T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

SINIRLI DAĞILIMLI ÖRGÜLER, PRIESTLEY UZAYLARI VE ONLARIN ARASINDAKİ DUAL KATEGORİK DENKLİKLER

Kenan AYKUR

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OCAK 2020

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

SINIRLI DAĞILIMLI ÖRGÜLER, PRIESTLEY UZAYLARI VE ONLARIN ARASINDAKİ DUAL KATEGORİK DENKLİKLER

Kenan AYKUR

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OCAK 2020

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SINIRLI DAĞILIMLI ÖRGÜLER, PRIESTLEY UZAYLARI VE ONLARIN ARASINDAKİ DUAL KATEGORİK DENKLİKLER

Kenan AYKUR

MATEMATİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 17/01/2020 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/~~Oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa DEMİRCİ (Danışman)
Doç. Dr. Sadık BAYHAN
Dr. Öğr. Üyesi Sevda BARUT

ÖZET

SINIRLI DAĞILIMLI ÖRGÜLER, PRIESTLEY UZAYLARI VE ONLARIN ARASINDAKİ DUAL KATEGORİK DENKLİKLER

Kenan AYKUR

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Mustafa DEMİRCİ

Ocak 2020; 81 sayfa

Bu tez çalışmasında, kategori teorisi baz alınarak ağırlıklı olarak iki konu üzerinde durulmuştur. Bu konular "Priestley Dualitesi" ve "Priestley Dualitesinin Bir Genişlemesi" başlıkları altında ele alınmıştır.

Priestley dualitesi, sınırlı ve dağılımlı örgülerin kategorisi ile Priestley uzaylarının kategorisinin denk kategoriler olduğunu ifade eder. Bunu yaparken denk izleç (equivalence functor) denilen bir çeşit kategorik fonksiyonlardan yararlanılmıştır. Bu izleçler tez içerisinde açıkça ifade edilmiştir. Bu şekilde; Stone cebirleri, Kleene cebirleri, Ockham cebirleri, De Morgan cebirleri, Wajsberg cebirleri gibi bir çok alanda matematiğe katkı sağladığı görülen örgü teorisinin geliştirilmesine katkı sağlanması amaçlanmıştır. Bu alanda özellikle 1970'li yılların başlarında Hilary Priestley'in yaptığı çalışmalar oldukça ünlüdür.

Priestley Dualitesinin Bir Genişlemesi başlığı altında ise aslında Priestley dualitesinin bir genellemesi aynı yöntemle formülüze edilmiştir. Bu genellemeyi vermemizin sebebi; Priestley dualitesinin çok fazla koşul içermesidir. Çünkü matematikte böyle yapılar her zaman bulunamayabilir. Bunu yaparken de örgü homomorfizmlerini bitişme koruyan fonksiyonlar ve sürekli ve sıra-korur fonksiyonları ise Priestley bağıntıları olarak genişlettik. Bu genellemeyi vermemizin tek sebebi Priestley dualitesinin yapısı değildir. Bu dualiteden yararlanılarak, Halmos-Wright dualitesi denilen, Boole cebirlerinin bir genişletilmiş kategorisi için bir dualite formülüze edilmiştir.

Ayrıca, Boole cebirlerinin kategorisi ile Stone uzaylarının kategorisi arasında bir dual denklik ifade eden meşhur Stone dualitesi, Priestley dualitesinin bir sonucu olarak elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Boole Cebiri, Filtre, Funktor, İdeal, Örgü, Priestley Bağıntısı, Priestley Uzayı, Stone Uzayı

JÜRİ: Prof. Dr. Mustafa DEMİRCİ
Doç. Dr. Sadık BAYHAN
Dr. Öğr. Üyesi Sevda BARUT

ABSTRACT

BOUNDED DISTRIBUTIVE LATTİCES, PRIESTLEY SPACES AND DUAL CATEGORİCAL EQUIVALENCES BETWEEN THEM

Kenan AYKUR

MSc Thesis in MATHEMATICS
Supervisor: Prof. Dr. Mustafa DEMİRCİ
January 2020; 81 pages

In this thesis, two main topics are emphasized based on category theory. These issues are discussed under the sections "Priestley Duality" and "An Extension of Priestley Duality".

Priestley duality states that the category of bounded and distributive lattices and the category of Priestley spaces are equivalent categories. To show this, a pair of categorical functions called equivalence functors are used. These functors are clearly expressed in the thesis. In this way, in many areas, such as Stone algebras, Kleene algebras, Ockham algebras, De Morgan algebras, Wajsberg algebras; contributing to the development of the theory of lattice theory is intended to contribute to mathematics. The work of Hilary Priestley, especially in the early 1970s, is well known in this field.

In the section of "An Extension of Priestley Duality" a generalization of Priestley duality is formulated in the same way. The aim of this generalization is that, Priestley duality involves too many conditions. Because in mathematics, such structures may not always be found. In doing so, we have extended the lattice homomorphisms to join-homomorpisms and the continuous and order-preserving functions to Priestley relations. The structure of Priestley duality is not the only reason to give this generalisation. By making use of this duality, a duality for an extended category of Boolean algebras, the so-called Halmos-Wright duality, has been formulated.

In addition, the renowned Stone duality, that is stating a dual equivalence between the category of Boolean algebras and the category of Stone spaces, is obtained as a consequence of Priestley duality.

KEYWORDS: Boolean Algebra, Filter, Functor, Ideal, Lattice, Priestley Relation, Priestley Space, Stone Space

COMMITTEE: Prof. Dr. Mustafa DEMİRCİ
Assoc. Prof. Dr. Sadık BAYHAN
Asst. Prof. Dr. Sevda BARUT

ÖNSÖZ

Bilim dünyasına önemli katkı sağlayacağını düşündüğüm ve büyük umutlarla hazırlamış olduğum bu çalışmada, tez konusunun belirlenmesi, gerekli kaynakların temin edilmesindeki desteği, değerli görüş ve önerileri, kısacası tüm desteğini esirgemeyen kendisiyle çalışmaktan mutluluk duyduğum değerli hocam Prof. Dr. Mustafa DEMİRCİ'ye ve her zaman yanımda olan aileme şükranlarımı iletirim.

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Sınırlı Dağılımlı Örgüler, Priestley Uzayları ve Onların Arasındaki Dual Kategorik Denklikler" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

17/01/2020
Kenan AYKUR

SİMGELER

Simgeler:

$\forall$	: Her
$\exists$	: Bazı
$\Rightarrow$	: İse
$\Longleftrightarrow$	: Ancak ve ancak
$\inf A$	: A kümesinin en büyük alt sınırı
$\sup A$	: A kümesinin en küçük üst sınırı
$\mathcal{P}(X)$	: X kümesinin kuvvet kümesi
$\mathbf{Set}$	: Tüm kümelerin kategorisi
$\mathbf{Top}$	: Tüm topolojik uzayların kategorisi
$\mathbf{Rel}$	: İkili işlemler kategorisi
$\mathbf{Ob}(\mathbf{A})$	: $\mathbf{A}$ kategorisinin tüm objelerinin sınıfı
$\mathbf{Mor}(\mathbf{A})$	: $\mathbf{A}$ kategorisinin tüm morfizmlerinin sınıfı
$\mathbf{A}^{\mathbf{op}}$	: $\mathbf{A}$ kategorisinin duali
$\approx$	: Doğal izomorfik bağıntısı
$\mathcal{PF}(L)$	: $(L,\leq)$ in asal filtrelerinin kümesi
$\varphi(a)$	: $(L,\leq)$ in a noktasını içeren asal filtrelerinin kümesi
$\mathbf{BDL}$	: Sınırlı ve Dağılımlı örgülerin kategorisi
$\mathbf{PRS}$	: Priestley uzaylarının kategorisi
$\overline{A}$	: A kümesinin kapanışı
$(X,\tau,\leq)$	: Priestley Uzayı
$\mathbf{JBDL}$	: Genişletilmiş Sınırlı ve Dağılımlı örgülerin kategorisi
$\mathbf{PREL}$	: Genişletilmiş Priestley uzaylarının kategorisi
$\mathbf{BA}$	: Boole cebirlerinin kategorisi
$\mathbf{JBA}$	: Genişletilmiş Boole cebirlerinin kategorisi
$\mathbf{Stone}$	: Stone uzaylarının kategorisi
$\mathbf{RStone}$	: Genişletilmiş Stone uzaylarının kategorisi

1. GİRİŞ

Günümüzde modern bilgisayarların temelini oluşturan ve Boole Cebirleri olarak bilinen cebirsel yapılar ilk kez George Boole tarafından 1800'lü yıllarda geliştirildi (Boole 1854). Daha sonra Marshall Harvey Stone 1930'ların ikinci yarısında, Boole cebirlerinin, günümüzde Stone uzayları (Johnstone 1986) olarak bilinen kompakt, Hausdorff ve sıfır boyutlu topolojik uzaylar olarak gösterilebildiğini kanıtladı (Stone 1936). Bununla birlikte Kategori Teorisi'nin (Adamek vd. 1990; Lane 1971; Awodey 2010) geliştirilmesi, matematikçilerin Boole cebirlerine topolojik yapılar gözüyle bakabilmesini sağladı. Nitekim objeleri Boole cebirleri ve morfizmleri Boole homomorfizmleri olan $\mathbf{BA}$ kategorisi ile, objeleri Stone uzayları ve morfizmleri sürekli fonksiyonlar olan $\mathbf{Stone}$ kategorisi arasında dual denklik denilen yakın bir ilişki bulmak mümkündür. Güncel literatürde bu denkliğe "Stone Dualitesi" (Erne 2004; Stone 1936) adı verilir. Stone dualitesi, başta mantık (Clark ve Davey 1998; Halmos 1955; Sambin ve Vaccaro 1988), topoloji (Erne 2004; Gehrke 2016; Johnstone 1986; Sambin ve Vaccaro 1988), cebir (Clark ve Davey 1998), bilgisayar bilimleri (Abramsky ve Jung 1994; Gehrke 2009; Pratt 1995) ve otomasyon teorisi (Gehrke 2009; Gehrke 2016) olmak üzere bir çok alanda geniş uygulamalara sahiptir. Bu tezin amaçlarından biri objeleri Boole cebirleri fakat morfizmleri bitişme koruyan fonksiyonlar olan $\mathbf{JBA}$ kategorisi ile, yine objeleri Stone uzayları fakat morfizmleri, Boole bağıntıları (Halmos 1955) olan $\mathbf{RStone}$ kategorisi arasında bir dual denklik inşaa etmektir. 4.5. Kısımda bu problem üzerinde durulmuştur.

Bu tezde Boole cebirleri, cebirsel yapılar olmaktan ziyade, kısmi sıralı kümelerden yararlanılarak ele alınmıştır. Aslında Boole cebirlerinin bir genişlemesi olarak tanımlanan dağılımlı örgülerin, matematiğe; Stone cebirleri, Kleene cebirleri, Ockham cebirleri, De Morgan cebirleri, Wajsberg cebirleri gibi sayısız alanda katkı sağladığı görülmüştür (Adams ve Priestley 1987; Cornish ve Fowler 1977; Martinez 1988; Stone 1936). Bu bağlamda Hillary Priestley 1970'lerin başlarında sınırlı ve dağılımlı örgülerin, Priestley uzayları denilen bazı kısmi sıralı Stone topolojileri olarak gösterilebileceğini kanıtladı (Priestley 1970; Priestley 1972). Priestley, bu buluşuyla dağılımlı örgülere alternatif bir bakış kazandırmıştı. Kategorik olarak ifade edecek olursak; objeleri sınırlı ve dağılımlı örgüler ve morfizmleri örgü homomorfizmleri olan $\mathbf{BDL}$ kategorisi ile, objeleri Priestley uzayları ve morfizmleri sürekli ve sıra-korur fonksiyonlar olan $\mathbf{PRS}$ kategorisi dual olarak denk kategorilerdir. Bu dual denklik güncel literatürde "Priestley Dualitesi" olarak adlandırıldı (Davey ve Priestley 1990; Farley 1996). Priestley dualitesi baz alınarak sadece sınırlı ve dağılımlı örgüler için değil, yarı örgüler için de kurulan dualite çalışmaları mevcuttur (Bezhanishvili ve Jansana 2008;Bezhanishvili ve Jansana 2011; Hansoul ve Poussart 2008).

Literatürde Priestley dualitesini konu edinen herhangi bir Türkçe kaynak bulunmamaktadır. Bu eksikliği gidermek ve gelecek çalışmalara zemin oluşturmak için Priestley dualitesi, dual denklik denilen başka bir boyutuyla 4.1. Kısımda ele alınmıştır.

Priestley dualitesi; örgü homomorfizmleri, sürekli fonksiyonlar ve sıra-korur fonksiyonlar gibi bir çok özelliği bir arada bulunduran matematiksel yapılardan yararlanılarak elde edilir. Bu gibi kavramları bulunduran matematiksel yapılar her zaman bulunamayabilir. Bu eksiklik bazı çalışmalarda konu edindi (Cignoli vd. 1991). Tez içerisinde bu konu farklı bir boyutuyla ele alınmıştır. Objeleri yine sınırlı ve dağılımlı örgüler, ancak morfizmleri örgü homomorfizmlerine oranla daha az koşul gerektiren bitişme koruyan fonksiyonlar (Bezhanishvili ve Jansana 2008; Cignoli 1991) olan $\mathbf{JBDL}$ kategorisi ile, objeleri Priestley uzayları, fakat morfizmleri Priestley bağıntıları (Cignoli 1991) olan $\mathbf{PREL}$ kategorisi dual olarak denk kategorilerdir. Burada özellikle $\mathbf{PREL}$ kategorisinin gerçekten bir kategori belirttiği başlı başına bir problemdir. Bu yüzden 4.2. Kısımda ekseriyetle bu problem ele alınmıştır. Ardından 4.3. Kısımda, yukarıda bahsedilen $\mathbf{JBDL}$ ile $\mathbf{PREL}$ kategorilerinin dual olarak denk oldukları gösterilmiş ve bu dual denkliği veren funktorlar açıkça verilmiştir.

