometrik polinomlar cinsinden ifadesi verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER : Frobenius Eulerian Polinomları, Geometrik Polinomlar, Üstel Polinomlar, Riemann zeta Fonksiyonu, Hurwitz Zeta Fonksiyonu, Lerch Zeta Fonksiyonu, Poly-üstel Fonksiyonlar, Dirichlet Serileri.

JÜRİ: Prof. Dr. Veli KURT

Doç. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK

Yard. Doç. Dr. Yusuf SUCU

ABSTRACT

ASYMPTOTIC EXPANSION AND TAYLOR COEFFICIENTS OF HURWITZ ZETA AND LERCH ZETA FUNCTIONS

Levent KARGIN

M.Sc. in Mathematics

Adviser: Prof. Dr. Veli KURT

December 2009, 49 Pages

The aim of this thesis is to study polyexponantial functions with the help of geometric and exponantial polynomials and to investigate expansions of Apostol-Bernoulli functions and Frobenius Eulerian polynomials in a different way.

In the first section of the thesis we introduce Bernoulli polynomials, Riemann zeta, Hurwitz zeta, polyexponantial functions, Dirichlet series H(s) and H(s,z). In the second section, main theorems and some relations which holds by Apostol-Bernoulli, Riemann zeta, Hurwitz zeta, polyexponantial functions and Dirichlet series H(s,z) are given. In the third section, some properties of the (xD) operator are given. Afterwards series with Hurwitz and Lerch zeta function coefficients are studied.

In the final section, series with polyexponantial coefficients are studied and Frobenius Eulerian polynomials and numbers are obtained in terms of geometric polynomials.

KEY WORDS: Frobenius Eulerian Polynomials, Geometric Polynomials, Exponantial Polynomials, Riemann zeta Function, Hurwitz zeta Function, Lerch zeta Function, Polyexponantials, Dirichlet Series.

COMMITTEE: Prof. Dr. Veli KURT

Assoc. Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK

Asst. Prof. Dr. Yusuf SUCU

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

1.1. Çalışmanın Kapsamı

Bu tez çalışmasının ana materyalleri Bell ve Fubini polinomları ve sayıları olarak da bilinen üstel ve geometrik polinomlar ve sayılar ile birlikte üstel polinomlarla ilişkili olan poly-üstel fonksiyonlardır.

Üstel polinomlar ilk olarak Ramanujuan tarafından çalışılmış fakat elde ettikleri yaşadığı süre içerisinde yayınlanamamıştır. Üstel polinomlarla ilgili ilk yayın Bell ve Touchard tarafından yapılmıştır. $\left\{ {n \atop k} \right\}$ ikinci tip Stirling sayısı, n elemanlı bir kümenin kesişmeyen ve boştan farklı k tane alt kümeye parçalanış sayısını verir. Stirling sayılarının bir toplam ifadesi olarak tanımlanan üstel sayıları, bir kümenin kesişmeyen ve boştan farklı kümelere tüm mümkün parçalanışları sayısını verir.

Poly-üstel fonksiyonlar ilk olarak Hardy tarafından çalışılmıştır. Hardy çalışmalarında bu fonksiyonların sıfırları ve asimptotik açılımlarıyla ilgilenmiştir. Boyadzhiev tarafından yapılan bir çalışmada (BOYADZHIEV 2007c), Poly-üstel fonksiyonların sayılar kuramında önemli bir yeri olan Riemann zeta fonksiyonu ve bu fonksiyonun genelleştirmeleri olan Lerch zeta ve Hurwitz zeta fonksiyonları ile ilişkisi incelenmiştir.

Çalışma kapsamında üstel ve geometrik polinomların sağladığı bazı özellikler ve aralarındaki ilişkiler incelendikten sonra bu bağıntılardan yararlanılarak Frobenius Eulerian polinomları ve sayılarının geometrik polinomlar ve sayıları ile ilişkisi verilmiştir. Ayrıca katsayıları poly-üstel fonksiyonlar olan seriler, Hankel çevre integrali yardımı ile hesaplanmıştır.

1.2. Temel Kavramlar ve Gösterimler

1.2.1. Bernoulli, Frobenius Eulerian Polinomları, Apostol-Bernoulli Fonksiyonları ve Sayıları

Tanım 1.1 *x bir karmaşık sayı olmak üzere $B_n(x)$ Bernoulli Polinomu*

$$\frac{ze^{xz}}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{z^n}{n!}, \quad |z|<2\pi \quad (1) \tag{1.1}$$

ifadesi ile verilir. Bu eşitlikte $x=0$ için $B_n(0)$ ifadesi n. Bernoulli sayısı olarak adlandırılır ve B_n ile gösterilir. Böylece (1.1) eşitliğinde $x=0$ alınırsa ,

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{z^n}{n!}$$

ifadesi elde edilir (Apostol 1976).

Önerme 1.2 *Bernoulli polinomları ve sayıları aşağıdaki özellikleri sağlarlar:*

i. $B_n(x+1)-B_n(x)=nx^{n-1}$, $n\geqslant 1$

ii. $B_n(1)=B_n(0)$, $n\geqslant 2$

iii. $B_n'(x)=nB_{n-1}(x)$, $n\geqslant 1$

iv. $B_n(1-x)=(-1)^n B_n(x)$, $n\geqslant 0$

v. $B_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k}$, $n\geqslant 0$

vi. $B_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k$, $n\geqslant 2$.

Yukarıdaki özdeşliklerde n' ye değerler verilerek sırasıyla;

$$\begin{aligned}
B_0 &= 1,\ B_1=-\frac{1}{2},\ B_2=\frac{1}{6},\ B_3=0,\ B_4=-\frac{1}{30},\ B_5=0,\\
B_6 &= \frac{1}{42},\ B_7=0,\ B_8=-\frac{1}{30},\ B_9=0,\ B_{10}=\frac{5}{66},\ ...
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
B_0(x) &= 1,\ B_1(x)=x-\frac{1}{2},\ B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6},\ B_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x,\\
B_4(x) &= x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30},\ B_5(x)=x^5-\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3-\frac{1}{6}x,...
\end{aligned}$$

Bernoulli sayıları ve polinomları elde edilir.

Tanım 1.3 *x ve λ bir karmaşık sayı olmak üzere $H_n(x,\lambda)$ Frobenius Eulerian Polinomları ,*

$$\left(\frac{1-\lambda}{e^z-\lambda}\right).e^{xz}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x,\lambda)\frac{z^n}{n!},\quad \lambda\neq 1\quad |z-\ln\lambda|<2\pi \tag{1.2}$$

ifadesi ile verilir. Bu eşitlikte $x=0$ için $H_n(0,\lambda)$ ifadesi n.Frobenius Eulerian sayısı olarak adlandırılır ve $H_n(\lambda)$ ile gösterilir. Böylece (1.2) eşitliğinde $x=0$ alınırsa ,

$$\left(\frac{1-\lambda}{e^z-\lambda}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(\lambda)\frac{z^n}{n!}$$

ifadesi elde edilir (Carlitz 1959).

Önerme 1.4 *Frobenius Eulerian polinomları ve sayıları aşağıdaki özellikleri sağlarlar:*

i.$H_n(x+1,\lambda)-\lambda H_n(x,\lambda)=(1-\lambda)x^n,$

ii. $H_n'(x,\lambda)=n.H_{n-1}(x,\lambda),$

iii. $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^r H_n(x,\lambda)=\frac{n!}{(n-r)!}H_{n-r}(x,\lambda),$

iv. $H_n(x+y,\lambda)=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}H_k(x,\lambda)y^{n-k},$

v. $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}H_k(x,\lambda)-\lambda H_n(x,\lambda)=(1-\lambda)x^n.$

Önerme 1.4 v.' de n' ye değerler verilerek sırasıyla,

$$H_0(\lambda)=1,\quad H_1(\lambda)=\frac{1}{1-\lambda},\quad \ldots.$$

ve

$$H_0(x,\lambda)=1,\quad H_1(\lambda)=\frac{x(1-\lambda)-1}{1-\lambda},\quad \ldots$$

Frobenius Eulerian sayıları ve polinomları elde edilir.

Tanım 1.5 *$S(n,k)$ ikinci çeşit Stirling sayıları,*

$$\frac{(e^t-1)^k}{k!}=\sum_{n\geqslant k}S(n,k)\frac{t^n}{n!} \tag{1.3}$$

eşitliği ile tanımlanır (Comtet 1970). Bazı kaynaklarda ikinci çeşit Stirling sayılarını $S(n,k)$ gösterimi yerine $\left\{ {n \atop k} \right\}$ gösterimi ile de gösterilebilir (Graham, Knuth ve Patashnik 1989).

Tanım 1.6 *x ve λ bir karmaşık sayı olmak üzere $\beta_n(x,\lambda)$ Apostol-Bernoulli fonksiyonları,*

$$\frac{ze^{xz}}{\lambda e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(x,\lambda)\frac{z^n}{n!}\ , \quad \lambda \neq 1 \qquad |z + \ln\lambda| < 2\pi \tag{1.4}$$

ifadesi ile verilir. Bu eşitlikte $x=0$ için $\beta_n(0,\lambda)$ ifadesi n. Apostol-Bernoulli sayısı olarak adlandırılır ve $\beta_n(\lambda)$ ile gösterilir. Böylece (1.3) eşitliğinde $x=0$ alınırsa ,

$$\frac{z}{\lambda e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(\lambda)\frac{z^n}{n!}$$

ifadesi elde edilir (Boyadzhiev 2007a).

Önerme 1.7 *(Boyadzhiev 2007a) Apostol-Bernoulli fonksiyonları ve sayıları aşağıdaki özellikleri sağlarlar:*

$i.\lambda\beta_n(x+1,\lambda) - \beta_n(x,\lambda) = nx^{n-1},$

$ii.\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^r \beta_n(x,\lambda) = \frac{n!}{(n-r)!}\beta_n(x,\lambda),$

$iii.\beta_n(\lambda) = \frac{n}{\lambda-1}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left\{ {n-1 \atop k} \right\} k!\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^k,$

$iv.\beta_n(x,\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\beta_k(\lambda)x^{n-k},$

$v.\beta_n(\lambda) = \lambda\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\beta_k(\lambda).$

Önerme 1.7 v. ve Önerme 1.7 vi' de n' ye değerler verilerek sırasıyla,

$$\beta_0(\lambda) = 0,\ \beta_1(\lambda) = \frac{1}{\lambda-1},\ \beta_2(\lambda) = \frac{-2\lambda}{(\lambda-1)^2},\ \beta_3(\lambda) = \frac{3\left(\lambda^2+\lambda\right)}{(\lambda-1)^3}, \cdots$$

ve

$$\beta_0(x,\lambda) = 0,\ \beta_1(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda-1},\ \beta_2(x,\lambda) = \frac{2x(\lambda-1)-2\lambda}{(\lambda-1)^{2,}}, \cdots$$

Apostol-Bernoulli sayıları ve fonksiyonları elde edilir.

1.2.2. Gamma, Digamma, Riemann zeta, Hurwitz zeta ve Lerch zeta fonksiyonları

Tanım 1.8 $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) > 0$ *olmak üzere Gamma fonksiyonu,*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \tag{1.5}$$

şeklinde tanımlanır (Srivastava ve Choi 2001).

Önerme 1.9 *(Srivastava ve Choi 2001)Gamma fonksiyonu aşağıdaki özelikleri sağlar:*

i. $\Gamma(z+1) = z.\Gamma(z)$,

ii. $\Gamma(n+1) = n!$,

iii. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$,

iv. $\Gamma(z).\Gamma(z+1) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$, $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$

v. $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \pi \cot(\pi z)$. $z \in \mathbb{C} \backslash \{0, -1, -2, \ldots\}$

Tanım 1.10 $z \in \mathbb{C}$ *ve* $Re(z) > 0$ *olmak üzere digamma fonksiyonu,*

$$\Psi(z) = \frac{\partial}{\partial z} \log \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \tag{1.6}$$

ifadesi ile verilir.

$\Psi(z)$' nin integral gösterimi;

$$\Psi(z) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-zx}}{1 - e^{-x}} \right) dx$$

dır.