Bulgular ve Tartışma bölümüne hazırlık olarak; 2.1. Kısımda bağıntılar, örgüler ve Boole cebirlerinin tanımı ve bazı özellikleri verilmiştir. Tez içerisinde çokça atıfta bulunulan filtre, ideal ve asal filtre gibi bazı temel kavramlar bu bölümde mevcuttur. 2.2. Kısımda; tez içerisinde kullanılacak metoda uygun olarak kategori teorisinin temel bazı özelliklerinden söz edilmiştir. "Materyal ve Metot" başlığı altında ise bazı topolojik kavramlar tanımlanmış; bunların sınırlı, dağılımlı örgüler ve Priestley uzayları ile ilişkisi ele alınmıştır.

2. KAYNAK TARAMASI

2.1. Bağıntılar, Örgüler ve Boole Cebirleri

Tanım 2.1. *X, Y ve Z birer küme olsun.*

(1) *$X \times Y$ nin her alt kümesine X den Y ye bir **bağıntı** denir.*

(2) *R, X ten Y ye bir bağıntı ve $A \subseteq X$ olmak üzere*

$$R(A) = \{y \in Y \mid (\exists x \in A), (x, y) \in R\}$$

*kümesine A nın R altındaki **görüntü kümesi** denir (Cignoli vd. 1991).*

(3) *$x \in X$ olmak üzere*

$$R(\{x\}) = \{y \in Y \mid (x, y) \in R\}$$

*kümesine x in R altındaki **değeri** denir (Cignoli vd. 1991).*

(4) *Y den X e tanımlı*

$$R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in R\}$$

*bağıntısına R nin **ters bağıntısı** denir.*

(5) *$B \subseteq Y$ olmak üzere*

$$\begin{aligned} R^{-1}(B) &= \{x \in X \mid (\exists y \in B), (x, y) \in R\} \\ &= \{x \in X \mid R(\{x\}) \cap B \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

*kümesine B nin R altındaki **ters görüntüsü** denir.*

(6) *$y \in Y$ olmak üzere*

$$R^{-1}(\{y\}) = \{x \in X \mid (x, y) \in R\}$$

*kümesine y nin R^{-1} altındaki **değeri** denir.*

(7) *R, X den Y ye bir bağıntı ve S, Y den Z ye bir bağıntı olmak üzere X den Z ye* *tanımlı*

$$S \circ R = \{(x, z) \in X \times Z \mid (\exists y \in Y),\ (x, y) \in R \text{ ve } (y, z) \in S\}$$

*bağıntısına R ile S nin **bileşke bağıntısı** denir.*

Uyarı 2.1. *X ve Y birer küme ve R, X den Y ye bir bağıntı olmak üzere, $(x, y) \in R$ olması, genellikle xRy ile gösterilir. Ayrıca verilen $x \in X$ ve $y \in Y$ elemanları için $R(\{x\})$ ve $R^{-1}(\{y\})$ kümeleri, çoğu zaman sırayla $R(x)$ ve $R^{-1}(y)$ ile gösterilecektir. Kolayca görülebileceği üzere eğer $A \subseteq B \subseteq X$ ise $R(A) \subseteq R(B) \subseteq Y$ olur. X den X e tanımlı bir bağıntı kısaca "X üzerinde bir bağıntı" olarak okunur.*

Tanım 2.2. *L bir küme ve $\leq$, L üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer $\leq$ bağıntısı aşağıdaki koşulları sağlıyora, bu bağıntıya L üzerinde bir **kısmi sıralama bağıntısı** ve $(L, \leq)$ ikilisine bir **kısmi sıralı küme** denir (Birkhoff 1948).*

(i) *$\forall x \in L$ için $x \leq x$ dir (Yansıma Özelliği),*

(ii) *$\forall x, y \in L$ için $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$ dir (Ters Simetri Özelliği),*

(iii) *$\forall x, y, z \in L$ için $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$ dir (Geçişme Özelliği).*

Bir $(L, \leq)$ kısmi sıralı kümesinde kesin sıralama bağıntısı olarak bilinen $<$ bağıntısı $x < y \Longleftrightarrow x \leq y$ ve $x \neq y$ ile tanımlanır.

Tanım 2.3. *$(L, \leq)$ bir kısmi sıralı küme ve $A \subseteq L$ olsun.*

(i) *$\forall x \in A$ için $x \leq u$ olacak şekilde bir $u \in L$ varsa, u ya A nın bir **üst sınırı** denir.*

(ii) *$\forall x \in A$ için $l \leq x$ olacak şekilde bir $l \in L$ varsa, l ye A nın bir **alt sınırı** denir.*

(iii) *$\forall x \in A$ için $x \leq u$ olacak şekilde bir $u \in A$ varsa, u ya A nın **en büyük elemanı** denir.*

(iv) *$\forall x \in A$ için $l \leq x$ olacak şekilde bir $l \in A$ varsa, l ye A nın **en küçük elemanı** denir.*

Bir $(L, \leq)$ kısmi sıralı kümesi ve $A \subseteq L$ verildiğinde, eğer A nın en küçük veya en büyük elemanı varsa, bunlar simetri özelliği gereği tekdir. Bu tez kapsamında en küçük ve en büyük elemanlar sırayla $\perp$ ve $\top$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.4. *$(L, \leq)$ bir kısmi sıralı küme ve $A \subseteq L$ olsun.*

(1) *Eğer herhangi $x, y \in L$ için $x \in A$ ve $x \leq y$ iken $y \in A$ oluyorsa, A ya **yukarı küme** denir.*

(2) *Eğer herhangi $x, y \in L$ için $x \in A$ ve $y \leq x$ iken $y \in A$ oluyorsa, A ya **aşağı küme** denir (Davey ve Priestley 1990).*

Tanım 2.5. *Bir $(L, \leq)$ kısmi sıralı kümesi verilsin. Eğer L nin hem en küçük hem de en büyük elemanı varsa, $(L, \leq)$ ye **sınırlı**dır denir (Davey ve Priestley 1990).*

Tanım 2.6. *$(L, \leq)$ bir kısmi sıralı küme ve $X \subseteq L$ olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $a \in L$ ye X in **en küçük üst sınırıdır** denir ve $\sup X = a$ yazılır.*

(i) *$\forall x \in X$ için $x \leq a$ dir.*

(ii) *X in her b üst sınırı için $a \leq b$ dir.*

*Benzer şekilde aşağıdaki koşulları sağlayan bir $c \in L$ elemanına X in **en büyük alt sınırıdır** denir ve $\inf X = c$ yazılır.*

(i) *$\forall x \in X$ için $c \leq x$ dir.*

(ii) *X in her b alt sınırı için $b \leq c$ dir.*

Bir kısmi sıralı $(L, \leq)$ kümesi verildiği zaman, herhangi bir $X \subseteq L$ için $\sup X$ (veya $\inf X$) varsa bu öğe tektir.

Tanım 2.7. *$(L, \leq)$ bir kısmi sıralı küme olsun. Eğer $\forall x, y \in L$ için $\sup\{x, y\}$ ve $\inf\{x, y\}$ varsa $(L, \leq)$ ye bir **örgü (lattice)** denir (Birkhoff 1948; Grätzer 2003).*

Bu tez boyunca $\sup\{x, y\}$ yerine $x \vee y$ ve $\inf\{x, y\}$ yerine $x \wedge y$ gösterimleri kullanılacaktır.

Tanım 2.8. *Eğer bir $(L, \leq)$ örgüsü, $\forall a, b, c \in L$ için aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa, bu örgüye **dağılımlı örgü (distributive lattice)** denir (Grätzer 2003; Birkhoff 1948).*

(1) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$,

(2) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Tanım 2.9. *$(L, \leq)$ bir sınırlı ve dağılımlı örgü olsun. Eğer $\forall x \in L$ için $\exists x' \in L$ öyle ki*

$$x \wedge x' = \bot \text{ ve } x \vee x' = \top$$

*oluyorsa $(L, \leq)$ ye bir **Boole cebiri** denir (Halmos 1963; Birkhoff 1948).*

Uyarı 2.2. *$(L, \leq)$ bir sınırlı ve dağılımlı örgü olsun. Kolayca kanıtlanabileceği üzere $\forall x \in L$ için*

$$x \wedge x' = \bot \text{ ve } x \vee x' = \top$$

*olacak şekilde bir $x' \in L$ varsa, bu eleman tekdir. Bu şekilde tanımlı x' elemanına x in **tümleyeni** denir.*

Örnek 2.1. *X boş olmayan bir küme ve $\mathcal{P}(X)$ onun kuvvet kümesi olsun. Bu durumda $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ bir Boole cebiridir. Burada $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ nin en büyük elemanı X, en küçük elemanı $\emptyset$ ve her $A \in \mathcal{P}(X)$ için $A' = A^c = X \setminus A$ dir.*

Örnek 2.2. *X boş olmayan bir küme ve*

$$\mathcal{FC}(X) = \{A \subseteq X \mid A \text{ sonlu veya } X \setminus A \text{ sonlu}\}$$

olmak üzere $(\mathcal{FC}(X), \subseteq)$ ikilisi bir Boole cebiridir. Burada her $A, B \in \mathcal{FC}(X)$ için $A \vee B = A \cup B$, $A \wedge B = A \cap B$ ve $A' = X \setminus A$ ile tanımlıdır (Davey ve Priestley 1990).

Tanım 2.10. *$(L, \leq)$ bir örgü ve $\emptyset \neq F \subseteq L$ olsun. Eğer her $a, b \in L$ için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa F ye $(L, \leq)$ nın bir **filtresi** denir (Davey ve Priestley 1990; Gierz vd. 1980; Grätzer 2003).*

(F1) *$a \in F$ ve $a \leq b$ ise $b \in F$,*

(F2) *$a, b \in F$ ise o zaman $a \wedge b \in F$.*

Tanım 2.11. *$(L, \leq)$ bir örgü ve $\emptyset \neq I \subseteq L$ olmak üzere; her $a, b \in L$ için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa I ya $(L, \leq)$ nin bir **ideali** denir (Davey ve Priestley 1990; Gierz vd. 1980; Grätzer 2003).*

(I1) *$a \in I$ ve $b \leq a$ ise $b \in I$ dir,*

(I2) *$a, b \in I$ ise $a \vee b \in I$ dir.*

Tanım 2.12. *$(L, \leq)$ bir örgü ve P, L nin öz altkümesi olan bir filtresi olsun. Eğer P filtresi*

(P) *$a \vee b \in P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$*

*koşulunu sağlıyorsa, P ye $(L, \leq)$ nin bir **asal filtresi** denir (Davey ve Priestley 1990; Gierz vd. 1980; Grätzer 2003).*

Sonuç 2.1. *$(L, \leq)$ bir sınırlı örgü ve F onun bir filtresi ise $\top \in F$ dir.*

İspat $(L, \leq)$ bir sınırlı örgü ve F onun bir filtresi olsun. Her $a \in F$ için $a \leq \top$ olduğundan filtre tanımı gereği $\top \in F$ olur. □

Önerme 2.1. *$(B, \leq)$ bir Boole cebiri, P ve Q onun iki farklı asal filtresi olsun. Bu durumda $P \nsubseteq Q$ ve $Q \nsubseteq P$ dir.*

İspat Farzedelim ki $P \subseteq Q$ olsun. $P \neq Q$ olduğundan $Q \nsubseteq P$ dir. Dolayısıyla $\exists x \in Q$ öyle ki $x \notin P$ dir. $(B, \leq)$ bir Boole cebiri olduğundan $\exists x' \in B$ öyle ki $x \wedge x' = \bot$ ve $x \vee x' = \top$ dir. $(\mathbf{F1})$ koşulunun bir sonucu olarak $\top \in P$ olduğundan $x \vee x' \in P$ dir. O halde $(\mathbf{P})$ koşulu gereği $x \in P$ veya $x' \in P$ dir. Burada $x \notin P$ olduğundan, $x' \in P$ olur. O halde varsayım gereği $x' \in Q$ olur. $(\mathbf{F2})$ koşuludan $\bot = x \wedge x' \in Q$ olur. Burada $\bot$ elemanı $(B, \leq)$ nin en küçük elemanı olduğundan $\forall y \in B$ için $\bot \leq y$ ve dolayısıyla $(\mathbf{F1})$ koşulu gereği $y \in Q \Rightarrow B \subseteq Q$ olur. Fakat bu durum Q nun B nin bir öz altkümesi olmasıyla çelişir. O halde $P \nsubseteq Q$ dur. Benzer olarak, $Q \nsubseteq P$ olduğu görülür. □

Sonuç 2.2. *$(B, \leq)$ bir Boole cebiri ve P ile Q onun iki asal filtresi olmak üzere; eğer $P \subseteq Q$ veya $Q \subseteq P$ ise $P = Q$ dur.*

Önerme 2.2. *$(L, \leq)$ bir örgü, P onun bir asal filtresi ve $a_1, a_2, ..., a_n \in L$ olsun.*

1. Eğer $a_1 \vee a_2 \vee ... \vee a_n \in P$ ise $\exists k \in \{1, 2, ..., n\}$ öyle ki $a_k \in P$ dir.

2. Eğer $a_1, a_2, ..., a_n \in P$ ise $a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_n \in P$ dir.

İspat Sadece **1**'inci gerektirme kanıtlanacaktır. **2**'nci gerektirme **1**'inci gerektirmeyle benzer şekilde kanıtlanır.