$\Psi(z)$' nin seri gösterimi;

$$\Psi(z) = -\gamma + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+z} \right)$$

eşitliği ile verilir. Burada $\gamma = -\Psi(1)$ Euler sabitidir (Boyadzhiev 2007b).

Tanım 1.11 *$z \in \mathbb{C}$ ve $\operatorname{Re}(z) > 1$ olmak üzere Riemann zeta fonksiyonu,*

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \tag{1.7}$$

ifadesi ile tanımlanır (Apostol 1976).

Tanım 1.12 *$z \in \mathbb{C}$ ve $Re(z) > 1$ ve $0 < a \leq 1$ reel sayı olmak üzere Hurwitz zeta fonksiyonu,*

$$\zeta(z, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^z} \tag{1.8}$$

ifadesi ile tanımlanır.

Özel olarak;

$$a = 1 \text{ için } \zeta(z, 1) = \zeta(z)$$

elde edilir (Apostol 1976).

Tanım 1.13 *$|z| < 1$ iken $s \in \mathbb{C}$ veya $|z| = 1$ iken $Re(s) > 1$ olmak üzere, Lerch Zeta fonksiyonu,*

$$\Phi(z, s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+a)^s} \tag{1.9}$$

ifadesi ile tanımlanır. Burada $a \in \mathbb{C} \backslash \{0, -1, -2 \ldots\}$ dir. Özel olarak;

$$z = 1 \text{ için } \Phi(1, s, a) = \zeta(z, a)$$

ve

$$z = a = 1 \text{ için } \Phi(1, s, 1) = \zeta(z)$$

elde edilir . Ayrıca $\Phi(z, s, a)$ integral gösterimi

$$\Phi(z, s, a) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{1 - ze^{-x}} e^{-ax} dx$$

eşitliği ile verilir (Srivastava ve Choi 2001).

1.2.3. Üstel, Geometrik Polinomlar ve Sayıları

Tanım 1.14 *"Φ_n" ile gösterilen n. Üstel sayısı ikinci çeşit Stirling sayılarının toplamı olarak*

$$\Phi_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \tag{1.10}$$

ifadesi ile verilir.

Üstel sayıları, üreteç foksiyonu yardımıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n \frac{x^n}{n!} = e^{e^x - 1}$$

şeklinde ifade edilir (Boyadzhiev 2005).

Tanım 1.15 *Üstel polinomlar,*

$$\Phi_n (x) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^k \tag{1.11}$$

şeklinde tanımlanır ve üstel üreteç fonksiyonu ile,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n (x) \frac{t^n}{n!} = e^{x\left(e^t - 1\right)} \tag{1.12}$$

olarak ifade edilir. (1.11)' de $x = 1$ alınırsa

$$\Phi_n = \Phi_n (1) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$$

bulunur. Şimdi bu polinom ve sayıların bazı değerlerini verelim.

$$\Phi_0 (x) = 1, \; \Phi_1 (x) = x, \; \Phi_2 (x) = x + x^2, \; \Phi_3 (x) = x + 3x^2 + x^3, \ldots$$

ve

$$\Phi_0 = 1, \; \Phi_1 = 1, \; \Phi_2 = 2, \; \Phi_3 = 5, \ldots$$

dir (Boyadzhiev 2005).

Tanım 1.16 *Geometrik polinomlar,*

$$w_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} k! x^k \tag{1.13}$$

eşitliği ile verilir. (1.13)' de $x = 1$ *alınarak* w_n *geometrik sayıları,*

$$w_n = w_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} k!$$

elde edilir. Bu polinom ve sayıların bazılarını aşağıdaki biçimde listelenebilir.

$$w_0(x) = 1, \ w_1(x) = x, \ w_2(x) = 2x^2 + x, \ w_3(x) = 6x^3 + 6x^2 + x, \ldots$$

ve

$$w_0 = 1, \ w_1 = 1, \ w_2 = 3, \ w_3 = 13, \ldots$$

dür. Geometrik polinomların üstel üreteç fonksiyonu

$$\frac{1}{1 - x(e^t - 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

ifadesi ile verilir (Boyadzhiev 2005).

1.2.4. Poly-Üstel Fonksiyonlar

Tanım 1.17 *Re* (a) *>0,* $x \in \mathbb{C}$ *ve* $s \in \mathbb{C}$ *olmak üzere poly-üstel fonksiyonlar,*

$$e_s(x, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!(n+a)^s} \tag{1.14}$$

ifadesi ile verilir. $a = 1$ *için*

$$e_s(x, 1) = e_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!(n+1)^s}$$

dir. 1905 ' de Hardy $F_{\lambda,s}(x)$ *notasyonunu kullanarak bu serinin sıfırlarını ve asimptotik davranışını incelemiştir (Boyadzhiev 2007c).*

Önerme 1.18 *(Boyadzhiev 2007c)Poly-üstel fonksiyonlar aşağıdaki özellikleri sağlarlar:*

i. $e_0(x,\lambda) = e^x$,

ii. $e_1(x) = \frac{e^x - 1}{x}$,

iii. $e_{p+1}(x,\lambda) = x^{-\lambda}\int_0^x t^{\lambda-1} e_p(t,\lambda)\,dt$,

iv. $\left(\frac{\partial}{\partial x}x\right)^p e_p(x) = e_0(x) = e^x$.

1.2.5. H(s) ve H(s,z) Dirichlet Serisi

Tanım 1.19 $f(n)$ *aritmetik fonksiyon olmak üzere Dirichlet serileri*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

ifadesi ile verilir (Apostol 1976).

Tanım 1.20 $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$h(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}$$

serisi harmonik sayısı olmak üzere

$$H(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s} \tag{1.15}$$

Dirichlet serisi $Re(s) > 1$ *için mutlak yakınsak ve* s*' nin analitik fonksiyonudur (Apostol ve Vu 1984).*

Tanım 1.21 $s, z \in \mathbb{C}$ *olmak üzere*

$$H(s,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^z}$$

dir (Apostol ve Vu 1984).

2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMA

2.1. Apostol-Bernoulli Fonksiyonu, Eulerian Polinomu ve Sayılarının Bazı Özellikleri

Teorem 2.1 *Apostol-Bernoulli fonksiyonu*

$$\beta_n(x+y,\lambda)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\beta_k(x,\lambda)\,y^{n-k}$$

toplama teoremini sağlar.

İspat. (1.4)' **den**,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(x+y)\frac{z^n}{n!} &= \frac{ze^{z(x+y)}}{\lambda e^z-1}=\frac{ze^{zx}}{\lambda e^z-1}e^{zy}\\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta_n(x,\lambda)}{n!}z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}z^n\right)\end{aligned}$$

yazılabilir. Sağ taraftaki ifadeye Cauchy çarpımı uygulanırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta_n(x+y,\lambda)}{n!}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\beta_k(x,\lambda)}{k!}\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\right)z^n$$

elde edilir. Burada z^n li ifadelerin katsayıları karşılaştırılarak istenen eşitlik bulunur.

■

Önerme 2.2 *Apostol-Bernoulli fonksiyonu için*

$$\beta_n(x,\lambda)=\frac{1}{\lambda-1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}k\sum_{j=0}^{k-1}\left\{\begin{matrix}k-1\\ j\end{matrix}\right\}j!\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^j$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Önerme 1.7 iv.' de $\beta_k(\lambda)$ yerine Önerme 1.7.iii.' ü yazarak istenen sonuç elde edilir. ■

Önerme 2.3 *Apostol-Bernoulli fonksiyonu için*

$$\lambda^m.\beta_n(m,\lambda)=\beta_n(\lambda)+n\sum_{k=0}^{m-1}k^{n-1}\lambda^k$$

özelliği sağlanır.

İspat. (1.4)' den,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{m}.\beta n\left(m,\lambda\right)}{n!}z^{n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta_{n}\left(\lambda\right)}{n!}z^{n} &= \frac{\lambda^{m}ze^{mz}}{\lambda e^{z}-1}-\frac{z}{\lambda e^{z}-1}\\
\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda^{m}.\beta n\left(m,\lambda\right)-\beta_{n}\left(\lambda\right)\right)\frac{z^{n}}{n!} &= \frac{z\left(\lambda^{m}e^{mz}-1\right)}{\lambda e^{z}-1}\\
&= z.\sum_{k=0}^{m-1}\lambda^{k}e^{kz}\\
&= z.\sum_{k=0}^{m-1}\lambda^{k}\left(\sum_{n=0}^{\infty}k^{n}\frac{z^{n}}{n!}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m-1}\lambda^{k}k^{n}\frac{z^{n+1}}{n!}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{m-1}\lambda^{k}k^{n-1}\frac{z^{n}}{(n-1)!}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(n\sum_{k=0}^{m-1}\lambda^{k}k^{n-1}\right)\frac{z^{n}}{n!}
\end{aligned}
$$

Buradan istenen sonuç elde edilir. ■

2.2. Riemann zeta, Hurwitz zeta ve Lerch zeta Fonksiyonlarının Bazı Özellikleri

Teorem 2.4 *(Apostol 1976)* $\zeta\left(s,a\right)$, $Re\left(s\right)>1$ *için mutlak yakınsak,* $\sigma\geq 1+\delta$ $(\delta>0)$ *için düzgün yakınsaktır. Hemde* $\sigma>1$ *yarı düzleminde* s*' nin analitik fonksiyonudur.*

İspat. (1.8)' de mutlak değer alırsak

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(n+a)^{-s}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}(n+a)^{-\sigma}\leq\sum_{n=1}^{\infty}(n+a)^{-(1+\delta)}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan $\sigma>1$ için mutlak yakınsaklık elde edilir. ■

Teorem 2.5 *(Apostol 1976)* $\sigma>1$ *için*

$$\Gamma\left(s\right)\zeta\left(s,a\right)=\int_{0}^{\infty}\frac{x^{s-1}e^{-ax}}{1-e^{-x}}dx \tag{2.1}$$

dır. Özel olarak $a = 1$ için,

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{-x}}{1-e^{-x}}dx$$

dir.

İspat. İlk olarak s$\in \mathbb{R}$ ve s>1 alıp ispatı yaptıktan sonra sonuçları analitik devam yardımıyla karmaşık s düzlemine genişleteceğiz.

$\Gamma(s)$' nin integral gösteriminde $x = (n+a)t$ alalım. Burada $n \geq 0$ olmak üzere;

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx = (n+a)^s \int_0^\infty t^{s-1}e^{-(n+a)t}dt,$$

elde edilir. Buradan

$$(n+a)^{-s}\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-nt}e^{-at}dt.$$

bulunur. $n \geq 0$ için eşitliğin her iki tarafında n üzerinden toplam alınırsa;

$$\zeta(s,a)\Gamma(s) = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty t^{s-1}e^{-nt}e^{-at}dt,$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafı $\sigma > 1$ için yakınsaktır. Levi' nin yakınsama teoreminden (Apostol, T.M. (1974) Mathematical Analysis, Teorem 10.25) toplam ile integralin yerleri değiştirilerek

$$\zeta(s,a)\Gamma(s) = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty t^{s-1}e^{-nt}e^{-at}dt = \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty e^{-nt}e^{-at}t^{s-1}dt.$$

elde edilir. $t > 0$ ise $0 < e^{-t} < 1$ olduğundan

$$\sum_{n=0}^\infty e^{-nt} = \frac{1}{1-e^{-t}}$$

geometrik serisi elde edilir.Dolayısıyla

$$\sum_{n=0}^\infty e^{-nt}e^{-at}t^{s-1} = \frac{t^{s-1}e^{-at}}{1-e^{-t}}$$

elde edilir. O halde;

$$\zeta(s,a)\Gamma(s) = \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty e^{-nt}e^{-at}t^{s-1}dt = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}e^{-at}}{1-e^{-t}}.$$

dir. Bu eşitliği $\sigma > 1$ olmak üzere tüm karmaşık düzleme genişletmek için eşitliğin her iki tarafının $\sigma > 1$ için analitik olduğunu göstermeliyiz. İspatlamak için eşitliğin sağ tarafının $1+\delta \leq \sigma \leq c$ $(c > 1$ *ve* $\delta > 0)$ bölgesinde analitik olduğunu varsayalım.