$a_1 \vee a_2 \vee ... \vee a_n \in P$ olsun.

$$a_1 \vee a_2 \vee ... \vee a_n = (a_1 \vee a_2 \vee ... \vee a_{n-1}) \vee a_n \in P$$

$$\Rightarrow a_1 \vee a_2 \vee ... \vee a_{n-1} \in P \text{ veya } a_n \in P$$

Bu gerektirme her $n \geq 2$ için geçerli olduğundan, $a_1 \in P$ veya $a_2 \in P$ veya...veya $a_n \in P$ olur ki bu isteneni kanıtlar. □

Bir $(L, \leq)$ sınırlı örgüsünde, her $a \in L$ için $\uparrow a = \{b \in L \mid a \leq b\}$ kümesi $(L, \leq)$ için bir filtre ve $\downarrow a = \{b \in L \mid b \leq a\}$ kümesi de $(L, \leq)$ için bir idealidir. Bunlara sırayla a nın ürettiği **temel filtre** ve **temel ideal** denir.

Örnek 2.3. *$\mathbb{R}$ nin $L = [0, 1]$ kapalı alt aralığı, $\mathbb{R}$ nin bilinen " $\leq$ " kısmi sıralama bağıntısıyla birlikte bir sınırlı ve dağılımlı örgüdür. Burada $\forall x, y \in L$ için $x \vee y = \max\{x, y\}$ ve $x \wedge y = \min\{x, y\}$ ile tanımlıdır. Bu yapının bir Boole cebiri olmadığına dikkat ediniz. Ayrıca $\forall x \in L \setminus \{1\}$ için $(x, 1]$ kümesi ve $\forall x \in L \setminus \{0\}$ için $[x, 1] = \uparrow x$ kümesi $(L, \leq)$ nin birer asal filtresidir. Dolayısıyla bu örgünün sonsuz sayıda asal filtresi vardır.*

Örnek 2.4. *Yine $\mathbb{R}$ nin $L = [0, 1]$ kapalı alt aralığını düşünelim.*

$$M = \{\downarrow x \mid x \in L\}$$

olmak üzere $(M, \subseteq)$ ikilisi, bir sınırlı ve dağılımlı örgü belirtir. Burada her $\downarrow x, \downarrow y \in M$ için $\downarrow x \cup \downarrow y = \downarrow (x \vee y)$ ve $\downarrow x \cap \downarrow y = \downarrow (x \wedge y)$ olduğu hemen görülür. Ayrıca en büyük elemanı L ve en küçük elemanı $\{0\}$ dir. Bu örgü de bir Boole cebiri değildir. Çünkü, L nin $0 \neq x \neq 1$ koşulunu sağlayan herhangi bir x elemanı için $\downarrow x \cup \downarrow y = L$ olduğunda $y = 1$ ve $\downarrow x \cap \downarrow y = \{0\}$ olduğunda da $y = 0$ olur. Demek ki $\downarrow x$ in tümleyeni yoktur. Dolayısıyla $(M, \subseteq)$ ikilisi asla bir Boole cebiri olamaz. Ayrıca $\forall a \in L \setminus \{0\}$ için $P_a = \{\downarrow x \in M \mid a \leq x\}$ kümesi $(M, \subseteq)$ nin bir asal filtresi olduğundan bu örgünün sonsuz çoklukta asal filtresi vardır.

Uyarı 2.3. *Önerme 2.1 de herhangi bir Boole cebirinin farklı iki asal filtresinin birbirlerini kapsamadıklarını gösterdik. Bunun aksine Boole cebiri olmayan bir sınırlı ve dağı-*

lımlı örgünün farklı iki asal filtresiden biri, diğerini kapsayabilir. Örneğin Örnek 2.3 te $0 < x < y$ *için* $\uparrow x$ *ve* $\uparrow y$*,* $(L, \leq)$ *nin farklı iki asal filtresi ve* $\uparrow y \subseteq \uparrow x$ *dir. Yine Örnek 2.4 te* $0 < a < b$ *iken* P_a *ve* P_b*,* $(M, \subseteq)$ *nin farklı iki asal filtresi ve* $P_b \subseteq P_a$ *dır.*

Tanım 2.13. $(L, \leq)$ *bir sınırlı örgü ve* $A \subseteq L$ *olmak üzere,* $(L, \leq)$ *nin* A *yı kapsayan en küçük filtresine* A ***nın ürettiği filtre*** *denir (Grätzer 2003).*

Bir $(L, \leq)$ sınırlı örgüsünde, bir A altkümesinin ürettiği filtre; A yı kapsayan tüm filtrelerin arakesitidir ve sıradaki önerme yardımıyla daha açık bir şekilde ifade edilebilir.

Önerme 2.3. *Bir* $(L, \leq)$ *sınırlı örgüsü ve* $A \subseteq L$ *verilsin. Bu durumda*

$$F_A = \{x \in L \mid (\exists \{a_1, a_2, ..., a_n\} \subseteq A)\,,\ a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_n \leq x\}$$

kümesi A *nın ürettiği filtredir (Grätzer 2003).*

Tanım 2.14. $(L, \leq)$ *bir sınırlı örgü ve* $A \subseteq L$ *olmak üzere,* $(L, \leq)$ *nin* A *yı kapsayan en küçük idealine* A ***nın ürettiği ideal*** *denir (Grätzer 2003).*

Bir $(L, \leq)$ sınırlı örgüsünde, bir A altkümesinin ürettiği ideal; A yı kapsayan tüm ideallerin arakesitidir ve sıradaki önerme yardımıyla daha açık bir şekilde ifade edilebilir.

Önerme 2.4. *Bir* $(L, \leq)$ *sınırlı örgüsü ve* $A \subseteq L$ *verilsin. Bu durumda*

$$I_A = \{x \in L \mid (\exists \{a_1, a_2, ..., a_n\} \subseteq A)\,,\ x \leq a_1 \vee a_2 \vee ... \vee a_n\}$$

kümesi A *nın ürettiği idealdir (Grätzer 2003).*

Önteorem 2.1. $(L, \leq)$ *sınırlı, dağılımlı bir örgü,* F *ve* I *sırayla* $(L, \leq)$ *in birer filtresi ve ideali olsun. Eğer* $F \cap I = \emptyset$ *ise, o zaman* $(L, \leq)$ *nin öyle bir* P *asal filtresi vardır ki* $F \subseteq P$ *ve* $P \cap I = \emptyset$ *olur (Grätzer 2003).*

2.2. Bazı Kategorik Kavramlar

Bu bölümde, tez boyunca kullanılacak temel bazı kategorik kavramlar tanıtılacak olup, ağırlıklı olarak (Adamek vd. 1990; Lane 1971; Awodey 2010) kaynakları kullanılacaktır. Tez içerisindeki kategorik kavramları anlamak için gerekli tüm tanım, önerme vb. bu bölümde mevcuttur.

Çağdaş matematik, birçok farklı teoriye ayrılmış ve her biri kendi içerisinde gelişmektedir. Bu teorilerden birçoğu birbirleriyle yakından ilişkilidir. Kategori teorisinin amacı; matematikte benzer fikirler üzerine kurulu bu teoriler arasındaki ilişkiyi araştırmak ve sağlam temellere oturtmaktır. Bunu yaparken çoğu zaman denk funktor (ya da denk izleç) denilen bir kavramdan yararlanılır.

Örneğin bu tezde konu edindiği gibi, Boole cebirleri denilen cebirsel yapılar ile Stone topolojileri denilen topolojik yapılar arasında çok yakın bir ilişki kurmak mümkündür. Böylece sağlam temellerle birbirlerine bağlanan bu teorilerden birinin geliştirilmesi halinde, diğerinin de benzer fikirler üzerinde geliştirilebileceğini söyleyebilir.

Ünlü matematikçi ve filozof Bertrand Russell, 1901'de o günün matematiğinin çelişkisiz olmadığını gösteren ve güncel literatürde "Russel Paradoxu" olarak adlandırılan bir paradoxu ortaya attı (Russell 1903). Bunun üzerine, kümeler teorisine alternatif olarak sınıf teorisi geliştirildi. Sınıf teorisi, kategori teorisi için bir temel oluşturur. Sınıf teorisine dair daha fazlası için bkz. (Eisenberg 1971).

2.2.1. Kategoriler

Tanım 2.15. *Bir* $\mathbf{A}$ *kategorisi* $(\mathcal{O}, \hom, id, \circ)$ *dörtlüsü olup, aşağıdakilerden oluşur.*

1. $\mathcal{O}$*, her bir elemanına "*$\mathbf{A}-$*obje" denilen bir sınıftır.*

2. $\mathbf{A}-$*obje her* A, B *için* $\hom(A, B)$*, her bir elemanına "*A *dan* B *ye bir* $\mathbf{A}-$*morfizm" denilen bir kümedir ve bu küme aşağıdaki* $(\mathbf{i})$ *koşulunu sağlar.*

(i) *Verilen her* $\mathbf{A}-$*obje* A*,* B*,* A' *ve* B' *için*

$$\hom(A, B) \cap \hom(A', B') = \emptyset \Longleftrightarrow (A, B) \neq (A', B')$$

dir.

3. $\mathbf{A}-$*obje her* A *için, "*A *nın birim morfizmi" olarak adlandırılan bir* $id_A \in \hom(A, A)$ *vardır.*

4. *Her* $f \in \hom(A, B)$ *ve her* $g \in \hom(B, C)$ *için "*f *ile* g *nin bileşkesi" denilen* $g \circ f \in \hom(A, C)$ *vardır ve aşağıdaki* $(\mathbf{ii})$ *ve* $(\mathbf{iii})$ *koşulları sağlanır.*

(ii) *Her* $f \in \hom(A,B)$, *her* $g \in \hom(B,C)$ *ve her* $h \in \hom(C,D)$ *için*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

eşitliği sağlanır.

(iii) *Her* $f \in \hom(A,B)$ *için*

$$id_B \circ f = f \circ id_A = f$$

eşitliği sağlanır.

$\mathbf{A} = (\mathcal{O}, \hom, id, \circ)$ bir kategori olmak üzere; $\mathcal{O}$ sınıfını genellikle $\mathbf{Ob}(\mathbf{A})$ ile ve $\mathbf{A}$ nın tüm morfizmlerinin sınıfını $\mathbf{Mor}(\mathbf{A})$ ile göstereceğiz. Dolayısıyla

$$\mathbf{Mor}(\mathbf{A}) = \bigcup_{A,B \in \mathbf{Ob}(\mathbf{A})} \hom(A,B)$$

eşitliği vardır. Ayrıca $A, B \in \mathbf{Ob}(\mathbf{A})$ olmak üzere; $f \in \hom(A,B)$ olması, genellikle $A \xrightarrow{f} B$ veya $f : A \longrightarrow B$ ile gösterilir. Burada A ya f nin **tanım bölgesi (domain)**, B ye de f nin **değer bölgesi (codomain)** denir ve bunlar sırayla $\mathbf{dom}(f)$ ve $\mathbf{cod}(f)$ ile gösterilir. Burada dikkat edilecek husus, Tanım 2.15 $(\mathbf{i})$ koşulu gereği $\mathbf{A}$ nın her morfizminin bir ve yalnız bir tanım bölgesinin ve değer bölgesinin varlığıdır. Yine $A \in \mathbf{Ob}(\mathbf{A})$ olmak üzere A birim morfizmi $A \xrightarrow{id_A} A$, Tanım 2.15 $(\mathbf{iii})$ koşulu uyarınca tekdir.

Aşağıda bileşke işlemini bilinen fonksiyon bileşkesi olarak ve birim morfizmleri birim fonksiyonlar olarak kabul eden bazı kategori örnekleri verilmiştir.

1. Objeleri kümeler ve morfizimleri fonksiyonlar olan $\mathbf{Set}$ sınıfı bir kategoridir.

2. Objeleri topolojik uzaylar ve morfizmleri sürekli fonksiyonlar olan $\mathbf{Top}$ sınıfı bir kategoridir.

3. Objeleri (X, ρ) şeklinde bir X kümesi ve X üzerinde bir ρ bağıntısından oluşan, morfizmleri ise bağıntıları koruyan fonksiyonlar (yani, $(X,\rho) \xrightarrow{f} (Y,\sigma)$ bir morfizmdir $\Longleftrightarrow f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon ve $\forall x, x' \in X$ için $x\rho x'$ iken $f(x)\,\sigma f(y)$) olan $\mathbf{Rel}$ sınıfı bir kategoridir.

Tanım 2.16. *Herhangi bir* $\mathbf{A} = (\mathbf{Ob}(\mathbf{A}), \hom_{\mathbf{A}}, id, \circ)$ *kategorisi verilsin.* $\mathbf{A}$ *kategorisinin duali (veya karşıtı)* $\mathbf{A^{op}} = (\mathbf{Ob}(\mathbf{A}), \hom_{\mathbf{A^{op}}}, id, \circ^{op})$ *şeklinde bir kategoridir. Burada her* $A, B \in \mathbf{Ob}(\mathbf{A})$ *ve her* $A \xrightarrow{f} B, B \xrightarrow{g} C \in \mathbf{Mor}(\mathbf{A})$ *için*

$$\hom_{\mathbf{A}^{\mathbf{op}}}(A,B)=\hom_{\mathbf{A}}(B,A) \text{ ve } f\circ^{op} g=g\circ f$$

ile tanımlıdır.

Tanım 2.16 dan da anlaşılacağı üzere, verilen bir $\mathbf{A}$ kategorisi için $f\in\hom_{\mathbf{A}^{\mathbf{op}}}(A,B)$ olması $f\in\hom_{\mathbf{A}}(B,A)$ olmasına denktir. Bu tez kapsamında aksi belirtilmediği sürece $\mathbf{A}^{\mathbf{op}}-$morfizm $A\xrightarrow{f}B$ yi $A\xrightarrow{f^{op}}B$ ile göstereceğiz ve buna $\mathbf{A}-$morfizm $B\xrightarrow{f}A$ nin karşıtı diyeceğiz.

Tanım 2.17. *$\mathbf{A}$ bir kategori ve $A\xrightarrow{f}B$ bir $\mathbf{A}-$morfizm olsun. Eğer*

$$g\circ f=id_A \text{ ve } f\circ g=id_B$$

*olacak şekilde bir $\mathbf{A}-$morfizm $B\xrightarrow{g}A$ varsa, $A\xrightarrow{f}B$ bir $\mathbf{A}-$**izomorfizm**dir denir.*

Kolayca kanıtlanabileceği üzere, Tanım 2.17 de olduğu gibi verilen $\mathbf{A}-$morfizm $B\xrightarrow{g}A$ tekdir. Bu morfizm $B\xrightarrow{f^{-1}}A$ ile gösterilir.

Tanım 2.18. *$\mathbf{A}$ bir kategori ve $A,B\in\mathbf{Ob}(\mathbf{A})$ olsun. Eğer A dan B ye tanımlı en az bir $\mathbf{A}-$izomorfizm varsa, A ile B **izomorftur** denir ve $A\cong B$ ile gösterilir.*

Örnek 2.5. *$\mathbf{Set}$ kategorisinin izomorfizmleri bire-bir ve örten fonksiyonlardır.*

Örnek 2.6. *$\mathbf{Top}$ kategorisinin izomorfizmleri homeomorfizmlerdir.*

Önerme 2.5. *$\mathbf{A}$ bir kategori olmak üzere, eğer $A\xrightarrow{\varepsilon_1}B$ ve $B\xrightarrow{\varepsilon_2}C$ birer $\mathbf{A}-$izomorfizm ise, o zaman $A\xrightarrow{\varepsilon_2\circ\varepsilon_1}C$ bir $\mathbf{A}-$izomorfizmdir.*

2.2.2. Funktorlar

Tanım 2.19. *$\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ birer kategori ve $\mathcal{F}:\mathbf{A}\longrightarrow\mathbf{B}$, her $\mathbf{A}-$obje A ya karşılık $\mathbf{B}-$obje $\mathcal{F}(A)$ yı ve her $\mathbf{A}-$morfizm $A\xrightarrow{f}A'$ ye karşılık $\mathbf{B}-$morfizm $\mathcal{F}(A)\xrightarrow{\mathcal{F}(f)}\mathcal{F}(A')$ yı getiren bir fonksiyon olsun. Eğer aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa, $\mathcal{F}$ ye $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ ye bir **funktor** denir.*

bileşke işlemi: *Bileşke işlemi, $\mathcal{F}$ altında korunur. Yani her $\mathbf{A}-$morfizm $A\xrightarrow{f}B$ ve $B\xrightarrow{g}C$ için*

$$\mathcal{F}(g\circ f)=\mathcal{F}(g)\circ\mathcal{F}(f)$$

dir.

birim morfizmler: *$\mathcal{F}$ altında birim morfizmler korunur. Yani her $\mathbf{A}-$obje A için*

$$\mathcal{F}\left(id_A\right) = id_{\mathcal{F}(A)}$$

dir.

Aşağıda bazı funktor örnekleri verilmiştir.

1. Herhangi bir $\mathbf{C}$ kategorisi için

$$id_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, id_{\mathbf{C}}\left(A \xrightarrow{f} B\right) = A \xrightarrow{f} B$$

   şeklinde tanımlı fonksiyon bir funktordur. Bu fuktora $\mathbf{C}$ üzerindeki birim funktor denir.

2. $\mathbf{Set}$ kategorisi üzerinde tanımlı

$$\mathcal{P} : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set},\ \mathcal{P}\left(A \xrightarrow{f} B\right) = \mathcal{P}\left(A\right) \xrightarrow{\mathcal{P}(f)} \mathcal{P}\left(B\right),\ \mathcal{P}\left(f\right)\left(X\right) = f\left(X\right)$$

   ile tanımlı fonksiyon bir funktordur. Bu funktora kovaryant kuvvet kümesi funktoru denir.

Funktorlar izomorfizmleri korur. Yani; $\mathcal{F} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ bir funktor ve $A \xrightarrow{f} A'$ bir $\mathbf{A}-$izomorfizm ise, $\mathcal{F}\left(A\right) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}\left(A'\right)$ bir $\mathbf{B}-$izomorfizmdir. $\mathcal{F} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ ve $\mathcal{G} : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ birer funktor olmak üzere, $\mathcal{F}$ ile $\mathcal{G}$ nin bileşkesi denilen

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{F} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C},\ \left(\mathcal{G} \circ \mathcal{F}\right)\left(A \xrightarrow{f} A'\right) = \mathcal{G}\left(\mathcal{F}(A)\right) \xrightarrow{\mathcal{G}(\mathcal{F}(f))} \mathcal{G}\left(\mathcal{F}(A')\right)$$

fonksiyonu bir funktordur. Funktorlar arasındaki bileşke işlemi birleşme özelliğine sahiptir.

Tanım 2.20. $\mathcal{F} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *bir funktor olsun. Eğer*

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = id_{\mathbf{A}} \text{ ve } \mathcal{F} \circ \mathcal{G} = id_{\mathbf{B}}$$

*olacak şekilde bir $\mathcal{G} : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ funktoru varsa, $\mathcal{F}$ ye $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ ye bir **izomorfizm**dir denir ve $\mathcal{G}$ ye $\mathcal{F}$ nin **tersidir** denir.*

Yine kolayca kanıtlanabileceği üzere Tanım 2.20 de olduğu gibi verilen $\mathcal{G}$ funktoru tekdir. Eğer bir $\mathcal{F}$ funktorunun tersi varsa, bunu $\mathcal{F}^{-1}$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.21. $\mathbf{A}$ *ve* $\mathbf{B}$ *iki kategori olmak üzere, eğer* $\mathbf{A}$ *dan* $\mathbf{B}$ *ye bir izomorfizm varsa,* $\mathbf{A}$ *ile* $\mathbf{B}$ ***izomorftur*** *denir.*

Tanım 2.22. $\mathcal{F} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *bir funktor olmak üzere, her* $A, B \in \mathbf{Ob}(\mathbf{A})$ *için* $\mathcal{F}$ *nin bir kısıtanışı olan*

$$\mathcal{F}_{AB} : \hom_{\mathbf{A}}(A, B) \longrightarrow \hom_{\mathbf{B}}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B))$$

fonksiyonunu göz önüne alalım.

(1) *Her* $A, B \in \mathbf{Ob}(\mathbf{A})$ *için* $\mathcal{F}_{AB}$ *fonksiyonu bire-bir ise* $\mathcal{F}$ *funktoruna* ***güvenilir*** *denir.*

(2) *Her* $A, B \in \mathbf{Ob}(\mathbf{A})$ *için* $\mathcal{F}_{AB}$ *fonksiyonu örten ise* $\mathcal{F}$ *funktoruna* ***dolu*** *denir.*

Önerme 2.6. $\mathbf{A}$ *ve* $\mathbf{B}$ *birer kategori olsun. Bir* $\mathcal{F} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *funktorunun bir izomorfizm olması için gerek ve yeter şart* $\mathcal{F}$ *nin dolu, güvenilir ve objeler üzerinde bire-bir ve örten olmasıdır.*

Önerme 2.7. $\mathcal{F} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *ve* $\mathcal{G} : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ *birer dolu ve güvenilir funktor olsun. Bu durumda* $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ *funktoru dolu ve güvenilirdir.*

Önerme 2.8. $\mathcal{F} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *dolu ve güvenilir bir funktor olmak üzere, her* $A, A' \in \mathbf{Ob}(\mathbf{A})$ *ve her* $g \in \hom_{\mathbf{B}}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(A'))$ *için bir ve yalnız bir* $f \in \hom_{\mathbf{A}}(A, A')$ *vardır öyle ki*

$$\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}_{AA'}(f) = g \tag{2.1}$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca (2.1) eşitliğini sağlayan $A \xrightarrow{f} A'$ *nin bir* $\mathbf{A}-$*izomorfizm olması için gerek ve yeter şart* $\mathcal{F}(A) \xrightarrow{g} \mathcal{F}(A')$ *nin bir* $\mathbf{B}-$*izomorfizm olmasıdır.*

2.2.3. Denklikler ve doğal dönüşümler

Tanım 2.23. $\mathbf{A}$ *ve* $\mathbf{B}$ *birer kategori ve* $\mathcal{F} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *bir funktor olsun. Eğer* $\mathbf{B}$ *nin her* B *objesi için* $\mathcal{F}(A) \cong B$ *olacak şekilde* $\mathbf{A}$ *nın en az bir* A *objesi varsa* $\mathcal{F}$ *ye* ***izomorfizm-yoğun****dur denir.*

Tanım 2.24. $\mathbf{A}$ *ve* $\mathbf{B}$ *birer kategori ve* $\mathcal{F} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *bir funktor olsun. Eğer* $\mathcal{F}$ *güvenilir, dolu ve izomorfizm-yoğun ise, o zaman* $\mathcal{F}$ *ye bir* ***denklik*** *denir. Eğer* $\mathbf{A}$ *ile* $\mathbf{B}$ *arasında en az bir denklik varsa da* $\mathbf{A}$ *ile* $\mathbf{B}$ *kategorileri* ***denk kategori****lerdir denir.*

Tanım 2.25. $\mathbf{A}$ *ve* $\mathbf{B}$ *birer kategori olsun. Eğer* $\mathbf{A}^{\mathbf{op}}$ *ile* $\mathbf{B}$ *denk oluyorsa,* $\mathbf{A}$ *ile* $\mathbf{B}$ ***dual olarak denktir*** *veya* ***birbirlerine dualdir*** *denir.*

Önerme 2.9. $\mathcal{F} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *ve* $\mathcal{G} : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ *birer denklik ise, o zaman* $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ *bir denkliktir.*

Önerme 2.10. $\mathbf{A}$ *ve* $\mathbf{B}$ *birer kategori ve* $\mathcal{F} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *bir denklik olsun. Bu durumda* $\mathbf{B}$ *den* $\mathbf{A}$ *ya tanımlı bir denklik vardır.*

İspat Keyfi $B, B' \in \mathbf{Ob}(\mathbf{B})$ alalım. $\mathcal{F}$ bir izomorfizm-yoğun olduğundan öyle $A, A' \in \mathbf{Ob}(\mathbf{A})$ vardır ki $\mathcal{F}(A) \cong B$ ve $\mathcal{F}(A') \cong B'$ dir. $\mathcal{F}(A) \xrightarrow{\varepsilon_B} B$ ve $\mathcal{F}(A') \xrightarrow{\varepsilon_{B'}} B'$ birer $\mathbf{B}-$izomorfizm ve $g \in \hom_{\mathbf{B}}(B, B')$ olsun. Bu durumda

$$\varepsilon_{B'}^{-1} \circ g \circ \varepsilon_B \in \hom_{\mathbf{B}}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(A'))$$

olur. $\mathcal{F}$ funktoru dolu ve güvenilir olduğundan $\mathcal{F}_{AA'}$ kısıtlama fonksiyonu bire-bir ve örtendir. Dolayısıyla bir ve yalnız bir $f \in \hom_{\mathbf{A}}(A, A')$ vardır öyle ki $\mathcal{F}_{AA'}(f) = \varepsilon_{B'}^{-1} \circ g \circ \varepsilon_B$ dir. Burada f nin varlığı ve tekliği, Tanım 2.15 (**i**) koşulu gereği $\mathbf{A}-$obje A ve A' nın tek türlü belirli olmasını garanti eder. Böylece $\mathbf{B}-$obje her B ye karşılık, $\mathcal{F}(A) \cong B$ koşulunu sağlayan $\mathbf{A}-$obje A yı ve $\mathbf{B}-$morfizm her $B \xrightarrow{g} B'$ ye karşılık, $\mathcal{F}_{AA'}(f) = \varepsilon_{B'}^{-1} \circ g \circ \varepsilon_B$ koşulunu (dolayısıyla $\varepsilon_{B'} \circ \mathcal{F}_{AA'}(f) \circ \varepsilon_B^{-1} = g$ koşulunu) sağlayan $\mathbf{A}-$morfizm $A \xrightarrow{f} A'$ yı getiren $\mathbf{B}$ den $\mathbf{A}$ ya bir fonksiyon vardır. Bu fonksiyonu $\mathcal{G}$ ile gösterelim ve $\mathcal{G}$ nin aslında bir funktor olduğunu görelim.

bileşke işlemi: $B \xrightarrow{g} B'$ ve $B' \xrightarrow{g'} B''$ birer $\mathbf{B}-$morfzim olsun. $\mathcal{G}$ nin tanımı gereği $g = \varepsilon_{B'} \circ \mathcal{F}_{AA'}(f) \circ \varepsilon_B^{-1}$ ve $g' = \varepsilon_{B''} \circ \mathcal{F}_{A'A''}(f') \circ \varepsilon_{B'}^{-1}$ koşullarını sağlayan öyle $\mathbf{A}-$morfizm $A \xrightarrow{f} A'$ ve $A' \xrightarrow{f'} A''$ vardır ki $\mathcal{G}(g) = f$ ve $\mathcal{G}(g') = f'$ dir. Bu eşitliklerden ve $\mathcal{F}$ nin $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ ye tanımlı bir funktor olmasından

$$\begin{aligned} g' \circ g &= \left(\varepsilon_{B''} \circ \mathcal{F}_{A'A''}(f') \circ \varepsilon_{B'}^{-1}\right) \circ \left(\varepsilon_{B'} \circ \mathcal{F}_{AA'}(f) \circ \varepsilon_B^{-1}\right) \\ &= \varepsilon_{B''} \circ \mathcal{F}_{A'A''}(f') \circ \left(\varepsilon_{B'}^{-1} \circ \varepsilon_{B'}\right) \circ \mathcal{F}_{AA'}(f) \circ \varepsilon_B^{-1} \\ &= \varepsilon_{B''} \circ \mathcal{F}_{A'A''}(\mathcal{G}(g')) \circ id_{B'} \circ \mathcal{F}_{AA'}(\mathcal{G}(g)) \circ \varepsilon_B^{-1} \\ &= \varepsilon_{B''} \circ \mathcal{F}_{A'A''}(\mathcal{G}(g')) \circ \mathcal{F}_{AA'}(\mathcal{G}(g)) \circ \varepsilon_B^{-1} \\ &= \varepsilon_{B''} \circ \mathcal{F}_{AA''}(\mathcal{G}(g') \circ \mathcal{G}(g)) \circ \varepsilon_B^{-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\mathcal{G}(g' \circ g) = \mathcal{G}(g') \circ \mathcal{G}(g)$$

olur.

birim morfizmler: Herhangi bir $B \in \mathbf{Ob}(\mathbf{B})$ için $B \xrightarrow{id_B} B$ birim morfizmini göz önüne alalım. $\mathcal{G}$ nin tanımı gereği $\mathcal{F}_{AA}(f) = \varepsilon_B^{-1} \circ id_B \circ \varepsilon_B$ koşulunu sağlayan öyle $\mathbf{A}-$morfizm $A \xrightarrow{f} A$ vardır ki $\mathcal{G}(id_B) = f$ dir. Burada

$$\mathcal{F}_{AA}(f) = \varepsilon_B^{-1} \circ id_B \circ \varepsilon_B = \varepsilon_B^{-1} \circ \varepsilon_B = id_B = id_{\mathcal{F}(A)} = \mathcal{F}(id_A)$$

ve $\mathcal{F}$ güvenilir olduğundan

$$f = id_A = id_{\mathcal{G}(B)} = \mathcal{G}(id_B)$$

elde edilir.