$$\int_0^\infty \left|\frac{t^{s-1}e^{-at}}{1-e^{-t}}\right| dt \leq \int_0^\infty \frac{t^{\sigma-1}e^{-at}}{1-e^{-t}}dt = \left(\int_0^1 + \int_1^\infty\right) \frac{t^{\sigma-1}e^{-at}}{1-e^{-t}}dt.$$

elde edilir. $0 \leq t \leq 1$ ise $t^{\sigma-1} \leq t^\delta$ ve $t \geq 1$ ise $t^{\sigma-1} \leq t^{c-1}$ olur. Ayrıca $t \geq 0$ için $e^t - 1 \geq t$ olur. Buradan

$$\int_0^1 \frac{t^{\sigma-1}e^{-at}}{1-e^{-t}}dt \leq \int_0^1 \frac{t^\delta e^{(1-a)t}}{e^t - 1}dt \leq e^{(1-a)} \int_0^1 t^{\delta-1} = \frac{e^{(1-a)}}{\delta},$$

ve

$$\int_1^\infty \frac{t^{\sigma-1}e^{-at}}{1-e^{-t}}dt \leq \int_1^\infty \frac{t^{c-1}e^{-at}}{1-e^{-t}}dt \leq \int_0^\infty \frac{t^{c-1}e^{-at}}{1-e^{-t}}dt = \zeta(c,a)\,\Gamma(c).$$

elde edilir. Bu durumda (2.1)' daki integral $1 + \delta \leq \sigma \leq c$ $(c > 1$ *ve* $\delta > 0)$ için düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla bu bölgede analitik bir ifadedir. O halde (2.1)' daki ifade analitik devam yardımıyla $\sigma > 1$ için geçerlidir. ■

Teorem 2.6 *(Apostol 1976)* $\zeta(s)$ *Riemann Zeta foksiyonu* $s = 1$ *basit kutbu hariç tüm karmaşık düzlemde analitik fonksiyondur ve* $s = 1$*' deki rezidü değeri* 1*'dir.*

2.3. H(s) ve H(s,z) Dirichlet Serisinin Özellikleri

2.3.1. H(s)' nin Meromorfik Devamı

Tanım 1.20' deki $h(n)$ harmonik toplamının,

$$h(n) = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} + \sum_{r=1}^{k} \zeta(1-2r)\, n^{-2r} + \int_n^\infty \frac{P_{2k+1}(x)}{x^{2k+2}}dx \tag{2.2}$$

asimptotik açılımında $n \to \infty$ için $h(n) \sim \log(n)$ dir. Burada γ Euler sabiti, $P_m(x) = B_m(x - [x])$ Bernoulli fonksiyonu, $B_{2r} = B_{2r}(0)$ Bernoulli sayısını göstermektedir ve $\zeta(1-2r) = \frac{-B_{2r}}{2r}$ dir.

(2.2)' de her iki tarafı n^{-s} ile çarpıp $n \geq 1$ üzerinden toplam alınırsa;

$$H(s) = -\zeta'(s) + \gamma\zeta(s) + \frac{1}{2}\zeta(s+1) + \sum_{r=1}^{k} \zeta(1-2r)\,\zeta(s+2r) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \int_n^\infty \frac{P_{2k+1}(x)}{x^{2k+2}}dx \tag{2.3}$$

elde edilir. $|P_m(x)| \leq M$ olduğundan

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\int_n^{\infty}\frac{P_{2k+1}(x)}{x^{2k+2}}dx\right| \leq \frac{M}{2k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma+2k+1}}$$

elde edilir. Dolayısıyla seri $\sigma \geq -2k+1$ yarı düzleminde düzgün yakınsaktır dolayısıyla seri $\sigma > -2k$ yarı düzleminde analitik olduğunu gösterir. O halde (2.3) $H(s)$' nin $\sigma > -2k$ yarı düzlemindeki analitik devamıdır.

(2.3)' den $H(s)$' nin kutup noktaları $\zeta'(s), \zeta(s), \zeta(s+1)$ ve r üzerinden toplamdaki $\zeta(s+2r)$ katsayıları kutup noktalarıdır. Buradan;

$s = 1$' de ikinci mertebeden kutbu var ve $Res(H(s), s = 1) = \gamma$' dır.

$s = 0$' da basit kutbu vardır ve $Res(H(s), s = 0) = \frac{1}{2}$' dir.

$s = 1-2r$ $(1 \leq r \leq k$ ve $k \geq 1)$' de basit kutbu var ve $Res(H(s), s = 1-2r) = \zeta(1-2r) = \frac{-B_{2r}}{2r}$' dir (Apostol ve Vu 1984).

2.3.2. H(s)' nin Diğer Bir Gösterimi

H(s)' yi negatif çift tamsayılarda hesaplamak için $\sigma > 1$ olmak üzere

$$H(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^s}\frac{1}{k} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^s}$$

dir. Buradan

$$H(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^s}+\sum_{k>n}\frac{1}{k^s}\right) = \zeta(s+1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{k>n}\frac{1}{k^s} \tag{2.4}$$

elde edilir. Euler toplam formülü $k \geq 1$ için tüm tamsayılar ve $Re(s) > 1$ için;

$$\sum_{k>n}\frac{1}{k^s} = \frac{n^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2}n^{-s} - \sum_{r=1}^{k}\binom{s+2r-2}{2r-1}\frac{\zeta(1-2r)}{n^{s+2r-1}} - \binom{s+2k}{2k+1}\int_n^{\infty}\frac{P_{2k+1}(x)}{x^{s+2k+1}}dx \tag{2.5}$$

elde edilir. (2.4)' da (2.5) uygulanırsa $\sigma > 1$ için;

$$\begin{aligned} H(s) = \frac{1}{2}\zeta(s+1) + \frac{\zeta(s)}{s-1} &- \sum_{r=1}^{k}\binom{s+2k-2}{2r-1}\zeta(1-2r)\,\zeta(s+2r) \\ &- \binom{s+2k}{2k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_n^{\infty}\frac{P_{2k+1}(x)}{x^{s+2k+1}}dx \end{aligned} \tag{2.6}$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafındaki son toplam $\sigma > -2k$ için analitiktir. Buradan (2.6) formülü $\sigma > -2k$ yarı düzleminde H(s) için alternatif bir gösterimdir.

$1 \leq q < k$ ve $q \in \mathbb{Z}$ için (2.6)' da $s = -2q$ alırsak;

$$H(-2q) = \frac{1}{2}\zeta\left(1-2q\right) = -\frac{B_{2q}}{4q} \tag{2.7}$$

elde edilir (Apostol ve Vu 1984).

2.3.3. H(s,z)' nin Meromorfik Devamı

$Re(z) > 1$ olmak üzere;

$$\zeta\left(z\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^z} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^z} + \sum_{k>n}\frac{1}{k^z}$$

yazılabilir.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^z} = \zeta\left(z\right) - \sum_{k>n}\frac{1}{k^z}$$

dir. (2.5)' den

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^z} = \zeta\left(z\right) - \frac{n^{1-z}}{z-1} + \frac{1}{2}n^{-z} + \sum_{r=1}^{k}\binom{z+2r-2}{2r-1}\frac{\zeta\left(1-2r\right)}{n^{z+2r-1}} + \binom{z+2k}{2k+1}\int_{n}^{\infty}\frac{P_{2k+1}\left(x\right)}{x^{z+2k+1}}dx$$

bulunur. Eşitlikte her iki tarafı $\sigma > 1$ olmak üzere n^{-s} ile çarpılarak $n \geq 1$ üzerinden toplam alınırsa;

$$\begin{aligned} H(s,z) \quad = \quad & \zeta\left(s\right)\zeta\left(z\right) - \frac{\zeta\left(s+z-1\right)}{z-1} + \frac{1}{2}\zeta\left(s+z\right) \\ & + \sum_{r=1}^{k}\binom{z+2r-2}{2r-1}\zeta\left(1-2r\right)\zeta\left(s+z+2r-1\right) \\ & + \binom{z+2k}{2k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\int_{n}^{\infty}\frac{P_{2k+1}\left(x\right)}{x^{z+2k+1}}dx \end{aligned} \tag{2.8}$$

bulunur. Bu durumda s' yi sabit alarak $H(s,z)$, $s \neq 1$ için tüm z düzleminde meromorfik fonksiyondur. Benzer şekilde z' yi sabit alırsak $H(s,z)$ tüm s düzleminde meromorfik fonksiyondur. $z = 1$ için (2.6) gösterimi kullanılır. $z \neq 1$ olmak üzere her sabit z için $H(s,z)$' nin s düzlemindeki kutup noktaları $\zeta\left(s\right)$, $\zeta\left(s+z-1\right)$, $\zeta\left(s+z\right)$ ve r üzerinden toplamda $\zeta\left(s+z+2r-1\right)$ foksiyonlarının kutup noktalarıdır. Bu durumda $H(s,z)$' nin $s=1$, $s=2-z$, $s=1-z$, $s=2-2r-z$ noktalarında basit kutbu vardır. Bu noktalardaki rezidü değerleri;

$Rez(H(s,z),s=1)=\zeta(z)$,

$Rez(H(s,z),s=2-z)=\frac{1}{1-z}$,

$Rez(H(s,z),s=1-z)=\frac{1}{2}$,

$Rez(H(s,z),s=2-2r-z)=\binom{z+2r-2}{2r-1}\zeta(1-2r)=-\frac{z(z+1)(z+2)...(z+2r-2)}{(2r)!}B_{2r}$' dir.

Not: Bazı rezidü değerleri z' ye bağlı olduğundan rezidüyü sifir yapan z değerleri için $H(s,z)$' nin kutbu yoktur. Örneğin z negatif çift tamsayı olursa $\zeta(z)=0$ olduğundan $s=1$ kutup noktası değildir.

(2.8)' de z' ye sıfır ve negatif tamsayı değerleri verilerek;

$$\begin{aligned}
H(s,0) &= \zeta(s-1) \qquad (s\neq 1,2)\\
H(s,-1) &= \frac{1}{2}\zeta(s-1)+\frac{1}{2}\zeta(s-2) \qquad (s\neq 1,2,3)\\
H(s,-2) &= \frac{1}{2}\zeta(s-2)+\frac{1}{2}\zeta(s-3)-2\zeta(-1)\zeta(s-1) \qquad (s\neq 1,2,3,4)
\end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur (Apostol ve Vu 1984).

2.3.4. H(s,z)' nin Farklı Gösterimi

$\sigma>1$ ve $Re(z)>1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
H(s,z) &= \sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}\sum_{k=1}^{n}k^{-z}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}n^{-s}k^{-z}=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-z}\sum_{k=n}^{\infty}k^{-s}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}n^{-z}\left(n^{-s}+\sum_{k>n}\frac{1}{k^{s}}\right)=\zeta(s+z)+\sum_{n=1}^{\infty}n^{-z}\sum_{k>n}\frac{1}{k^{s}}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. (2.5)' den dolayı

$$\begin{aligned}
H(s,z) &= \frac{1}{2}\zeta(s+z)+\frac{\zeta(s+z-1)}{s-1}-\binom{s+2k}{2k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{z}}\int_{n}^{\infty}\frac{P_{2k+1}(x)}{x^{s+2k+1}}dx\\
&\quad -\sum_{r=1}^{k}\binom{s+2r-2}{2r-1}\zeta(1-2r)\,\zeta(s+z+2r-1) \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikten $H(s,z)$' nin tüm s düzleminde veya $s \neq 1$ olmak üzere tüm z düzleminde meromorf fonksiyon olduğu görülür. $H(s,z)$' nin z düzleminde $z = 1 - s$, $z = 2 - s$ ve $z = 2 - 2r - s$ noktalarında basit kutbu vardır. Bu kutup noktalarındaki rezidü değerleri;

$Rez(H(s,z), z = 1 - s) = \frac{1}{2}$,

$Rez(H(s,z), z = 2 - s) = \frac{1}{s-1}$,

$Rez(H(s,z), z = 2 - 2r - s) = -\binom{s+2r-2}{2r-1}\zeta(1-2r) = \frac{s(s+1)(s+2)...(s+2r-2)}{(2r)!}B_{2r}$' dir.