Böylece $\mathcal{G}$, $\mathbf{B}$ den $\mathbf{A}$ ya tanımlı bir funktor olur.

$\mathcal{G}$ funktorunun dolu olduğunu görelim. $B, B' \in \mathbf{Ob}(\mathbf{B})$ olmak üzere, herhangi bir $f \in \hom_{\mathbf{A}}(\mathcal{G}(B), \mathcal{G}(B'))$ alalım. Bu durumda

$$\mathcal{F}(f) \in \hom_{\mathbf{B}}(\mathcal{F}(\mathcal{G}(B)), \mathcal{F}(\mathcal{G}(B')))$$

olur. $\mathcal{G}$ funktorunun tanımından $\mathcal{F}(\mathcal{G}(B)) \cong B$ ve $\mathcal{F}(\mathcal{G}(B')) \cong B'$ dir. $\mathcal{F}(\mathcal{G}(B)) \xrightarrow{\varepsilon_B} B$ ve $\mathcal{F}(\mathcal{G}(B')) \xrightarrow{\varepsilon_{B'}} B'$ birer $\mathbf{B}-$izomorfizm olsun. O halde

$$\varepsilon_{B'} \circ \mathcal{F}(f) \circ \varepsilon_B^{-1} \in \hom_{\mathbf{B}}(B, B')$$

dir. $g = \varepsilon_{B'} \circ \mathcal{F}(f) \circ \varepsilon_B^{-1}$ diyelim. $\mathcal{G}$ funktorunun tanımı gereği $\mathcal{G}(g) = f$ elde edilir. O halde $\mathcal{G}$ funktoru doludur.

$\mathcal{G}$ nin güvenilir olduğunu görelim. Herhangi $g_1, g_2 \in \hom_{\mathbf{B}}(B, B')$ için $\mathcal{G}(g_1) = \mathcal{G}(g_2)$ eşitliği sağlansın. Bu durumda $\mathcal{F}(\mathcal{G}(B)) \xrightarrow{\varepsilon_B} B$ ve $\mathcal{F}(\mathcal{G}(B')) \xrightarrow{\varepsilon_{B'}} B'$ birer $\mathbf{B}-$izomorfizm olmak üzere

$$g_1 = \varepsilon_{B'} \circ \mathcal{F}_{\mathcal{G}(B)\mathcal{G}(B')}(\mathcal{G}(g_1)) \circ \varepsilon_B^{-1} = \varepsilon_{B'} \circ \mathcal{F}_{\mathcal{G}(B)\mathcal{G}(B')}(\mathcal{G}(g_2)) \circ \varepsilon_B^{-1} = g_2$$

elde edilir.

Son olarak $\mathcal{G}$ nin bir izomorfizm-yoğun olduğunu görelim. Herhangi bir $A \in \mathbf{Ob}(\mathbf{A})$ alalım. Bu durumda $\mathcal{F}(A) \in \mathbf{Ob}(\mathbf{B})$ dir. Aynı zamanda $\mathcal{F}$ izomorfizm-yoğun olduğundan $\exists A' \in \mathbf{Ob}(\mathbf{A})$ öyle ki $\mathcal{F}(A') \cong \mathcal{F}(A)$ dir. $\mathcal{G}$ nin tanımı gereği $\mathcal{G}(\mathcal{F}(A)) = A'$ olduğundan

$$\mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathcal{F}(A))) = \mathcal{F}(A') \cong \mathcal{F}(A) \Rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathcal{F}(A))) \cong \mathcal{F}(A)$$

olur. $\mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathcal{F}(A))) \xrightarrow{\varepsilon_{\mathcal{F}(A)}} \mathcal{F}(A)$ bir $\mathbf{B}-$izomorfizm olsun. Önerme 2.8 gereği $\mathcal{F}(\varepsilon_A) = \varepsilon_{\mathcal{F}(A)}$ olacak şekilde bir ve yalnız bir $\mathbf{A}-$izomorfizm $\mathcal{G}(\mathcal{F}(A)) \xrightarrow{\varepsilon_A} A$ vardır. Böylece $\mathcal{G}(\mathcal{F}(A)) \cong A$ elde edilir. □

Tanım 2.26. $\mathbf{A}$ *ve* $\mathbf{B}$ *birer kategori,* $\mathcal{F}$ *ve* $\mathcal{G}$ $\mathbf{A}$ *dan* $\mathbf{B}$ *ye iki funktor ve*

$$\tau = \left(\mathcal{F}(A) \xrightarrow{\tau_A} \mathcal{G}(A)\right)_{A \in \mathbf{Ob}(\mathbf{A})}$$

ailesinin her bir $\mathcal{F}(A) \xrightarrow{\tau_A} \mathcal{G}(A)$ *bileşeni bir* $\mathbf{B}-$*morfizm olan bir morfizmler ailesi olsun. Eğer her* $\mathbf{A}-$*morfizm* $A \xrightarrow{f} B$ *için*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A) & \xrightarrow{\tau_A} & \mathcal{G}(A) \\ {\scriptstyle \mathcal{F}(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{G}(f)} \\ \mathcal{F}(B) & \xrightarrow[\tau_B]{} & \mathcal{G}(B) \end{array}$$

kare diyagramı değişmeli oluyorsa, (yani; $\mathcal{G}(f) \circ \tau_A = \tau_B \circ \mathcal{F}(f)$ *oluyorsa)* τ *ya* $\mathcal{F}$ *den* $\mathcal{G}$ *ye bir* ***doğal dönüşüm*** *denir ve* $\tau : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ *ile gösterilir.*

Tanım 2.27. *Eğer* $\tau = \left(\mathcal{F}(A) \xrightarrow{\tau_A} \mathcal{G}(A)\right)_{A \in \mathbf{Ob}(\mathbf{A})}$ *ailesinin her bileşeni* τ_A*, bir* $\mathbf{B}-$*izomorfizm oluyorsa, o zaman* τ *ya* $\mathcal{F}$ *den* $\mathcal{G}$ *ye tanımlı bir* ***doğal izomorfizm*** *denir.*

Tanım 2.28. $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *iki funktor olsun. Eğer* $\mathcal{F}$ *den* $\mathcal{G}$ *ye tanımlı en az bir doğal izomorfizm varsa,* $\mathcal{F}$ *ile* $\mathcal{G}$ ***doğal izomorfiktir (naturally isomorphic)*** *denir ve* $\mathcal{F} \approx \mathcal{G}$ *ile gösterilir.*

Burada kolayca gösterilebileceği üzere " $\approx$ " bir denklik bağıntısıdır.

Önerme 2.11. *Bir* $\mathcal{F} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *funktorunun bir denklik olması için gerek ve yeter şart* $id_{\mathbf{A}} \approx \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ *ve* $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \approx id_{\mathbf{B}}$ *olacak şekilde bir* $\mathcal{G} : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ *funktorunun var olmasıdır.*

İspat $(\Rightarrow)$ $\mathcal{F} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ funktoru bir denklik olsun. Önerme 2.10 gereği $\mathbf{B}$ den $\mathbf{A}$ ya tanımlı en az bir denklik vardır. Yine aynı önermenin kanıtında bu denkliklerden biri olan $\mathcal{G} : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ yi

$$\mathcal{G}\left(B \xrightarrow{g} B'\right) = A \xrightarrow{f} A' \Longleftrightarrow \mathcal{F}(A) \cong B, \mathcal{F}(A') \cong B', \mathcal{F}_{AA'}(f) = \varepsilon_{B'}^{-1} \circ g \circ \varepsilon_B$$

şeklinde inşaa etmiştik. Burada ε_B ve $\varepsilon_{B'}$ sırayla $\mathcal{F}(A) \xrightarrow{\varepsilon_B} B$ ve $\mathcal{F}(A') \xrightarrow{\varepsilon_{B'}} B'$ şeklinde birer $\mathbf{B}-$izomorfizmdir. Şimdi

$$(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})\left(A \xrightarrow{f} A'\right) = \mathcal{G}(\mathcal{F}(A)) \xrightarrow{\mathcal{G}(\mathcal{F}(f))} \mathcal{G}(\mathcal{F}(A'))$$

ile tanımlı $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ funktorunu göz önüne alalım. Burada $\mathcal{G}$ nin tanımı gereği

$$\mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathcal{F}(A))) \cong \mathcal{F}(A), \mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathcal{F}(A'))) \cong \mathcal{F}(A')$$

ve

$$\mathcal{F}_{\mathcal{G}(\mathcal{F}(A))\mathcal{G}(\mathcal{F}(A'))}(\mathcal{G}(\mathcal{F}(f))) = \varepsilon_{\mathcal{F}(A')}^{-1} \circ \mathcal{F}(f) \circ \varepsilon_{\mathcal{F}(A)}$$

dir. Önerme 2.8 gereği $\mathbf{A}-$izomorfizm öyle $\mathcal{G}(\mathcal{F}(A)) \xrightarrow{\varepsilon_A} A$ ve $\mathcal{G}(\mathcal{F}(A')) \xrightarrow{\varepsilon_{A'}} A'$ vardır ki $\mathcal{F}(\varepsilon_A) = \varepsilon_{\mathcal{F}(A)}$ ve $\mathcal{F}(\varepsilon_{A'}) = \varepsilon_{\mathcal{F}(A')}$ dir. Burada $\mathbf{A}-$morfizm her $A \xrightarrow{f} A'$ için

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\mathcal{G}(\mathcal{F}(A))\mathcal{G}(\mathcal{F}(A'))}(\mathcal{G}(\mathcal{F}(f))) &= \varepsilon_{\mathcal{F}(A')}^{-1} \circ \mathcal{F}(f) \circ \varepsilon_{\mathcal{F}(A)} \\
&= \mathcal{F}(\varepsilon_{A'})^{-1} \circ \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(\varepsilon_A) \\
&= \mathcal{F}\left(\varepsilon_{A'}^{-1}\right) \circ \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(\varepsilon_A) \\
&= \mathcal{F}\left(\varepsilon_{A'}^{-1} \circ f \circ \varepsilon_A\right)
\end{aligned}$$

eşitliğinden ve $\mathcal{F}$ nin güvenilir olmasından

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}(f)) = \varepsilon_{A'}^{-1} \circ f \circ \varepsilon_A \Rightarrow \varepsilon_{A'} \circ \mathcal{G}(\mathcal{F}(f)) = f \circ \varepsilon_A$$

elde edilir. Yani

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(A) \arrow[r, "\varepsilon_A"] \arrow[d, "\mathcal{G}(\mathcal{F}(f))"'] & A \arrow[d, "f"] \\
(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(A') \arrow[r, "\varepsilon_{A'}"'] & A'
\end{tikzcd}$$

kare diyagramı değişmelidir. O halde $\varepsilon = \left(\mathcal{G}(\mathcal{F}(A)) \xrightarrow{\varepsilon_A} id_{\mathbf{A}}(A)\right)_{A \in \mathbf{Ob}(\mathbf{A})}$ ailesi, $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ den $id_{\mathbf{A}}$ ye tanımlı bir doğal izomorfizm olur. Böylece $id_{\mathbf{A}} \approx \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ olur. Benzer şekilde $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \approx id_{\mathbf{B}}$ olur.

($\Leftarrow$) Tersine $id_{\mathbf{A}} \approx \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ ve $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \approx id_{\mathbf{B}}$ olacak şekilde bir $\mathcal{G} : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ funktoru var olsun. $\eta : id_{\mathbf{A}} \longrightarrow \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ ve $\varepsilon : \mathcal{F} \circ \mathcal{G} \longrightarrow id_{\mathbf{B}}$ doğal izomorfizmleri vardır. Bu durumda $\forall B \in \mathbf{Ob}(\mathbf{B})$ için $\mathcal{F}(\mathcal{G}(B)) \xrightarrow{\varepsilon_B} B$ bir $\mathbf{B}-$izomorfizmdir. Aynı zamanda $\mathcal{G}(B) \in \mathbf{Ob}(\mathbf{A})$ olduğundan $\mathcal{F}$ izomorfizm-yoğundur.

Şimdi de $\mathcal{F}$ funktorunun (benzer şekilde $\mathcal{G}$ funktorunun) güvenililir olduğunu görelim. Herhangi $\mathbf{A}-$morfizm $A \xrightarrow{f} A'$ ve $A \xrightarrow{f'} A'$ için $\mathcal{F}_{AA'}(f) = \mathcal{F}_{AA'}(f')$ eşitliği sağlansın. $\eta : id_{\mathbf{A}} \longrightarrow \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ bir doğal izomorfizm olduğundan

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & (\mathcal{G}\circ\mathcal{F})(A) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{G}(\mathcal{F}(f))} \\ A' & \xrightarrow[\eta_{A'}]{} & (\mathcal{G}\circ\mathcal{F})(A') \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & (\mathcal{G}\circ\mathcal{F})(A) \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{G}(\mathcal{F}(f'))} \\ A' & \xrightarrow[\eta_{A'}]{} & (\mathcal{G}\circ\mathcal{F})(A') \end{array}$$

kare diyagramları değişmelidir. Buradan

$$\begin{aligned} \eta_{A'} \circ f = \mathcal{G}(\mathcal{F}_{AA'}(f)) \circ \eta_A &= \mathcal{G}(\mathcal{F}_{AA'}(f')) \circ \eta_A = \eta_{A'} \circ f' \\ &\Rightarrow \eta_{A'} \circ f = \eta_{A'} \circ f' \\ &\Rightarrow \left(\eta_{A'}^{-1} \circ \eta_{A'}\right) \circ f = \left(\eta_{A'}^{-1} \circ \eta_{A'}\right) \circ f' \\ &\Rightarrow id_{A'} \circ f = id_{A'} \circ f' \\ &\Rightarrow f = f' \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\mathcal{F}$ funktoru güvenilirdir.

Son olarak $\mathcal{F}$ nin dolu olduğunu göstereceğiz. $A, A' \in \mathbf{Ob}(\mathbf{A})$ olmak üzere herhangi bir $g \in \hom_{\mathbf{B}}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(A'))$ alalım. Bu durumda

$$\mathcal{G}(g) \in \hom_{\mathbf{A}}(\mathcal{G}(\mathcal{F}(A)), \mathcal{G}(\mathcal{F}(A')))$$

dir. $\eta : id_{\mathbf{A}} \longrightarrow \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ bir doğal izomorfizm olduğundan $\eta_A \in \hom_{\mathbf{A}}(A, \mathcal{G}(\mathcal{F}(A)))$ ve $\eta_{A'} \in \hom_{\mathbf{A}}(A', \mathcal{G}(\mathcal{F}(A')))$ ve dolayısıyla

$$f = \eta_{A'}^{-1} \circ \mathcal{G}(g) \circ \eta_A \in \hom_{\mathbf{A}}(A, A') \tag{2.2}$$

olur. Yine $\eta : id_{\mathbf{A}} \longrightarrow \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ nın bir doğal izomorfizm olması

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & \mathcal{G}(\mathcal{F}(A)) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{G}(\mathcal{F}(f))} \\ A' & \xrightarrow[\eta_{A'}]{} & \mathcal{G}(\mathcal{F}(A')) \end{array}$$

diyagramının değişmeli olmasını gerektirir. Dolayısıyla (2.2) eşitliği yardımıyla

$$
\begin{aligned}
&\eta_{A'} \circ f = \mathcal{G}(\mathcal{F}(f)) \circ \eta_A \Rightarrow f = \eta_{A'}^{-1} \circ \mathcal{G}(\mathcal{F}(f)) \circ \eta_A \\
&\Rightarrow \eta_{A'}^{-1} \circ \mathcal{G}(\mathcal{F}(f)) \circ \eta_A = \eta_{A'}^{-1} \circ \mathcal{G}(g) \circ \eta_A \\
&\Rightarrow \left(\eta_{A'} \circ \eta_{A'}^{-1}\right) \circ \mathcal{G}(\mathcal{F}(f)) \circ \eta_A = \left(\eta_{A'} \circ \eta_{A'}^{-1}\right) \circ \mathcal{G}(g) \circ \eta_A \\
&\Rightarrow id_{\mathcal{G}(\mathcal{F}(A'))} \circ \mathcal{G}(\mathcal{F}(f)) \circ \left(\eta_A \circ \eta_A^{-1}\right) = id_{\mathcal{G}(\mathcal{F}(A'))} \circ \mathcal{G}(g) \circ \left(\eta_A \circ \eta_A^{-1}\right) \\
&\Rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{F}(f)) \circ id_{\mathcal{G}(\mathcal{F}(A))} = \mathcal{G}(g) \circ id_{\mathcal{G}(\mathcal{F}(A))} \\
&\Rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{G}(g)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada $\mathcal{G}$ funktoru güvenilir olduğundan $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}_{A,A'}(f) = g$ bulunur. O halde $\mathcal{F}$ funktoru doludur. □

2.2.4. Alt kategoriler

Tanım 2.29. $\mathbf{A}$ *ve* $\mathbf{B}$ *birer kategori olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa* $\mathbf{A}$ *kategorisi* $\mathbf{B}$ *kategorisinin bir* ***alt kategori****sidir denir:*

(i) $\mathbf{Ob}(\mathbf{A}) \subseteq \mathbf{Ob}(\mathbf{B})$ *dir,*

(ii) *Her* $A, B \in \mathbf{Ob}(\mathbf{A})$ *için* $\hom_{\mathbf{A}}(A, B) \subseteq \hom_{\mathbf{B}}(A, B)$ *dir,*

(iii) *Her* $A \in \mathbf{Ob}(\mathbf{A})$ *için* $\mathbf{B}$ *içindeki* A *üzerindeki birim morfizmi, aynı zamanda* $\mathbf{A}$ *içinde* A *üzerindeki birim morfizmidir,*

(iv) $\mathbf{A}$ *daki bileşke işlemi* $\mathbf{B}$ *deki bileşke işleminin bir kısıtlamasıdır.*

Önerme 2.12. *Eğer* $\mathbf{A}$ *kategorisi* $\mathbf{B}$ *kategorisinin bir alt kategorisi ise, o zaman her* $\mathbf{A}-$*izomorfizm aynı zamanda bir* $\mathbf{B}-$*izomorfizmdir.*

İspat $\mathbf{A}$ kategorisi $\mathbf{B}$ kategorisinin bir alt kategorisi ve $A \xrightarrow{\varepsilon} A'$ bir $\mathbf{A}-$izomorfizm olsun. O zaman bir ve yalnız bir $\mathbf{A}-$morfizm $A' \xrightarrow{\varepsilon^{-1}} A$ vardır ki

$$\varepsilon \circ \varepsilon^{-1} = id_{A'} \text{ ve } \varepsilon^{-1} \circ \varepsilon = id_A \tag{2.3}$$

dir. Burada; $\mathbf{A}$ kategorisi $\mathbf{B}$ kategorisinin bir alt kategorisi olduğundan $A \xrightarrow{\varepsilon} A'$ ve $A' \xrightarrow{\varepsilon^{-1}} A$ aynı zamanda birer $\mathbf{B}-$morfizm, $\mathbf{A}$ nın $A \xrightarrow{id_A} A$ ve $A' \xrightarrow{id_{A'}} A'$ birim morfizmleri aynı zamanda $\mathbf{B}$ nin $A \xrightarrow{id_A} A$ ve $A' \xrightarrow{id_{A'}} A'$ birim morfizmleri, $\mathbf{A}$ nın bileşke işlemi $\mathbf{B}$ nin bileşke işleminin bir kısıtlaması ve de (2.3) eşitliklerinden ötürü $A \xrightarrow{\varepsilon} A'$ bir $\mathbf{B}-$izomorfizmdir. □

Tanım 2.30. $\mathbf{A}$ *kategorisi* $\mathbf{B}$ *kategorisinin bir alt kategorisi olsun. Eğer her* $A, B \in \mathbf{Ob}\left(\mathbf{A}\right)$ *için* $\hom_{\mathbf{A}}\left(A, B\right) = \hom_{\mathbf{B}}\left(A, B\right)$ *oluyorsa* $\mathbf{A}$ *ya* $\mathbf{B}$ *nin bir* ***dolu altkategorisi*** *denir.*

Önerme 2.13. $\mathbf{A}'$*,* $\mathbf{A}$ *nın ve* $\mathbf{B}'$*,* $\mathbf{B}$ *nin bir dolu alt kategorisi olsun. Ayrıca* $\mathcal{F} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *ve* $\mathcal{G} : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$*,* $id_{\mathbf{A}} \approx \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ *ve* $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \approx id_{\mathbf{B}}$ *koşullarını sağlayan iki funktor olsun. Eğer her* $\mathbf{A}'-$*obje* A *ve her* $\mathbf{B}'-$*obje* B *için* $\mathcal{F}\left(A\right)$ *bir* $\mathbf{B}'-$*obje ve* $\mathcal{G}\left(B\right)$ *bir* $\mathbf{A}'-$*obje ise, her* $A \xrightarrow{f} A' \in \mathbf{Mor}\left(\mathbf{A}'\right)$ *ve her* $B \xrightarrow{g} B' \in \mathbf{Mor}\left(\mathbf{B}'\right)$ *için*

$$\mathcal{F}'\left(A \xrightarrow{f} A'\right) = \mathcal{F}\left(A\right) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}\left(A'\right)$$
$$\mathcal{G}'\left(B \xrightarrow{g} B'\right) = \mathcal{G}\left(B\right) \xrightarrow{\mathcal{G}(g)} \mathcal{G}\left(B'\right)$$

eşitlikleriyle tanımlı $\mathcal{F}' : \mathbf{A}' \longrightarrow \mathbf{B}'$ *ve* $\mathcal{G}' : \mathbf{B}' \longrightarrow \mathbf{A}'$ *funktorları birer denkliktir (Demirci 2013).*

İspat $\mathcal{F}'$ ve $\mathcal{G}'$ nin sırayla $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{G}$ nin birer kısıtlama funktoru olduğu açıktır. Varsayım gereği $id_{\mathbf{A}} \approx \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ dir. $\tau = \left(A \xrightarrow{\tau_A} \left(\mathcal{G} \circ \mathcal{F}\right)\left(A\right)\right)_{A \in \mathbf{Ob}(\mathbf{A})}$ ailesi $id_{\mathbf{A}}$ den $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ ye tanımlı bir doğal izomorfizm olsun. Şimdi $\tau' = \left(A \xrightarrow{\tau_A} \left(\mathcal{G}' \circ \mathcal{F}'\right)\left(A\right)\right)_{A \in \mathbf{Ob}(\mathbf{A}')}$ ailesini tanımlayalım ve bu ailenin $id_{\mathbf{A}'}$ den $\mathcal{G}' \circ \mathcal{F}'$ ye tanımlı bir doğal izomorfizm olduğunu görelim. $\mathbf{A}'$ kategorisi $\mathbf{A}$ nın bir dolu alt kategorisi ve $\forall A \in \mathbf{Ob}\left(\mathbf{A}'\right)$ için $\left(\mathcal{G}' \circ \mathcal{F}'\right)\left(A\right) = \left(\mathcal{G} \circ \mathcal{F}\right)\left(A\right)$ olduğundan $\forall A \in \mathbf{Ob}\left(\mathbf{A}'\right)$ için $A \xrightarrow{\tau_A} \left(\mathcal{G}' \circ \mathcal{F}'\right)$ bir $\mathbf{A}'-$izomorfizmdir. Aynı zamanda τ bir doğal dönüşüm olduğundan $\mathbf{A}-$morfizm her $A \xrightarrow{f} A'$ için

$$\left(\mathcal{G} \circ \mathcal{F}\right)\left(f\right) \circ \tau_A = \tau_{A'} \circ f$$

dir. Herhangi bir $\mathbf{A}'-$morfizm $A \xrightarrow{f} A'$ için

$$\left(\mathcal{G}' \circ \mathcal{F}'\right)\left(f\right) \circ \tau_A = \mathcal{G}'\left(\mathcal{F}'\left(f\right)\right) \circ \tau_A = \mathcal{G}\left(\mathcal{F}\left(f\right)\right) \circ \tau_A = \left(\mathcal{G} \circ \mathcal{F}\right)\left(f\right) \circ \tau_A = \tau_{A'} \circ f$$

olduğundan

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "f"'] & \left(\mathcal{G}' \circ \mathcal{F}'\right)\left(A\right) \arrow[d, "\left(\mathcal{G}' \circ \mathcal{F}'\right)\left(f\right)"] \\ A' \arrow[r, "\tau_{A'}"'] & \left(\mathcal{G}' \circ \mathcal{F}'\right)\left(A'\right) \end{tikzcd}$$

dikdörtgeni değişmeli olur. Dolayısıyla $id_{\mathbf{A}'} \approx \mathcal{G}' \circ \mathcal{F}'$ dir. Benzer şekilde $\mathcal{F}' \circ \mathcal{G}' \approx id_{\mathbf{B}'}$ olduğu görülür. $\square$

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Sınırlı, Dağılımlı Örgülerin Topolojik Gösterimi

Tanım 3.1. *X bir küme, $\mathcal{P}(X)$ onun kuvvet kümesi ve $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ olsun. Eğer $\mathcal{U}$ nun her sonlu alt ailesinin kesişimi boştan farklı ise $\mathcal{U}$ ya* ***sonlu arakesit özelliği****ne sahiptir denir (Willard 1970).*

Tanım 3.2. *(X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer A nın her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, A* ***kümesi*** *(X, τ)* ***topolojik uzayında kompakt****tır denir. Özel halde eğer X kümesi bu uzayda kompakt oluyorsa, (X, τ) topolojik uzayı* ***kompakt****tır denir (Willard 1970).*

Tanım 3.3. *(X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ ve $x \neq y$ için $x \in G$, $y \in H$ ve $G \cap H = \emptyset$ olacak şekilde $\tau-$açık G ve H kümeleri varsa, (X, τ) topolojik uzayı* ***Hausdorff'****tur denir (Willard 1970).*