Not: Bazı rezidü değerleri s' ye bağlı olduğundan rezidüyü sifir yapan s değerleri için $H(s,z)$' nin kutbu yoktur. Örneğin $s = 0$ için binom katsayıları sıfır olacağından $z = 0, -2, -4, \ldots$ veya benzer şekilde $s = -1$ için $z = -1, -3, \ldots$noktalarında kutbu yoktur (Apostol ve Vu 1984).

2.3.5. H(s,z) için Reciprocity Kuralı

Rao ve Sarma 1979 yılında ikiden büyük s ve z tamsayıları için

$$H(s,z) + H(z,s) = \zeta(s)\zeta(z) + \zeta(s+z) \tag{2.10}$$

reciprocity kuralını elde etmişlerdir. Mutlak yakınsaklık kullanarak yaptıkları ispat, $\sigma > 1$ ve $Re(z) > 1$ içinde geçerli olduğu açıktır.Ayrıca bu eşitlik s ve z sonlu olmak üzere tüm s ve z karmaşık sayıları içinde geçerlidir. $H(s,z)$ için (2.8) ve $H(z,s)$ için (2.9) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa (2.10) elde edilir.

$z = 0$ için $H(s,0) = \zeta(s-1)$, $(s \neq 1,2)$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} H(0,s) &= \zeta(s)\zeta(0) - H(s,0) \\ &= \frac{1}{2}\zeta(s) - \zeta(s-1) \qquad (s \neq 1,2) \end{aligned}$$

elde edilir (Apostol ve Vu 1984).

2.4. Üstel ve Geometrik Polinomların Özellikleri

Teorem 2.7 *(Boyadzhiev 2005) Geometrik polinomların Üstel polinomlar yardımıyla integral gösterimi*

$$w_n(z) = \int_0^\infty \Phi_n(z\lambda)\, e^{-\lambda} d\lambda$$

dır.

İspat. *(1.11)' den*

$$\Phi_n(z\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} z^k \lambda^k$$

yazılabilir. Her iki tarafı $e^{-\lambda}$ ile çarpıp integralini alınırsa;

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \Phi_n(z\lambda)\, e^{-\lambda} d\lambda &= \int_0^\infty \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} z^k \lambda^k e^{-\lambda} d\lambda \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} z^k \int_0^\infty \lambda^k e^{-\lambda} d\lambda \end{aligned}$$

yazılabilir. Önerme 1.9 ii.' de

$$\int_0^\infty \lambda^k e^{-\lambda} d\lambda = \Gamma(k+1) = k!$$

olduğundan ve (1.13)' den yararlanarak

$$\int_0^\infty \Phi_n(z\lambda)\, e^{-\lambda} d\lambda = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} z^k k! = w_n(z)$$

elde edilir. ■

Önerme 2.8 *(Boyadzhiev 2007c) $\Phi_n(x)$ üstel polinomları aşağıdaki özellikleri sağlarlar:*

i. $\Phi_{n+1}(x) = x\left(\Phi_n'(x) + \Phi_n(x)\right),$

ii. $\Phi_{n+1}(x) = x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Phi_k(x),$

iii. $\Phi_n'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \Phi_k(x)$

dir.

2.5. Poly-üstel Fonksiyonların Bazı Özellikleri

Önerme 2.9 *Poly-üstel fonksiyonların integral gösterimi*

$$\Gamma(s)\, e_s(x,\lambda) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-\lambda t} e^{xe^{-t}} dt$$

dir.

İspat.

$$e^{xe^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nt} x^n}{n!}$$

eşitliğinin her iki tarafını $t^{s-1}e^{-\lambda t}$ ile çarpıp integralini alırsak

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty t^{s-1} e^{-\lambda t} e^{xe^{-t}} dt &= \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nt} x^n}{n!} t^{s-1} e^{-\lambda t} dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t(n+\lambda)} dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{\Gamma(s)}{(n+\lambda)^s} \\
&= \Gamma(s)\, e_s(x,\lambda)
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Önerme 2.10 $|z| < |\lambda|$ *olmak üzere*

$$\sum_{p=0}^{\infty} e_p(x,\lambda)\, z^p = e^x + z e_1(x, \lambda - z)$$

eşitliğini sağlar.

İspat. *Poly-üstel fonksiyonların tanımını yerine yazarsak*

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{\infty} e_p(x,\lambda)\, z^p &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n z^p}{n!\,(n+\lambda)^p} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{z}{n+\lambda}\right)^p \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \left(1 + \frac{z}{n+\lambda-z}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z x^n}{n!(n+\lambda-z)} \\
&= e^x + z e_1(x, \lambda - z)
\end{aligned}$$

bulunur. ∎

Önerme 2.11 *$e_s(x, \lambda - z)$ fonksiyonun $z = 0$' da Taylor açılımı*

$$e_s(x, \lambda - z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s+m)}{\Gamma(s)\, m!} e_{s+m}(x, \lambda)\, z^m$$

dir.

İspat.

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^m e_s(x, \lambda - z) = \frac{\Gamma(s+m)}{\Gamma(s)} e_{s+m}(x, \lambda - z)$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} e_s(x, \lambda - z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{d}{dz}\right)^m e_s(x, \lambda - z)_{|z=0} \frac{z^m}{m!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s+m)}{\Gamma(s)\, m!} e_{s+m}(x, \lambda)\, z^m \end{aligned}$$

elde edilir. ∎

Önerme 2.12 *$p = 0, 1, \ldots$, $\forall x \in \mathbb{C}$ ve $Re(\lambda) > 0$ için*

$$e_{-p}(x, \lambda) = e^x \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \lambda^{p-k} \Phi_k(x)$$

dir.

İspat. (1.14)' den

$$\begin{aligned} e_{-p}(x, \lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)^p \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \lambda^{p-k} n^k \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \lambda^{p-k} \sum_{n=0}^{\infty} n^k \frac{x^n}{n!} \\ &= e^x \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \lambda^{p-k} \Phi_k(x) \end{aligned}$$

elde edilir. ∎

Sonuç 2.13 *Poly-üstel fonksiyonlar ile ilgili*

$$e_{-p}(x) = \frac{e^x}{x}\Phi_{p+1}(x)$$

bağıntısı ya da

$$\Phi_p(x) = xe^{-x}e_{1-p}(x)$$

bağıntısı vardır.

İspat. Önerme 2.12' de $\lambda = 1$ alınır ve Önerme 2.8 ii. kullanılarak istenen sonuç elde edilir. ■

Önerme 2.14 *Lerch zeta fonksiyonunun poly-üstel fonksiyonlar cinsinden integral gösterimi*

$$\Phi(z, s, \lambda) = \int_0^\infty e_s(tz, \lambda)\, e^{-t} dt$$

dir.

İspat. (1.14)' den yararlanılarak

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e_s(tz, \lambda)\, e^{-t} dt &= \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n z^n}{n!\,(n+\lambda)^s} e^{-t} dt \\
&= \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!\,(n+\lambda)^s} \int_0^\infty t^n e^{-t} dt \\
&= \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{(n+\lambda)^s} = \Phi(z, s, \lambda)
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Sonuç 2.15 *Hurwitz zeta ve Riemann zeta fonksiyonlarının poly-üstel fonksiyonlar cinsinden integral gösterimi*

$$\zeta(s, \lambda) = \int_0^\infty e_s(t, \lambda)\, e^{-t} dt \tag{2.11}$$

$$\zeta(s) = \int_0^\infty e_s(t)\, e^{-t} dt \tag{2.12}$$

dir.

İspat. Önerme 2.14' de $z = 1$ alarak (2.11) bulunur. Önerme 2.14' de $z = \lambda = 1$ için (2.12) elde edilir. ■

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Türev Operatörü ve Gerçeklediği Bazı Özellikler

Tanım 3.1 *$f(x)$ türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere türev operatörü şu şekilde tanımlansın;*

$$(xD) f(x) = xf^{'}(x)$$

Özel olarak $f(x) = x^n$ alınırsa

$$(xD)^m f(x) = (xD)^m x^n = n^m x^n$$

elde edilir.

Önerme 3.2 *(Boyadzhiev 2005) g(x) m defa türevlenebilen herhangi bir fonksiyon olsun.*

$$(xD)^m g(x) = \sum_{k=0}^{m} \left\{ {m \atop k} \right\} x^k g^{(k)}(x)$$

eşitliği vardır.

İspat. Tümevarım yöntemini kullanılırsa

$m = 1$ için

$$\begin{aligned} (xD) g(x) &= \sum_{k=0}^{1} \left\{ {1 \atop k} \right\} x^k g^{(k)}(x) \\ xg^{'}(x) &= 0.g(x) + x.g^{'}(x) \end{aligned}$$

dir.

$m = k$ için

$$(xD)^m g(x) = \sum_{k=0}^{m} \left\{ {m \atop k} \right\} x^k g^{(k)}(x)$$

olsun.

$m = k + 1$ için ispatlayalım

$$
\begin{aligned}
(xD)^{m+1} g(x) &= (xD)\left[(xD)^m g(x)\right] \\
&= (xD) \sum_{k=0}^{m} \left\{ {m \atop k} \right\} x^k g^{(k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \left\{ {m \atop k} \right\} x \left(k x^{k-1} g^{(k)}(x) + x^k g^{(k+1)}(x) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \left\{ {m \atop k} \right\} k x^k g^{(k)}(x) + \sum_{k=0}^{m} \left\{ {m \atop k} \right\} x^{k+1} g^{(k+1)}(x) \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} \left(k \left\{ {m \atop k} \right\} + \left\{ {m \atop k-1} \right\} \right) x^k g^{(k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} \left\{ {m+1 \atop k} \right\} x^k g^{(k)}(x)
\end{aligned}
$$

bulunur. ■

Önerme 3.3 *(Boyadzhiev 2005) Üstel polinomların bir diğer ifadesi*

$$\Phi_n(x) = e^{-x} (xD)^n e^x \tag{3.1}$$

dir.

İspat. Önerme3.2 ' de $g(x) = e^x$ alırsak istenen sonuç elde edilir. ■

Uyarı 3.4 *(3.1) üstel polinomların diğer bir tanımı olarak kullanılmaktadır.Bu ifadeyi biraz açarsak*

$$
\begin{aligned}
e^x \Phi_n(x) &= (xD)^n e^x \\
&= (xD)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (xD)^n x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n x^k}{k!}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu durumda

$$e^x \Phi_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n x^k}{k!}$$

elde edilir.

Önerme 3.5 *(Boyadzhiev 2005) $|x| < 1$ olmak üzere*

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^m x^k = \frac{1}{1-x} w_m \left(\frac{x}{1-x} \right)$$

dir.

Önerme 3.6 *(Boyadzhiev 2005) $|x| < 1$ olmak üzere*

$$(xD)^m \left\{ \frac{1}{1-x} \right\} = \frac{1}{1-x} w_m \left(\frac{x}{1-x} \right)$$

dir.

İspat. $|x| < 1$ olmak üzere $\frac{1}{1-x}$ geometrik serisini açıp Önerme 3.5' den yararlanarak istenen sonuç elde edilir. ■

Sonuç 3.7 $\lambda \neq 1$ *olmak üzere*

$$\beta_k (\lambda) = \frac{k}{\lambda - 1} w_{k-1} \left(\frac{\lambda}{1-\lambda} \right) \tag{3.2}$$

ya da

$$\beta_k \left(\frac{z}{1+z} \right) = -k (z+1) w_{k-1} (z) \tag{3.3}$$

eşitlikleri elde edilir.

İspat. Önerme 1.7 iii. ve (1.13)' den yararlanarak (3.2) elde edilir. (3.2)' de $\lambda = \frac{z}{1+z}$ alınırsa (3.3) elde edilir. Bu ise $\beta_k \left(\frac{z}{1+z} \right)$' nin z' ye bağlı bir polinom olduğunu gösterir. ■

Sonuç 3.8 $\lambda \neq 1$ *olmak üzere*

$$\beta_n (x, \lambda) = \frac{1}{\lambda - 1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^{n-k} w_{k-1} \left(\frac{\lambda}{1-\lambda} \right)$$

eşitliği vardır.

İspat. Önerme 2.2 ve (1.13)' den yararlanarak istenen sonuç elde edilir. ■

Önerme 3.9 *$m = 0, 1, 2, \ldots$ olmak üzere Lerch zeta fonksiyonu*

$$\Phi(\lambda, -m, a) = \frac{1}{1-\lambda} \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} a^{m-j} w_j \left(\frac{\lambda}{1-\lambda} \right)$$

ifadesi ile verilir.

İspat. $|\lambda| < 1$ olmak üzere $\forall s \in \mathbb{C}$ için

$$\Phi(\lambda, s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n+a)^s}$$

yazılır. $s = -m$, $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ için

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda, -m, a) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (n+a)^m \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} n^j a^{m-j} \\ &= \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} a^{m-j} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n n^j \end{aligned}$$

bulunur. (3.5) yardımı ile istenen sonuç elde edilir. ■

3.2. Hankel Çevre İntegrali ve Hankel Çevre İntegrali Yardımıyla Bazı Fonksiyonların Özellikleri

C Hankel çevresi $-\infty$' dan başlayıp negatif reel eksenin alt kısmından orijin etrafında pozitif yönde döndükten sonra negatif reel eksenin üst kısmından $-\infty$' a giden integral yoludur.

Teorem 3.10 *(Apostol 1976) $0 < a \leq 1$ olmak üzere aşağıda tanımlanan I(s,a) fonksiyonu*

$$I(s, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^{s-1} e^{az}}{1 - e^z} dz$$

s için tam fonksiyondur. Hem de

$$\zeta(s, a) = \Gamma(1-s) I(s, a) \qquad \sigma > 1 \tag{3.4}$$

eşitliğini gerçekler.

İspat. Burada z^s, C_1 yolu boyunca $r^s e^{i\pi s}$, C_3 yolu boyuncada $r^s e^{-i\pi s}$ anlamındadır. İntegralin $|s| \leq M$ kompakt diskinde C_1ve C_3 yolu boyunca düzgün yakınsak olduğunu gösterirsek $I(s,a)$' nın s' nin tam fonksiyonu olduğu gösterilmiş olur.

C_1 boyunca $r \geq 1$ için

$$\left|z^{s-1}\right| = r^{\sigma-1}\left|e^{-\pi i(\sigma-1+it)}\right| = r^{\sigma-1}e^{\pi t} \leq r^{M-1}e^{\pi M},$$

C_3 boyunca $r \geq 1$ için

$$\left|z^{s-1}\right| = r^{\sigma-1}\left|e^{\pi i(\sigma-1+it)}\right| = r^{\sigma-1}e^{-\pi t} \leq r^{M-1}e^{\pi M},$$

Dolayısyla hem C_1 hem de C_3 boyunca $r \geq 1$ için

$$\left|\frac{z^{s-1}e^{az}}{1-e^z}\right| \leq \frac{r^{M-1}e^{\pi M}e^{ar}}{1-e^{-r}} = \frac{r^{M-1}e^{\pi M}e^{(1-a)r}}{e^r-1}$$

bulunur. Ancak $r > \log 2$ için $e^r - 1 > \frac{e^r}{2}$ olduğundan integral $Ar^{M-1}e^{-ar}$ ile sınırdır.Burada A, M' ye bağlı r' den bağımsız herhangi bir sabittir. Dolayısıyla $\int_c^\infty r^{M-1}e^{-ar}$ $c > 0$ için yakınsaktır. O halde $I(s,a)$ s' nin tam fonksiyonudur.

(3.4)' u ispatlamak için

$$2\pi i I(s,a) = \left(\int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}\right) z^{s-1}g(z)\,dz$$

Burada $g(z) = \frac{e^{az}}{1-e^z}$ dir. C_1 ve C_3 boyunca $g(z) = g(-r)$ ve C_2 yolunda $-\pi \leq \theta \leq \pi$ olmak üzere $z = ce^{i\theta}$ olur.Dolayısıyla

$$\begin{aligned} 2\pi i I(s,a) &= \int_\infty^c r^{s-1}e^{-i\pi s}g(-r)\,dr + i\int_{-\pi}^{\pi} c^{s-1}e^{(s-1)i\theta}ce^{i\theta}g\left(ce^{i\theta}\right)d\theta \\ &\quad + \int_c^\infty r^{s-1}e^{i\pi s}g(-r)\,dr \\ &= 2i\sin(\pi s)\int_c^\infty r^{s-1}g(-r)\,dr + ic^s\int_{-\pi}^{\pi} e^{si\theta}g\left(ce^{i\theta}\right)d\theta \end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafı 2i ile böler ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\pi I(s,a) = sin(\pi s)\, I_1(s,c) + I_2(s,c)$$

elde edilir. Buradan $c \to 0$ ise

$$\lim_{c\to 0} I_1(s,c) = \int_0^\infty \frac{r^{s-1}e^{-ar}}{1-e^{-r}}dr = \Gamma(s)\,\zeta(s,a) \qquad (\sigma > 1)$$

dir. $g(z)$ $z=0$ hariç $|z|<2\pi$ bölgesinde analitiktir.Dolayısıyla $zg(z)$ $|z|<2\pi$' de analitirdir.Bu durumda $|z|=c<2\pi$ ve A herhangi bir sabit olmak üzere $|g(z)|\leq \frac{A}{|z|}=\frac{A}{c}$

$$|I_2(s,a)|\leq \frac{c^{\sigma}}{2}\int_0^{2\pi} e^{-t\theta}\frac{A}{c}d\theta \leq Ae^{\pi|t|}c^{\sigma-1}$$

yazılabilir. Buradan $c\to 0$ için $I_2(s,c)\to 0$ olur ve bu durumda $\pi I(s,a) = sin(\pi s)\Gamma(s)\zeta(s,a)$ elde edilir. Ayrıca Önerme 1.9' dan istenen sonuca ulaşılır. ∎

Tanım 3.11 *(Apostol 1976) $\sigma\leq 1$ için $\zeta(s,a)$ aşağıdaki eşitliği sağlar.*

$$\zeta(s,a)=\Gamma(1-s)I(s,a).$$

Uyarı 3.12 *(3.4)' de $n=0,1,2,\ldots$ için $s=-n$ alınırsa*

$$\begin{aligned}\zeta(-n,a) &= \Gamma(1+n)I(-n,a)\\ &= \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{z^{-(n+1)}e^{az}}{1-e^z}dz\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\zeta(s,a) &= \Gamma(1-s)I(s,a)\\ &= \frac{1}{\Gamma(s)}\frac{\pi}{sin(\pi s)}I(s,a)\end{aligned}$$

şeklinde de yazılabilir.Bu durumda $s=n+1$ için eşitlikte limite geçilirse L' Hospital kuralı yardımıyla

$$\begin{aligned}\zeta(n+1,a) &= \frac{1}{n!}\left\{\lim_{s\to n+1}\frac{\pi}{sin(\pi s)}I(s,a)\right\}\\ &= \frac{1}{n!}\left\{\frac{I'(n+1,a)}{cos(\pi(n+1))}\right\}\\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i n!}\int_C \frac{z^n logz}{1-e^z}e^{az}dz\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.13 *(Apostol 1976) $\zeta(s,a)$ $s=1$ basit kutbu hariç her s için analitik fonksiyondur ve $Res(\zeta(s,a), s=1)=1$*

İspat. $I(s,a)$ tam fonksiyon olduğundan $\zeta(s,a)$' nın tekil noktaları $\Gamma(1-s)$' nin kutup noktalarıdır ve bu noktalar $s = 1, 2, 3, \ldots$ dır. Teorem 2.4' den $\zeta(s,a)$ $s = 2, 3, 4, \ldots$ noktalarında analitiktir. Dolayısıyla $\zeta(s,a)$' nın tek kutup noktası $s = 1$' dir.

$s = n$ alırsak $I(s,a)$ integrali C_1 ve C_3 yolundaintegral değerleri toplamı sıfır bulunur. Buradan

$$I(n,a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{z^{n-1}e^{az}}{1-e^z}dz = Res\left(\frac{z^{n-1}e^{az}}{1-e^z}, z=0\right)$$

bulunur. Özel olarak $s = 1$ alırsak

$$I(1,a) = Res\left(\frac{e^{az}}{1-e^z}, z=0\right) = \lim_{z\to 0}\frac{ze^{az}}{1-e^z} = -1$$

elde edilir. $\zeta(s,a)$' nın $s = 1$' deki rezidü değerini hesaplamak için

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s,a) &= -\lim_{s\to 1}(1-s)\Gamma(1-s)I(s,a)\\
&= -I(1,a)\lim_{s\to 1}\Gamma(2-s) = \Gamma(1) = 1
\end{aligned}$$

bulunur. ■

Teorem 3.14 *(Apostol 1976)* $\forall n \geq 0$ *için*

$$\zeta(-n,a) = -\frac{B_{n+1}(a)}{n+1}$$

bağıntısı vardır.

İspat. Tanım 3.11' den

$$\zeta(-n,a) = n!I(-n,a)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
I(-n,a) &= Res\left(\frac{z^{-n-1}e^{az}}{1-e^z}, z=0\right) = -Res\left(z^{-n-2}\frac{ze^{az}}{e^z-1}, z=0\right)\\
&= -Res\left(z^{-n-2}\sum_{m=0}^{\infty}B_m(a)\frac{z^m}{m!}, z=0\right) = -\frac{B_{n+1}(a)}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

istenen sonuc elde edilir. ■

Önerme 3.15 *(Boyadzhiev 2007b) $Re(s) > 0$ için digamma fonksiyonunun Hankel çevre integrali ile gösterimi*

$$\Psi(s) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \left(\frac{e^z}{z} + \frac{e^{sz}}{1-e^z}\right) logz.dz \tag{3.5}$$

dir. Ayrıca

$$\Psi(s) = \frac{\Gamma(s)}{2\pi i}\int\limits_C z^{-s}e^z logz.dz \tag{3.6}$$

$$\gamma = -\Psi(1) = \frac{-1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{e^z logz}{z} dz \tag{3.7}$$

$$\Psi(s) + \gamma = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{e^{sz}}{1-e^z} logz\ dz \tag{3.8}$$

ifadeleri de vardır.

İspat. Tanım 1.10' den $c \to 0$ için

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \left(\frac{e^z}{z} + \frac{e^{sz}}{1-e^z}\right) logz\ dz &= \frac{-1}{2\pi i}\int\limits_\infty^0 \left(\frac{e^{-x}}{-x} + \frac{e^{-xs}}{1-e^{-x}}\right)(\ln x - i\pi)\, dx \\ &+ \frac{-1}{2\pi i}\int_0^\infty \left(\frac{e^{-x}}{-x} + \frac{e^{-xs}}{1-e^{-x}}\right)(\ln x + i\pi)\, dx + \lim_{c\to 0}\int\limits_{C_2} \\ &= \int\limits_0^\infty \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-sx}}{1-e^{-x}}\right) dx = \Psi(s)\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $\lim_{c\to 0}\int_{C_2} = 0$' dır. Şimdi $\Gamma(s)$ gamma fonksiyonunun Hankel çevre integrali yolu ile gösterimi kullanılırsa

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C z^{-s}e^z$$

intergralinde s' ye göre türev alınırsa (3.6), (3.6)' da s=1 alınırsa (3.7) elde edilir. Ayrıca (3.5) ve (3.7)' den (3.8) elde edilir. ■

Sonuç 3.16 *$Re(a) > 0$ ve $Re(b) > 0$ olmak üzere*

$$\Psi(a) - \Psi(b) = \zeta(1,b) - \zeta(1,a)$$

dır.