Tanım 3.4. *Bir (X, τ) topolojik uzayının elemanları kaçık (hem açık hem de kapalı) kümelerden oluşan bir tabanı varsa, (X, τ) topolojik uzayı* ***0-boyutlu****dur denir.*

Teorem 3.1. *Bir topolojik uzayın kompakt olması için gerek ve yeter şart sonlu arakesit özelliğine sahip kapalı kümelerden oluşan her kümeler ailesinin kesişiminin boştan farklı olmasıdır (Willard 1970).*

Teorem 3.2. *(Alexander Alttaban Teoremi). (X, τ) bir topolojik uzay ve σ, τ nun bir alttabanı olsun. (X, τ) topolojik uzayının kompakt olması için gerek ve yeter şart X in σ içindeki her açık örtüsünden sonlu bir alt örtü seçilebilmesidir (Willard 1970).*

Teorem 3.3. *(Tychonoff Teoremi). $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ bir topolojik uzaylar ailesi olmak üzere, $\prod_{i \in I} X_i$ çarpım uzayının kompakt olması için gerek ve yeter şart $\forall i \in I$ için (X_i, τ_i) topolojik uzayının kompakt olmasıdır (Willard 1970).*

Önerme 3.1. *(X, τ) bir topolojik uzay ve β, τ nun bir tabanı olmak üzere; (X, τ) uzayının Hausdorff olması için gerek ve yeter şart $\forall x, y \in X$ ve $x \neq y$ için $x \in B_1$, $y \in B_2$ ve $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ olacak şekilde $B_1, B_2 \in \beta$ kümelerinin bulunabilmesidir.*

İspat Tanım 3.3 ten kolayca elde edilir. $\square$

Teorem 3.4. *Kompakt bir topolojik uzayın her kapalı altkümesi de kompakttır (Willard 1970).*

Teorem 3.5. *Bir Hausdorff topolojik uzayın kompakt altkümeleri kapalıdır (Willard 1970).*

Önerme 3.2. *(X, τ_X) ve (Y, τ_Y) birer topolojik uzay, β_Y, τ_Y için bir taban ve $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. f nin $\tau_X - \tau_Y$ sürekli olması için gerek ve yeter şart $\forall G \in \beta_Y$ için $f^{-1}(Y \setminus G)$ kümesinin τ_X-kapalı olmasıdır.*

İspat $(\Rightarrow)$ Herhangi bir $G \in \beta_Y$ alalım. $Y \setminus G$ kümesi τ_Y-kapalı ve varsayım gereği f fonksiyonu $\tau_X - \tau_Y$ sürekli olduğundan $f^{-1}(Y \setminus G)$ kümesi τ_X-kapalıdır.

$(\Leftarrow)$ Herhangi bir $G \in \beta_Y$ alalım. Varsayım gereği $f^{-1}(Y \setminus G)$ kümesi τ_X-kapalıdır. Aynı zamanda

$$f^{-1}(Y \setminus G) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(G) = X \setminus f^{-1}(G)$$

olduğundan $X \setminus f^{-1}(G)$ kümesi τ_X-kapalıdır. Dolayısıyla $f^{-1}(G)$ kümesi τ_X-açıktır. $\square$

Bir $(L, \leq)$ sınırlı örgüsünün tüm asal filtrelerinin kümesini $\mathcal{PF}(L)$ ile, $a \in L$ olmak üzere $(L, \leq)$ in a elemanını bulunduran tüm asal filtrelerinin kümesini ise $\varphi(a)$ ile gösterelim. Yani $\varphi(a)$, $\{P \in \mathcal{PF}(L) \mid a \in P\}$ kümesini göstersin. Görüldüğü üzere $\forall a \in L$ için $\varphi(a) \subseteq \mathcal{PF}(L)$ dir. $\mathcal{PF}(L) \setminus \varphi(a)$ kümesini $\varphi(a)^c$ ile göstereceğiz.

Önerme 3.3. *$(L, \leq)$ bir sınırlı, örgü olmak üzere;*

1. *$\varphi(\bot) = \emptyset$ ve $\varphi(\top) = \mathcal{PF}(L)$ dir.*

2. *$\forall a, b \in L$ için $\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \cup \varphi(b)$ dir.*

3. *$\forall a, b \in L$ için $\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \cap \varphi(b)$ dir.*

İspat

1. $\varphi(\bot) = \emptyset$ olduğunu görelim: Farzedelim ki $\varphi(\bot) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $(L, \leq)$ in öyle bir P asal filtresi vardır ki $\bot \in P$ dir. Herhangi bir $x \in L$ alalım. $\bot \leq x$ ve P bir asal filtre olduğundan (F1) gereği $x \in P$ olur. Dolayısıyla $L \subseteq P$ olur. Fakat bu durum asal filtre tanımında $P \subsetneqq L$ olmasıyla çelişir.

$\varphi(\top) = \mathcal{PF}(L)$ olduğunu görelim: Bunun için küme eşitliğini kullanalım. $\varphi(\top) \subseteq \mathcal{PF}(L)$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $\mathcal{PF}(L) \subseteq \varphi(\top)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $P \in \mathcal{PF}(L)$ ise Sonuç 2.1 gereğince $\top \in P$ ve dolayısıyla $P \in \varphi(\top)$ olur. O halde $\mathcal{PF}(L) \subseteq \varphi(\top)$ dir.

2. Herhangi $a, b \in L$ için $\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \cup \varphi(b)$ olduğunu göstermek için küme eşitliği tanımını kullanacağız. $P \in \varphi(a \vee b)$ olsun. Bu durumda $a \vee b \in P$ olur. Burada P, $(L, \leq)$ in bir asal filtresi olduğundan $a \in P$ veya $b \in P$ olur. Dolayısıyla $P \in \varphi(a)$ veya $P \in \varphi(b)$ olur. Böylece $P \in \varphi(a) \cup \varphi(b)$ olur ki bu durum $\varphi(a \vee b) \subseteq \varphi(a) \cup \varphi(b)$ kapsamasını verir.

   Şimdi de $P \in \varphi(a) \cup \varphi(b)$ olsun. Bu durumda $P \in \varphi(a)$ veya $P \in \varphi(b)$ dir. Genelliği bozmayacağından $P \in \varphi(a)$ olsun. $\varphi(a)$ tanımı gereği $a \in P$ olur. $a \leq a \vee b$ ve P, $(L, \leq)$ in bir asal filtresi olduğundan $a \vee b \in P$ ve dolayısıyla $P \in \varphi(a \vee b)$ elde edilir. Böylece $\varphi(a) \cup \varphi(b) \subseteq \varphi(a \vee b)$ kapsaması da elde edilir.

3. İstenen eşitliği göstermek için yine küme eşitliği tanımını kullanalım. Herhangi $a, b \in L$ ve $P \in \varphi(a \wedge b)$ alalım. Bu durumda $a \wedge b \in P$ dir. $a \wedge b \leq a$, $a \wedge b \leq b$ ve P bir asal filtre olduğundan $a \in P$ ve $b \in P$ olur. O halde $P \in \varphi(a)$ ve $P \in \varphi(b)$ olur. Böylece $P \in \varphi(a) \cap \varphi(b)$ olur. Dolayısıyla $\varphi(a \wedge b) \subseteq \varphi(a) \cap \varphi(b)$ kapsaması vardır.

   Şimdi de $P \in \varphi(a) \cap \varphi(b)$ olsun. Bu durumda $P \in \varphi(a) \Rightarrow a \in P$ ve $P \in \varphi(b) \Rightarrow b \in P$ olur. P, $(L, \leq)$ in bir asal filtresi olduğundan $a \wedge b \in P$ ve dolayısıyla $P \in \varphi(a \wedge b)$ elde edilir. Böylece $\varphi(a) \cap \varphi(b) \subseteq \varphi(a \wedge b)$ kapsaması vardır. □

Sonuç 3.1. *$(L, \leq)$ bir sınırlı örgü ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in L$ olsun. Bu durumda*

1. $\varphi(a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee ... \vee a_n) = \varphi(a_1) \cup \varphi(a_2) \cup \varphi(a_3) \cup ... \cup \varphi(a_n)$

2. $\varphi(a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge ... \wedge a_n) = \varphi(a_1) \cap \varphi(a_2) \cap \varphi(a_3) \cap ... \cap \varphi(a_n)$

eşitlikleri vardır.

İspat Önerme 3.3 ten hemen çıkar. □

Sonuç 3.2. *$(L, \leq)$ bir sınırlı örgü ve $x, y \in L$ olsun. Eğer $x \leq y$ ise $\varphi(x) \subseteq \varphi(y)$ dir.*

İspat $x \leq y$ olsun. Bu durumda

$$x \vee y = y \Rightarrow \varphi(x \vee y) = \varphi(y) \Rightarrow \varphi(x) \cup \varphi(y) = \varphi(x \vee y) = \varphi(y)$$
$$\Rightarrow \varphi(x) \subseteq \varphi(y)$$

olur. □

Sonuç 3.3. *$(L, \leq)$ bir sınırlı, dağılımlı örgü ve $a, b \in L$ olsun. Bu durumda $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ olması için gerek ve yeter şart $a \neq b$ olmasıdır.*

İspat $(\Rightarrow)$ $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ olsun. Bu durumda $\varphi(a) \nsubseteq \varphi(b)$ veya $\varphi(b) \nsubseteq \varphi(a)$ dir. Genelliği bozmayacağından $\varphi(a) \nsubseteq \varphi(b)$ olsun. O halde $\exists P \in \mathcal{PF}(L)$ öyle ki $P \in \varphi(a)$ ve $P \notin \varphi(b)$ olur. O halde $a \in P$ ve $b \notin P$ ve dolayısıyla $a \neq b$ olur.

$(\Leftarrow)$ $a \neq b$ olsun. Bu durumda $a \nleq b$ veya $b \nleq a$ dir (çünkü $a \leq b$ ve $b \leq a$ olsaydı, $(L, \leq)$ bir kısmi sıralı küme olduğundan, ters simetri özelliği gereği $a = b$ olurdu). Genelliği bozmayacağından $a \nleq b$ olsun. $\uparrow a$, $(L, \leq)$ in bir filtresi ve $\downarrow b$, $(L, \leq)$ in bir idealidir. $\uparrow a \cap \downarrow b = \emptyset$ olduğunu görelim. Diyelim ki $\uparrow a \cap \downarrow b \neq \emptyset$ olsun. O zaman $\exists x \in L$ öyle ki $x \in \uparrow a$ ve $x \in \downarrow b$ dir. $\uparrow a$ ve $\downarrow b$ tanımından $a \leq x$ ve $x \leq b$ olacağından geçişme özelliği gereği $a \leq b$ olur. Fakat bu durum $a \nleq b$ olması ile çelişir. O halde $\uparrow a \cap \downarrow b = \emptyset$ dir. Önteorem 2.1 gereği $(L, \leq)$ in öyle bir P asal filtresi vardır ki $\uparrow a \subseteq P$ ve $P \cap \downarrow b = \emptyset$ olur. Böylece $a \in \uparrow a \subseteq P \Rightarrow a \in P$, $b \in \downarrow b \Rightarrow b \notin P$ olduğundan $P \in \varphi(a)$ ve $P \notin \varphi(b)$ olur. Yani $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ dir. □

$(L, \leq)$ bir sınırlı örgü olmak üzere σ_L ile $\{\varphi(x) \mid x \in L\} \cup \{\varphi(x)^c \mid x \in L\}$ ailesini ve $\sigma_L^{\cap}$ ile $\{\bigcap \mathcal{S} \mid \mathcal{S} \subseteq \sigma_L$ ve $\mathcal{S}$ sonlu$\}$ ailesini gösterelim. Burada $\varphi(\perp) = \emptyset$, $\varphi(\top) = \mathcal{PF}(L)$ olduğundan $\emptyset, \mathcal{PF}(L) \in \sigma_L$ dir. Ayrıca $\sigma_L \subseteq \sigma_L^{\cap}$ olduğundan $\emptyset, \mathcal{PF}(L) \in \sigma_L^{\cap}$ dir.

Önteorem 3.1. *Eğer $\mathcal{U} \in \sigma_L^{\cap}$ ise $\mathcal{U} = \varphi(x) \cap \varphi(y)^c$ olacak şekilde $x, y \in L$ vardır.*

İspat Herhangi bir $\mathcal{U} \in \sigma_L^{\cap}$ alalım. Önerme 3.3 gereği $\mathcal{U} = \emptyset$ olması durumunda $\mathcal{U} =$

$\varphi(\bot) \cap \varphi(\top)^c$ olarak, $\mathcal{U} = \mathcal{PF}(L)$ olması durumunda da $\mathcal{U} = \varphi(\top) \cap \varphi(\bot)^c$ olarak yazılabilir. $\emptyset \neq \mathcal{U} \neq \mathcal{PF}(L)$ olsun. $\sigma_L^{\cap}$ tanımından, σ_L nin öyle sonlu bir $\mathcal{S}$ altailesi vardır ki $\mathcal{U} = \bigcap \mathcal{S}$ yazılabilir. Burada $\mathcal{S}$ sonlu olduğundan, öyle $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m \in L$ vardır ki

$$\mathcal{S} = \{\varphi(x_1), \varphi(x_2), ..., \varphi(x_n), \varphi(y_1)^c, \varphi(y_2)^c, ..., \varphi(y_m)^c\}$$

dir. Dolayısıyla Sonuç 3.1 yardımıyla

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \bigcap \mathcal{S} \\
&= (\varphi(x_1) \cap \varphi(x_2) \cap ... \cap \varphi(x_n)) \cap (\varphi(y_1)^c \cap \varphi(y_2)^c \cap ... \cap \varphi(y_m)^c) \\
&= \left(\bigcap_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} \varphi(y_j)\right)^c \\
&= \varphi(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n) \cap \varphi(y_1 \vee y_2 \vee ... \vee y_m)^c
\end{aligned}$$

olur. Burada $x = x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n$ ve $y = y_1 \vee y_2 \vee ... \vee y_m$ olarak seçersek $\mathcal{U} = \varphi(x) \cap \varphi(y)^c$ olur. □

$(L, \leq)$ bir sınırlı örgü olmak üzere, σ_L ailesinin $\mathcal{PF}(L)$ üzerinde doğurduğu topolojiyi τ_L ile gösterirsek, σ_L ve $\sigma_L^{\cap}$ sırayla τ_L için bir alttaban ve bir taban olur. Sonuç olarak, $(\mathcal{PF}(L), \tau_L)$ ikilisi bir topolojik uzay olur. σ_L ailesi τ_L nin bir alttabanı olduğundan $\forall x \in L$ için $\varphi(x)$ ve $\varphi(x)^c$ kümeleri τ_L-açıktır.