İspat. $Re(a) > 0$ ve $Re(b) > 0$ olmak üzere (3.8)' den

$$\Psi(a) - \Psi(b) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{az} - e^{bz}}{1 - e^z} logz\ dz$$

yazılabilir. Ayrıca Tanım 1.10' dan

$$\Psi(a) - \Psi(b) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+b} - \frac{1}{k+a}\right)$$

ifadesi vardır. (1.8)' de göz önüne alınırsa istenen sonuç elde edilir. ■

Önerme 3.17 *(Boyadzhiev 2007b) $\forall s \in \mathbb{C}$ için $\Phi(\lambda, s, a)$' nın Hankel Çevre İntegrali ile gösterimi*

$$\Phi(\lambda, s, a) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_C \frac{z^{s-1}e^{az}}{1 - \lambda e^z} dz \tag{3.9}$$

ya da

$$\Phi(\lambda, s, a) = \frac{1}{2\pi i\Gamma(s)}\frac{\pi}{sin(\pi s)}\int_C \frac{z^{s-1}e^{az}}{1 - \lambda e^z} dz \tag{3.10}$$

dir. $|\lambda| < 1$ olmak üzere

$$\frac{1}{1-\lambda} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^{-1}e^{az}}{1 - \lambda e^z} dz$$

dir. Ayrıca

$$\Phi(\lambda, n+1, a) = \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi i n!}\int_C \frac{z^n logz}{1 - \lambda e^z} e^{az} dz \tag{3.11}$$

ve $n = 0$ için

$$\Phi(\lambda, 1, a) = \frac{-1}{2\pi i}\int_C \frac{logz}{1 - \lambda e^z} e^{az} dz \tag{3.12}$$

eşitlikleri vardır.

İspat. $c \to 0$ olmak üzere Tanım 1.13' deki integral gösterimi kullanılırsa istenen sonuç elde edilir. (3.9)' da $s = 0$ alınırsa $|\lambda| < 1$ olmak üzere

$$\Phi(\lambda, 0, a) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^{-1}e^{az}}{1 - \lambda e^z} dz$$

elde edilir. (3.10)' da $s = n + 1$ alınırsa

$$\Phi(\lambda, n+1, a) = \frac{1}{2\pi i\Gamma(n+1)}\frac{\pi}{sin(\pi(n+1))}\int_C \frac{z^n e^{az}}{1 - \lambda e^z} dz$$

bulunur. Buradan limite geçilirse L' Hospital kuralı yardımıyla

$$\Phi\left(\lambda, n+1, a\right) = \frac{\left(-1\right)^{n-1}}{2\pi i n!}\int_C \frac{z^n logz}{1-\lambda e^z} e^{az} dz$$

elde edilir. ■

Önerme 3.18 *$Re(\lambda) > 0$, $x \in \mathbb{C}$ olmak üzere $s \notin \mathbb{N}$ için*

$$e_s\left(x, \lambda\right) = \frac{\Gamma\left(1-s\right)}{2\pi i}\int_C z^{s-1} e^{\lambda z} e^{xe^z} dz \tag{3.13}$$

eşitliği vardır. $m \in \mathbb{N}$ için

$$e_m\left(x, \lambda\right) = \frac{\left(-1\right)^m}{2\pi i\left(m-1\right)!}\int_C z^{m-1} e^{\lambda z} e^{xe^z} logz\ dz \tag{3.14}$$

dir.

İspat. İspata iyi bilinen bir gösterimden yararlanarak başlayalım. $s \notin \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{\Gamma\left(1-s\right)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C z^{s-1} e^z dz$$

dir. z yerine $\left(n+\lambda\right)z$ değişkeni yazılırsa

$$\frac{1}{\left(n+\lambda\right)^s} = \frac{\Gamma\left(1-s\right)}{2\pi i}\int_C z^{s-1} e^{\lambda z} e^{nz} dz$$

elde edilir. Her iki tarafı $\frac{x^n}{n!}$ ile çarpıp $n \geq 0$ üzerinden toplam alınırsa istenen sonuç elde edilir. $m \in \mathbb{N}$ için Önerme 1.9 iv.' den yaralanarak limite geçilirse L'Hospital kuralı ile

$$\begin{aligned} e_m\left(x, \lambda\right) &= \frac{1}{2\pi i}\left\{\lim_{s\to m} \frac{\pi}{\Gamma\left(s\right)\sin \pi s}\int_C z^{s-1} e^{\lambda z} e^{xe^z} dz\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i\left(m-1\right)!}\left\{\lim_{s\to m} \frac{\pi}{\sin \pi s}\int_C z^{s-1} e^{\lambda z} e^{xe^z} dz\right\} \end{aligned}$$

dir. Böylece istenen sonuç elde edilir. ■

Lemma 3.19 *$s \neq 1, 2, 3, \ldots$ olmak üzere $\forall s \in \mathbb{C}$ için*

$$\zeta'\left(s, a\right) + \Psi\left(1-s\right)\zeta\left(s, a\right) = \frac{\Gamma\left(1-s\right)}{2\pi i}\int_C \frac{z^{s-1} e^{az} logz}{1-e^z} dz \tag{3.15}$$

dir. Özel olarak $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ için

$$g\left(n, a\right) \equiv \zeta'\left(-n, a\right) + \Psi\left(n+1\right)\zeta\left(-n, a\right) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{z^{-n-1} e^{az} logz}{1-e^z} dz \tag{3.16}$$

eşitliği elde edilir.

İspat. (3.4)' de s' ye göre türev alırsak

$$\begin{aligned}
\zeta'(s,a) &= -\Gamma'(1-s)\,I(s,a)+\Gamma(1-s)\,I'(s,a) \\
&= \frac{-\Gamma'(1-s)}{\Gamma(1-s)}\Gamma(1-s)\,I(s,a)+\Gamma(1-s)\,I'(s,a) \\
&= -\Psi(s-1)\,\zeta(s,a)+\Gamma(1-s)\,I'(s,a)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu da bize (3.15) eşitliğini verir. Bu eşitlikte $s=-n$ alınırsa (3.16) elde edilir. ∎

Lemma 3.20 *$\forall s\in\mathbb{C}$ için*

$$\Phi'_s(\lambda,s,a)+\Psi(1-s)\,\Phi(\lambda,s,a)=\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_C\frac{z^{s-1}e^{az}logz}{1-\lambda e^z}dz$$

dir. Özel olarak $n=0,1,2,\ldots$ olmak üzere $s=-n$ için

$$\Phi'_s(\lambda,-n,a)+\Psi(n+1)\,\Phi(\lambda,-n,a)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{z^{-n-1}e^{az}logz}{1-\lambda e^z}dz \tag{3.17}$$

dir.

İspat. (3.9)' da s' ye göre türev alınarak $n=0,1,2,\ldots$ olmak üzere $s=-n$ alınırsa istenen sonuçlar elde edilir. ∎

3.3. Katsayıları Hurwitz Zeta ve Lerch Zeta Fonksiyonları Olan Serilerin Hesaplanması

Tanım 3.21 *$Re(a)>0$ ve $p\in\mathbb{N}$ olmak üzere*

$$\begin{aligned}
S(t,a,p) &= \sum_{n=1}^{\infty}\zeta(n+1,a)\,\frac{t^{n+p}}{n+p}, \\
T(t,a,p) &= \sum_{n=1}^{\infty}\zeta(n+1,a)\,\frac{t^{n+p}}{(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}
\end{aligned}$$

serilerini bu şekilde tanımlayalım.

Lemma 3.22 *$\forall p\in\mathbb{N}$ ve $\forall z\in\mathbb{C}$ için*

$$\int_0^t y^{p-1}\left(1-e^{-zy}\right)dy=\frac{t^p}{p}+e^{-tz}\sum_{k=0}^{p-1}k!\binom{p-1}{k}\frac{t^{p-1-k}}{z^{k+1}}-\frac{(p-1)!}{z^p}$$

dir.

İspat. Kısmi integrasyon uygulanarak istenen sonuç elde edilir. ■

Teorem 3.23 *(Boyadzhiev 2007b)* $\forall p \in \mathbb{N}$,*Re*$(a) > 0$ *ve* $|t| <$ *Re*(a) *olmak üzere*

$$S(t,a,p) = \frac{t^p}{p}(\Psi(a)+\gamma) + \sum_{k=0}^{p-1}\binom{p-1}{k} g(k,a-t)\, t^{p-1-k} - g(p-1,a)$$

dır. Burada $g(n,a)$ *(3.16)' da verilen eşitliktir.*

İspat. Uyarı 3.12' den

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\zeta(n+1,a)\, t^n &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1} z^n t^n}{n!}\right\}\frac{e^{az}logz}{1-e^z}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \left(1-e^{-tz}\right)\frac{e^{az}logz}{1-e^z}dz\end{aligned} \tag{3.18}$$

elde edilir. Bu eşitlikte her iki tarafı t^{p-1} ile çarpıp t' ye göre integral alınırsa

$$S(t,a,p) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta(n+1,a)}{n+p}t^{n+p} = \frac{1}{2\pi i}\int_C\left\{\int_0^t y^{p-1}\left(1-e^{-zy}\right)dy\right\}\frac{e^{az}logz}{1-e^z}dz$$

bulunur. Lemma 3.22' den

$$\begin{aligned}S(t,a,p) &= \frac{t^p}{p}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{az}logz}{1-e^z}dz\right\} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{p-1}\binom{p-1}{k}t^{p-1-k}\left\{\frac{k!}{2\pi i}\int_C \frac{z^{-k-1}e^{(a-t)z}logz}{1-e^z}dz\right\} \\ &\quad - \frac{(p-1)!}{2\pi i}\int_C \frac{z^{-p}e^{az}logz}{1-e^z}dz\end{aligned} \tag{3.19}$$

elde edilir. İlk integral (3.8)' den $\Psi(a)+\gamma$' dır. Yukarıdaki integrallerde (3.16) kullanılırsa istenen sonuç elde edilir. ■

Teorem 3.24 *(Boyadzhiev 2007b)* $\forall p \in \mathbb{N}$, *Re*$(a) > 0$ *ve* $|t| <$ *Re*(a) *olmak üzere*

$$\begin{aligned}T(t,a,p) &= \frac{t^p}{p}(\Psi(a)+\gamma) + \frac{1}{(p-1)!}\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{k+1}\binom{p-1}{k}g(k,a)\, t^{p-1-k} \\ &\quad - \frac{(-1)^p}{p!}g(p,a-t)\end{aligned}$$

dir.

İspat. (3.18)' de p defa t' ye göre integral alırsak

$$T(t,a,p)=\sum_{n=1}^{\infty}\zeta(n+1,a)\frac{t^{n+p}}{(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}=\frac{1}{2\pi i}\int_C Q(t,z,p)\frac{e^{az}logz}{1-e^z}dz$$

elde edilir. Burada

$$Q(t,z,p)=\frac{t^p}{p!}+\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^{k+1}}{(p-k-1)!}z^{-k-1}t^{p-k-1}-(-1)^p z^{-p}e^{-tz}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}T(t,a,p) &= \frac{t^p}{p!}\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{e^{az}logz}{1-e^z}dz+\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^{k+1}}{(p-k-1)!}t^{p-k-1}\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{z^{-k-1}e^{az}logz}{1-e^z}dz\\ &\quad -\frac{(-1)^p}{2\pi i}\int_C\frac{z^{-p}e^{(a-t)z}logz}{1-e^z}dz\end{aligned}$$

bulunur. (3.8) ve (3.16)' dan istenen sonuç elde edilir. ■

Teorem 3.25 *(Boyadzhiev 2007b)* $|\lambda|\leq 1$, $\lambda\neq 1$, $Re(a)>0$, $|t|<Re(a)$ *olmak üzere* $p=1,2,\ldots$ *için*

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\Phi(\lambda,n+1,a)\frac{t^{n+p}}{n+p}\\ &=\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p-1}{k}\left[\Phi_s'(\lambda,-k,a-t)+\Psi(k+1)\Phi(\lambda,-k,a-t)\right]t^{p-1-k}\\ &\quad-\left[\Phi_s'(\lambda,1-p,a)+\Psi(p)\Phi(\lambda,1-p,a)\right]\end{aligned}$$

dır.

İspat. (3.11)' den

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(\lambda,n+1,a)t^n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left(1-e^{-tz}\right)\frac{e^{az}logz}{1-\lambda e^z}dz$$

elde edilir. Bu eşitlikte her iki tarafı t^{p-1} ile çarpıp t' ye göre integral alınırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(\lambda,n+1,a)\frac{t^{n+p}}{n+p}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left\{\int_0^t y^{p-1}\left(1-e^{-zy}\right)dy\right\}\frac{e^{az}logz}{1-\lambda e^z}dz$$

bulunur. Burada gerekli işlemler yapıldığında $1 - e^z$ yerine $1 - \lambda e^z$ gelerek (3.19)' daki ifadenin bir benzeri elde edilir.(3.12) ile ilk integral (3.17) ile de ikinci ve üçüncü integrallerin değerleri hesaplanır ve gerekli işlemlerden sonra

$$-\Phi(\lambda, 1, a)\frac{t^p}{p} + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} \left[\Phi_s'(\lambda, -k, a-t) + \Psi(k+1)\Phi(\lambda, -k, a-t)\right] t^{p-1-k}$$
$$-\left[\Phi_s'(\lambda, 1-p, a) + \Psi(p)\Phi(\lambda, 1-p, a)\right]$$

bulunur. ■

4. BULGULAR

4.1. Poly-üstel fonksiyonlar katsayılı serilerin Hesaplanması

Lemma 4.1 *$Re(a) > 0$, $x \in \mathbb{C}$, $s \in \mathbb{C} / \{1, 2, \ldots\}$ için*

$$\frac{d}{ds}(e_s(x,a)) + \Psi(1-s)\, e_s(x,a) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_C z^{s-1} e^{az} e^{xe^z} logz\; dz \tag{4.1}$$

dir. $s = -n$ alınırsa

$$g(n,a) \equiv \frac{d}{ds}(e_s(x,a))_{|s=-n} + \Psi(1+n)\, e_{-n}(x,a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C z^{-n-1} e^{az} e^{xe^z} logz\; dz \tag{4.2}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\Psi(s)$ digamma fonksiyonudur.

İspat. $Re(a) > 0$ olmak üzere

$$I(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_C z^{s-1} e^{az} e^{xe^z} dz$$

olsun. Bu durumda

$$e_s(x,a) = \Gamma(1-s)\, I(s)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(e_s(x,a)) &= -\Gamma'(1-s)\, I(s) + \Gamma(1-s)\, I'(s) \\ &= -\Psi(1-s)\, e_s(x,a) + \Gamma(1-s)\, I'(s) \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda

$$\frac{d}{ds}\left(e_s\left(x,a\right)\right)+\Psi\left(1-s\right)e_s\left(x,a\right)=\Gamma\left(1-s\right)I^{'}\left(s\right)=\frac{\Gamma\left(1-s\right)}{2\pi i}\int_C z^{s-1}e^{az}e^{xe^z}logz\ dz$$

dir. Özel olarak $s=-n$ alırsak (4.2) elde edilir. ∎

Not: $g(n,a)$ (4.2) eşitliği olmak üzere

$$\frac{d}{da}g\left(m,a\right)=mg\left(m-1,a\right) \tag{4.3}$$

dır. (4.2)' den yararlanarak kolayca elde edilir.

Önerme 4.2 *$Re\left(a\right)>0$, $x\in\mathbb{C}$ için*

$$\sum_{n=0}^{\infty}e_{1+n}\left(x,a\right)t^n=e_1(x,a-t)$$

dir.

İspat. (3.14)' den

$$e_{n+1}\left(x,a\right)=\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{2\pi in!}\int_C z^ne^{az}e^{xe^z}logz\ dz$$

dir. Bu eşitlikte her iki tarafı t^n ile çarpıp $n\geq 0$ üzerinden toplam alırsak

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}e_{1+n}\left(x,a\right)t^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{2\pi in!}\int_C z^ne^{az}e^{xe^z}logz\ dz\right)t^n && (4.4)\\ &= \frac{-1}{2\pi i}\int_C\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n z^nt^n}{n!}\right)e^{az}e^{xe^z}logz\ dz\\ &= \frac{-1}{2\pi i}\int_C e^{-tz}e^{az}e^{xe^z}logz\ dz\\ &= \frac{-1}{2\pi i}\int_C e^{z(a-t)}e^{xe^z}logz\ dz && (4.5)\end{aligned}$$

bulunur. ∎

Lemma 4.3 *$p\in\mathbb{N}$ ve $z\in\mathbb{C}$ için*

$$\int_0^t y^{p-1}e^{-zy}dy=e^{-tz}\sum_{k=0}^{p-1}k!\binom{p-1}{k}\frac{t^{p-1-k}}{z^{k+1}}-\frac{(p-1)!}{z^p}$$

dir.

İspat. $(p-1)$ defa kısmi integrasyon uygulanırsa istenen sonuç elde edilir. ■

Teorem 4.4 *$Re\,(a) > 0$, $x \in \mathbb{C}$ ve $p \in \mathbb{N}$ olmak üzere*

$$\sum_{n=0}^{\infty} e_{1+n}(x,a)\frac{t^{n+p}}{n+p} = g(p-1,a) - \sum_{k=0}^{p-1}\binom{p-1}{k}t^{p-1-k}g(k,a-t)$$

dir.

İspat. (4.4)' den

$$\sum_{n=0}^{\infty} e_{1+n}(x,a)\,t^{n} = \frac{-1}{2\pi i}\int_C e^{-tz}e^{az}e^{xe^z}logz\ dz$$

Her iki tarafı t^{p-1} ile çarpıp t üzerinden integral alınırsa. Bu durumda

$$\int_0^t\left(\sum_{n=0}^{\infty} e_{1+n}(x,a)\,t^{n+p-1}\right)dt = \frac{-1}{2\pi i}\int_C\left(\int_0^t t^{p-1}e^{-tz}dt\right)e^{az}e^{xe^z}logz\ dz$$

dir. Lemma 4.3' den

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} e_{1+n}(x,a)\frac{t^{n+p}}{n+p} &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\left[\frac{(p-1)!}{z^p} - e^{-tz}\sum_{k=0}^{p-1}k!\binom{p-1}{k}\frac{t^{p-1-k}}{z^{k+1}}\right]e^{az}e^{xe^z}logz\ dz\\ &= (p-1)!\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C z^{-p}e^{az}e^{xe^z}logz\ dz\\ &\quad-\sum_{k=0}^{p-1}k!\binom{p-1}{k}t^{p-1-k}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_C z^{-(k+1)}e^{z(a-t)}e^{xe^z}logz\ dz\right)\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Lemma 4.1' den istenen sonuç elde edilir. ■

Lemma 4.5 *$z \in \mathbb{C}$ için aşağıdaki integrali p defa uygularsak*

$$\int_0^t\int_0^t\ldots\int_0^t e^{-yz}dydy\ldots dy = \sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^{k+1}}{(p-k-1)!}z^{-k-1}t^{p-k-1} - (-1)^p z^{-p}e^{-tz} \quad (4.6)$$

elde edilir.

İspat. p tane integral alınarak istenen sonuç elde edilir. ■

Teorem 4.6 *$Re(a)>0$, $x\in\mathbb{C}$ ve $p\in\mathbb{N}$ olmak üzere*

$$\sum_{n=0}^{\infty} e_{1+n}(x,a)\frac{t^{n+p}}{(n+1)(n+2)\ldots(n+p)} = \frac{(-1)^p}{(p-1)!}g(p-1,a-t) - \sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^{p-k-1}t^{p-k-1}}{(p-k-1)!k!}g(k,a)$$

dir.

İspat. (4.4)' den

$$\sum_{n=0}^{\infty} e_{1+n}(x,a)t^n = \frac{-1}{2\pi i}\int_C e^{-tz}e^{az}e^{xe^z}logz\ dz$$

elde edilir. Her iki tarafın p defa t üzerinden integrali alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} e_{1+n}(x,a)\frac{t^{n+p}}{(n+1)(n+2)\ldots(n+p)} = \frac{-1}{2\pi i}\int_C\left(\int_0^t\int_0^t\ldots\int_0^t e^{-tz}dtdt\ldots dt\right)e^{az}e^{xe^z}logz\ dz$$

bulunur. (4.6)' dan

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} e_{1+n}(x,a)\frac{t^{n+p}}{(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_C\left((-1)^p z^{-p}e^{-tz} - \sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^{k+1}}{(p-k-1)!}z^{-k-1}t^{p-k-1}\right)e^{az}e^{xe^z}logz\ dz\\
&= \frac{(-1)^p}{2\pi i}\int_C z^{-p}e^{z(a-t)}e^{xe^z}logz\ dz\\
&\quad -\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^{k+1}}{(p-k-1)!}t^{p-k-1}\frac{1}{2\pi i}\int_C z^{-k-1}e^{az}e^{xe^z}logz\ dz
\end{aligned}$$

şeklini alır. Lemma 4.1' den istenen sonuç elde edilir. ■

Tanım 4.7 *$Re(a)>0$, $x\in\mathbb{C}$ ve $s\in\mathbb{C}$ olmak üzere*

$$l(x,a) = \frac{d}{ds}(e_s(x,a))_{|s=0} = -\sum_{n=0}^{\infty} log(n+a)\frac{x^n}{n!} \tag{4.7}$$

olarak tanımlansın.

Önerme 4.8 *$Re(a) > 0$, $x \in \mathbb{C}$ ve $s \in \mathbb{C}$ olmak üzere poly-üstel fonksiyonların türev operatörü cinsiden ifadesi*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\left(e_s(x,a)\right)_{|s=-m} &= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}\left(x\frac{d}{dx}\right)^{k} l(x,a) \\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}\sum_{j=0}^{m}\left\{ {m \atop j} \right\}x^{j}\left(\frac{d}{dx}\right)^{k} l(x,a) \qquad (4.8)\\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}\sum_{j=0}^{m}\left\{ {m \atop j} \right\}x^{j} l(x,a+j) \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

dır.

İspat. Önerme 3.2' den istenen sonuç elde edilir. ■

Önerme 4.9 *$Re(a) > 0$, $x \in \mathbb{C}$ için*

$$l(x,a) = \int_{0}^{\infty}\left(e^{-at}e^{xe^{-t}} - e^{x-t}\right)\frac{dt}{t} \qquad (4.10)$$

dir.

İspat.

$$\frac{1}{n+a} = \int_{0}^{\infty} e^{-(n+a)t}dt$$

dir. Burada a' ya göre integral alınırsa

$$log(n+a) = \int_{0}^{\infty}\left(e^{-t} - e^{-(n+a)t}\right)\frac{dt}{t}$$

elde edilir. Bu eşitliği x^n ile çarpıp $n \geq 0$ üzerinden toplam alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} log(n+a)\frac{x^n}{n!} = \int_{0}^{\infty}\left[\left(e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right) - e^{-at}\left(\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nt}\frac{x^n}{n!}\right)\right]\frac{dt}{t}$$

bulunur. Buradan istenen sonuç elde edilir. ■

Önerme 4.10 *$Re(a) > 0$, $x \in \mathbb{C}$ ve $s \in \mathbb{C}$ olmak üzere poly-üstel fonksiyonlar üstel polinomlar cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilirler.*

$$\frac{d}{ds}\left(e_s(x,a)\right)_{|s=-m} = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}\left(\int_{0}^{\infty}\left[e^{-at}e^{xe^{-t}}\Phi_m\left(xe^{-t}\right) - e^{x-t}\Phi_m(x)\right]\frac{dt}{t}\right) \qquad (4.11)$$

dir.

İspat. (4.8)' den

$$\frac{d}{ds}\left(e_s\left(x,a\right)\right)_{|s=-m}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}\left(x\frac{d}{dx}\right)^{m}l\left(x,a\right)$$

bulunur. (4.10)' dan

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left(e_s\left(x,a\right)\right)_{|s=-m}&=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}\left(x\frac{d}{dx}\right)^{m}\int_0^{\infty}\left(e^{-at}e^{xe^{-t}}-e^{x-t}\right)\frac{dt}{t}\\&=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}\left(\int_0^{\infty}\left[\left(e^{-at}\left(x\frac{d}{dx}\right)^{m}e^{xe^{-t}}\right)-e^{-t}\left(x\frac{d}{dx}\right)^{m}e^{x}\right]\frac{dt}{t}\right)\end{aligned}$$

dir. Buradan istenen sonuç elde edilir. ■

Sonuç 4.11 *$Re\left(a\right)>0$, $x\in\mathbb{C}$ ve $s\in\mathbb{C}$ için Φ_m üstel polinom olmak üzere*

$$\begin{aligned}&\frac{d}{ds}\left(e_s\left(x,a\right)\right)_{|s=-m}+e^{x}e_1\left(-t\right)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}\Phi_m\left(x\right)\\&=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}\int_0^{\infty}e^{-at}e^{xe^{-t}}\Phi_m\left(xe^{-t}\right)\frac{dt}{t}\end{aligned}$$

dir.

İspat. (4.11)' dan

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left(e_s\left(x,a\right)\right)_{|s=-m}&=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}\left(\int_0^{\infty}\left[e^{-at}e^{xe^{-t}}\Phi_m\left(xe^{-t}\right)-e^{x-t}\Phi_m\left(x\right)\right]\frac{dt}{t}\right)\\&=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}\int_0^{\infty}e^{-at}e^{xe^{-t}}\Phi_m\left(xe^{-t}\right)\frac{dt}{t}-\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}\int_0^{\infty}e^{x-t}\Phi_m\left(x\right)\frac{dt}{t}\\&=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}\int_0^{\infty}e^{-at}e^{xe^{-t}}\Phi_m\left(xe^{-t}\right)\frac{dt}{t}-\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}e^{x}\Phi_m\left(x\right)\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt\\&=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}\int_0^{\infty}e^{-at}e^{xe^{-t}}\Phi_m\left(xe^{-t}\right)\frac{dt}{t}-\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}e^{x}\Phi_m\left(x\right)e_1\left(-t\right)\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Önerme 4.12 *$Re(a) > 0$, $x \in \mathbb{C}$ ve γ Euler sabiti olmak üzere*

$$l(x,a) = \gamma e^{x} + \frac{1}{2\pi i}\int_{C} z^{-1}e^{az}e^{xe^{z}}\,logz\;dz \tag{4.12}$$

dir.

İspat. (4.2)' de $n = 0$ alırsak

$$\frac{d}{ds}\left(e_{s}(x,a)\right)_{|s=0} + \Psi(1)\,e_{0}(x,a) = \frac{\Gamma(1)}{2\pi i}\int_{C} z^{-1}e^{az}e^{xe^{z}}\,logz\;dz$$

Önerme 1.18 i. ve (4.7)' den istenen sonuç elde edilir. ∎

Sonuç 4.13 *$Re(a) > 0$, $x \in \mathbb{C}$ ve $|t| < Re(a)$ olmak üzere*

$$\sum_{n=0}^{\infty} e_{1+n}(x,a)\frac{t^{n+1}}{n+1} = l(x,a) - l(x,a-t)$$

dir.

İspat. (4.4)' de t' ye göre integral alırsak

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} e_{1+n}(x,a)\frac{t^{n+1}}{n+1} &= \frac{-1}{2\pi i}\int_{C}\left(\int_{0}^{t} e^{-tz}dt\right)e^{az}e^{xe^{z}}\,logz\;dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C} z^{-1}e^{az}e^{xe^{z}}\,logz dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{C} z^{-1}e^{z(a-t)}e^{xe^{z}}\,logz\;dz\end{aligned}$$

bulunur. (4.12)' den yararlanarak istenen sonuç elde edilir. ∎

4.2. Frobenius Eulerian Polinomlarının Geometrik Polinomlar Cinsinden İfadesi

(1.2) ve (1.4) ' den

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x,\lambda)\frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{1-\lambda}{e^t-\lambda}\right).e^{xt} \\ &= \left(\frac{\lambda^{-1}-1}{\lambda^{-1}e^t-1}\right)e^{xt} \\ &= \frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{1}{t}\frac{te^{xt}}{\lambda^{-1}e^t-1} \\ &= \frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\left(x,\lambda^{-1}\right)\frac{t^n}{n!} \\ &= \frac{1-\lambda}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta_{n+1}\left(x,\lambda^{-1}\right)}{n+1}\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

Bu durumda

$$H_n(x,\lambda) = \frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{\beta_{n+1}\left(x,\lambda^{-1}\right)}{n+1} \tag{4.13}$$

elde edilir. Burada $x=0$ alırsak

$$H_n(\lambda) = \frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{\beta_{n+1}\left(\lambda^{-1}\right)}{n+1} \tag{4.14}$$

elde edilir.Böylece Frobenius Eulerian polinomları ve sayıları ile Apostol-Bernoulli fonksiyonu ve sayıları arasında ilişki kurulmuş olur.

Önerme 4.14 $\lambda \neq 1$ *olmak üzere*

$$H_n(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}H_k(\lambda)\,x^{n-k} \tag{4.15}$$

dır.

İspat. (1.2)' den

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x,\lambda)\frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{1-\lambda}{e^t-\lambda}\right).e^{xt} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}H_n(\lambda)\frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\frac{t^n}{n!}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada Cauchy çarpımı yapılarak istenen sonuç elde edilir. ■

Önerme 4.15 $\lambda \neq 0, 1$ *olmak üzere*

$$H_n(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H_k(\lambda) \tag{4.16}$$

dır.

İspat. Önerme 1.4 i.' de $x = 0$ alınırsa

$$H_n(1, \lambda) = \lambda H_n(\lambda)$$

elde edilir. (4.15)' de $x = 1$ alınırsa

$$H_n(1, \lambda) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H_k(\lambda) 1^{n-k}$$

bulunur. Buradan istenen sonuç elde edilir. ∎

Önerme 4.16 $\lambda \neq 1$ *için*

$$H_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} k! \left(\frac{1}{\lambda - 1} \right)^k \tag{4.17}$$

dır.

İspat. Önerme 1.7.iii' de $\beta_n(\lambda)$ yerine (4.14) eşitliğini kullanırsak istenen sonuç elde edilir. ∎

Önerme 4.17 $\lambda \neq 1$ *için*

$$H_n(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \sum_{j=0}^{k} \left\{ {k \atop j} \right\} j! \left(\frac{1}{\lambda - 1} \right)^j \tag{4.18}$$

dır.

İspat. (4.15)' de $H_k(\lambda)$ yerine (4.17) yazılarak istenen sonuç elde edilir. ∎

Sonuç 4.18 $\lambda \neq 1$ *için*

$$H_k(\lambda) = w_k\left(\frac{1}{\lambda - 1} \right) \tag{4.19}$$

veya

$$H_k\left(\frac{z+1}{z} \right) = w_k(z)$$

dır. Bu durumda $H_k\left(\frac{z+1}{z}\right)$ *Frobenius Eulerian sayısı* z*' ye bağlı bir polinomdur.*

İspat. (4.17)' da (1.13) geometrik polinomların tanımı kullanılırsa istenen sonuç elde edilir. ■

Sonuç 4.19 $\lambda \neq 1$ *için*

$$H_n(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} w_k \left(\frac{1}{\lambda - 1} \right)$$

dir.

İspat. (4.15)' de $H_k(\lambda)$ yerine (4.19) yazılarak istenen sonuç elde edilir. ■

5. SONUÇ

Bu çalışma kapsamında bazı özel fonksiyonların Hankel çevre integrali gösterimi verildi. Bu gösterim yardımıyla katsayıları Hurwitz Zeta ve Lerc Zeta fonksiyonları olan serilerin özellikleri incelendi. Ayrıca katsayıları poly-üstel fonksiyonlar olan seriler üzerinde çalışıldı. Frobenius Eulerian polinomlarının geometrik polinomlar cinsinden bazı bağıntıları elde edildi.

6. KAYNAKLAR

APOSTOL, T. M. 1974. Mathematical Analysis, Addison Wesley Publishing Company, California.

APOSTOL, T. M. 1976. Introduction to Analytic Number Theory. Springer-Verlag, New York.

APOSTOL, T. M. and Vu, T. H. 1984. Dirichlet series related to the Riemann Zeta function, *Journal of Number Theory* 19, 85-102.

BERNT, B. C. 1985. Ramanujuan' s Notebooks, New York, Berlin.

BOYADZHIEV, K. N. 2005. A series transformation formula and related polynomials, *İnternational Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* 23, 3849-3866.

BOYADZHIEV, K. N. 2007a. Apostol-Bernoulli functions, derivative polynomials and Eulerian polynomials, *arxiv.org/pdf/*07.10.1124.

BOYADZHIEV, K. N. 2007b. Evaluation of series with Hurwitz and Lerch Zeta function coefficients by using Hankel contour integrals, *Applied Mathematics and Computation* 186, 1559-1571.

BOYADZHIEV, K. N. 2007c. Polyexponentials, *arxiv.org/pdf/*07. 10. 1332.

BOYADZHIEV, K. N. , GADIYAR, H. G. and PADMA, R. 2008a. The values of an Euler sum at the negative integers and a relation to a certain convolution of Bernoulli numbers, *Bull. Korean Math. Soc.* 45, No:2, 277-283.

BOYADZHIEV, K. N. , GADIYAR, H. G. and PADMA, R. 2008b. Alternating Euler sums at the negative integers, *arxiv.org/pdf/*08.11. 4437.

BOYADZHIEV, K. N. 2008. On the Taylor coefficients of the Hurwitz Zeta function, *arxiv.org/pdf/*08. 12. 1303.

BOYADZHIEV, K. N. Derivative polynomials for tanh, tan, sech, and sec in explicit form, *Fibonacchi Quarterly* (to appear)

CARLITZ, L. 1959. Eulerian numbers and polynomials, *Mathematics Magazine*, Vol: 32, No: 5, 247-260.

CHEON, GI-SANG. 2003. A note on the Bernoulli and Euler Polynomials, *Applied Mathematics Letters* 16, 365-368.

CVIJOVIC, D. and SRIVASTAVA, H. M. 2009. Some discrete Fourier transform pairs associated with the Lipschitz-Lerch Zeta function, *Applied Mathematics Letters,* Vol: 22, No: 7, 1081-1084.

GRAHAM, R. L. , KNUTH, D. E. , PATASHNIK, O. 1989. Concrete Mathematics, Addison-Wesley, New York.

LEHMER, D. H. 1988. A new approach to Bernoulli Polynomials, *American Math. Monthly* 95, 905-911.

PAN, H. and SUN, Z. W. 2006. New identities involving Bernoulli and Euler Polynomials, *J. Combin. Theory Ser. A* 113, 156-175.

SRIVASTAVA, H. M. 2000. Some formulas for the Bernoulli and Euler Polynomials at rational arguments, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 129-77.

SRIVASTAVA, H. M. CHOI, J. 2001. Series Associated with the Zeta and Related Functions, Springer-Verlag New York.

SRIVASTAVA, H. M. and PINTER A. 2004. Remarks on some Relationships between the Bernoulli and Euler Polynomials, *Applied Mathematics Letters*, 375-380.

SUN, Z. W. 2002. İntroduction to Bernoulli and Euler Polynomials, A lecture given in Taiwan on June 6.

SUN, Z. W. 2003. Combinatorial Identities in Dual Sequences.*European Journal of Combinatorics* 24, 709-718.

WANG, W., JIA, C. , WANG, T. 2008. Some results on the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials, *Computer and Mathematics with Applications* 55, 1322-1332.

WU, K. J., SUN, Z. W. and PAN, H. 2004. Some identities for Bernoulli and Euler Polynomials, *Fibonacci Quart.* Vol: 42, No: 4, 295-299.

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Muğla ili Fethiye ilçesinde doğdum. İlk-orta ve lise öğrenimimi Muğla ili Fethiye ilçesinde tamamladım. 2003 yılında girdiğim Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2007 yılında matematikçi olarak mezun oldum. 2007 yılı güz döneminde Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilimdalında yüksek lisans öğrenimime başladım.