Önerme 3.4. *$(\mathcal{PF}(L), \tau_L)$ topolojik uzayı 0-boyutludur.*

İspat $\sigma_L^{\cap}$ ailesi τ_L nin bir tabanı olduğundan bu ailenin her elemanının τ_L-kaçık olduğunu göstermek yeterlidir.

$\sigma_L^{\cap} \subseteq \tau_L$ olduğundan $\sigma_L^{\cap}$ nın her elemanı τ_L-açık olduğu barizdir.

Şimdi de $\sigma_L^{\cap}$ nın her elemanının τ_L-kapalı olduğunu gösterelim. Bunun için ise Önteorem 3.1 gereği herhangi $x, y \in L$ için $\mathcal{PF}(L) \setminus (\varphi(x) \cap \varphi(y)^c)$ kümesinin τ_L-açık olduğunu göstermek yeterlidir. Şimdi, herhangi $x, y \in L$ alalım.

$$\begin{aligned}
\mathcal{PF}(L) \setminus (\varphi(x) \cap \varphi(y)^c) &= (\mathcal{PF}(L) \setminus \varphi(x)) \cup (\mathcal{PF}(L) \setminus \varphi(y)^c) \\
&= \varphi(x)^c \cup \varphi(y)
\end{aligned}$$

dir. Burada $\varphi(x)^c$ ve $\varphi(y)$ kümeleri τ_L-açık olduğundan $\varphi(x)^c \cup \varphi(y)$ kümesi τ_L-açık olur. □

Önerme 3.5. $(\mathcal{PF}(L), \tau_L)$ *topolojik uzayı, Hausdorff bir topolojik uzaydır.*

İspat $P \neq Q$ olacak şekilde herhangi $P, Q \in \mathcal{PF}(L)$ alalım. P ve Q, $(L, \leq)$ in birer asal filtresi olduğundan $P \neq \emptyset \neq Q$ dir. $P \neq Q$ olduğundan $P \nsubseteq Q$ veya $Q \nsubseteq P$ dir. Genelliği bozmayacağından $P \nsubseteq Q$ olsun. Bu durumda $\exists a \in P$ öyle ki $a \notin Q$ olur. Dolayısıyla $(P \in \varphi(a)$ ve $Q \notin \varphi(a)) \Rightarrow (P \in \varphi(a)$ ve $Q \in \varphi(a)^c)$ olur. $\varphi(a)$ ve $\varphi(a)^c$ birer τ_L-açık küme ve $\varphi(a) \cap \varphi(a)^c = \emptyset$ olduğundan $(\mathcal{PF}(L), \tau_L)$ bir Hausdorff uzay olur. □

Önerme 3.6. $(\mathcal{PF}(L), \tau_L)$ *topolojik uzayı kompakttır.*

İspat σ_L, τ_L nin bir alttabanı olduğundan Teorem 3.2 uyarınca $\mathcal{PF}(L)$ nin σ_L içindeki her açık örtüsünden sonlu bir alt örtü seçilebildiğini göstermek yeterlidir. Nitekim

$$\sigma_L = \{\varphi(x) \mid x \in L\} \cup \{\varphi(x)^c \mid x \in L\}$$

olduğunu hatırlayalım. J_1 ve J_2 damga kümeleri için $\mathcal{U} = \{\varphi(x_j) \mid x_j \in L,\ j \in J_1\} \cup \{\varphi(x_j)^c \mid x_j \in L,\ j \in J_2\}$ ailesi $\mathcal{PF}(L)$ nin σ_L içindeki bir açık örtüsü olsun. Yani $\mathcal{PF}(L) = \bigcup \mathcal{U}$ olsun.

Önce $J_1 = \emptyset$ ve $J_2 \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\{\varphi(x_j) \mid x_j \in L,\ j \in J_1\} = \emptyset$ ve dolayısıyla $\mathcal{U} = \{\varphi(x_j)^c \mid x_j \in L,\ j \in J_2\}$ olur. $A = \{x_j \in L \mid j \in J_2\}$ kümesinin ürettiği filtre F_A yı göz önüne alalım ve $\perp \in F_A$ olduğunu görelim. Farzedelim ki $\perp \notin F_A$ olsun. $I = \{\perp\}$ kümesi $(L, \leq)$ nin bir idealidir. $F_A \cap I = \emptyset$ olduğundan Önteorem 2.1 gereği $(L, \leq)$ in öyle bir P asal filtresi vardır ki $F_A \subseteq P$ ve $I \cap P = \emptyset$ dir. $\mathcal{PF}(L) = \bigcup \mathcal{U}$ olduğundan $\exists j_0 \in J_2$ öyle ki $P \in \varphi(x_{j_0})^c$ ve dolayısıyla $x_{j_0} \notin P$ dir. Buradan

$$x_{j_0} \in A \subseteq F_A \subseteq P \Rightarrow x_{j_0} \in P$$

olur. Fakat bu durum $x_{j_0} \notin P$ olmasıyla çelişir. Bu çelişki $\perp \in F_A$ olduğunu söyler. F_A tanımı (bkz. Önerme 2.3) gereği $\exists \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq A$ öyle ki $x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n \leq \perp$ dir. Önerme 3.3 uyarınca

$$\varphi(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n) \subseteq \varphi(\perp) = \emptyset$$

olur. Sonuç 3.1 yardımıyla

$$\begin{aligned}\mathcal{PF}(L) &= \varphi(\bot)^c \\ &= \varphi(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n)^c \\ &= (\varphi(x_1) \cap \varphi(x_2) \cap ... \cap \varphi(x_n))^c \\ &= \varphi(x_1)^c \cup \varphi(x_2)^c \cup ... \cup \varphi(x_n)^c\end{aligned}$$

olduğundan $\{\varphi(x_1)^c, \varphi(x_2)^c, ..., \varphi(x_n)^c\}$ ailesi $\mathcal{U}$ nun sonlu bir alt örtüsü olur.

Şimdi de; $J_1 \neq \emptyset$ ve $J_2 = \emptyset$ olduğunu varsayalım. O zaman $\{\varphi(x_j)^c \mid x_j \in L,\ j \in J_2\}$ $= \emptyset$ ve dolayısıyla $\mathcal{U} = \{\varphi(x_j) \mid x_j \in L,\ j \in J_1\}$ olur. $B = \{x_j \in L \mid j \in J_1\}$ kümesinin ürettiği ideal olan I_B yi göz önüne alalım ve $\top \in I_B$ olduğunu görelim. Farzedelim ki $\top \notin I_B$ olsun. $F = \{\top\}$ kümesi $(L, \leq)$ in bir filtresi ve $F \cap I_B = \emptyset$ olduğundan Önteorem 2.1 gereği $(L, \leq)$ in öyle bir P asal filtresi vardır ki $F \subseteq P$ ve $I_B \cap P = \emptyset$ dir. $\mathcal{PF}(L) = \bigcup \mathcal{U}$ olduğundan $\exists j_0 \in J_1$ öyle ki $P \in \varphi(x_{j_0})$ ve dolayısıyla $x_{j_0} \in P$ dir. Buradan

$$x_{j_0} \in B \subseteq I_B \Rightarrow x_{j_0} \in I_B \cap P \Rightarrow I_B \cap P \neq \emptyset$$

olur. Fakat bu durum $I_B \cap P = \emptyset$ olması ile çelişir. Bu çelişki $\top \in I_B$ olduğunu söyler. I_B tanımı (bkz. Önerme 2.4) gereği $\exists \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq B$ öyle ki $\top \leq x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n$ dir. Dolayısıyla Önerme 3.3, Sonuç 3.2 ve Sonuç 3.1 gereği

$$\begin{aligned}\mathcal{PF}(L) &= \varphi(\top) \\ &\subseteq \varphi(x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n) \\ &= \varphi(x_1) \cup \varphi(x_2) \cup ... \cup \varphi(x_n)\end{aligned}$$

olduğundan $\{\varphi(x_1), \varphi(x_2), ..., \varphi(x_n)\}$ ailesi $\mathcal{U}$ nun sonlu bir alt örtüsü olur.

Son olarak, $J_1 \neq \emptyset$ ve $J_2 \neq \emptyset$ olsun. $A = \{x_j \in L \mid j \in J_2\}$ kümesinin ürettiği filtre F_A ve $B = \{x_j \in L \mid j \in J_1\}$ kümesinin ürettiği ideal I_B olsun. $F_A \cap I_B \neq \emptyset$ olduğunu görelim. Diyelim ki $F_A \cap I_B = \emptyset$ olsun. Bu durumda Önteorem 2.1 gereği $(L, \leq)$ in öyle bir P asal filtresi vardır ki $F_A \subseteq P$ ve $P \cap I_B = \emptyset$ dir. Aynı zamanda

$$\begin{aligned}P \in \mathcal{PF}(L) = \bigcup \mathcal{U} &= \left(\bigcup_{x_j \in L,\ j \in J_1} \varphi(x_j) \right) \cup \left(\bigcup_{x_j \in L,\ j \in J_2} \varphi(x_j)^c \right) \\ &\Rightarrow P \in \bigcup_{x_j \in L,\ j \in J_1} \varphi(x_j) \ \text{ veya } P \in \bigcup_{x_j \in L,\ j \in J_2} \varphi(x_j)^c\end{aligned}$$

dir. Eğer $P \in \bigcup_{x_j \in L,\ j \in J_1} \varphi(x_j)$ ise; bu durumda $\exists j_0 \in J_1$ ve $x_{j_0} \in L$ öyle ki $P \in \varphi(x_{j_0})$ $\Rightarrow x_{j_0} \in P$ olur. Burada $x_{j_0} \in B \subseteq I_B \Rightarrow x_{j_0} \in I_B$ olduğundan $P \cap I_B \neq \emptyset$ olur. Bu durum $P \cap I_B = \emptyset$ olmasıyla çelişir. Yok eğer $P \in \bigcup_{x_j \in L,\ j \in J_2} \varphi(x_j)^c$ ise; bu durumda $\exists j_0 \in J_2$ ve $x_{j_0} \in L$ öyle ki $P \in \varphi(x_{j_0})^c \Rightarrow x_{j_0} \notin P$ olur. Aynı zamanda $x_{j_0} \in A \subseteq F_A \Rightarrow x_{j_0} \in F_A$ olduğundan $F_A \nsubseteq P$ dir. Fakat bu durum $F_A \subseteq P$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
&P \notin \bigcup_{x_j \in L,\ j \in J_1} \varphi(x_j) \text{ ve } P \notin \bigcup_{x_j \in L,\ j \in J_2} \varphi(x_j)^c \\
&\Rightarrow P \notin \left(\bigcup_{x_j \in L,\ j \in J_1} \varphi(x_j) \right) \cup \left(\bigcup_{x_j \in L,\ j \in J_2} \varphi(x_j)^c \right) = \bigcup \mathcal{U} = \mathcal{PF}(L) \\
&\Rightarrow P \notin \mathcal{PF}(L)
\end{aligned}$$

olur. Fakat bu durum $P \in \mathcal{PF}(L)$ olmasıyla çelişir. O halde $F_A \cap I_B \neq \emptyset$ dir. Şimdi herhangi bir $x \in F_A \cap I_B$ alalım. Bu durumda $x \in F_A$ ve $x \in I_B$ olur. F_A tanımı gereği $\exists \{a_1, a_2, ..., a_n\} \subseteq A$ öyle ki $a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_n \leq x$ olur ve I_B tanımı gereği $\exists \{b_1, b_2, ..., b_m\} \subseteq B$ öyle ki $x \leq b_1 \vee b_2 \vee ... \vee b_m$ olur. Dolayısıyla $\leq$ nin geçişme özelliği gereği $a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_n \leq b_1 \vee b_2 \vee ... \vee b_m$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}
&\varphi(a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_n) \subseteq \varphi(b_1 \vee b_2 \vee ... \vee b_m) \\
&\Rightarrow \varphi(a_1) \cap \varphi(a_2) \cap ... \cap \varphi(a_n) \subseteq \varphi(b_1) \cup \varphi(b_2) \cup ... \varphi(b_m) \\
&\Rightarrow \left(\varphi(a_1)^c \cup \varphi(a_2)^c \cup ... \cup \varphi(a_n)^c\right)^c \subseteq \varphi(b_1) \cup \varphi(b_2) \cup ... \varphi(b_m) \\
&\Rightarrow \varphi(a_1)^c \cup \varphi(a_2)^c \cup ... \cup \varphi(a_n)^c \cup \varphi(b_1) \cup \varphi(b_2) \cup ... \varphi(b_m) = \mathcal{PF}(L)
\end{aligned}$$

olur. Neticede $\{\varphi(a_1)^c, \varphi(a_2)^c, ..., \varphi(a_n)^c, \varphi(b_1), \varphi(b_2), ..., \varphi(b_m)\}$ ailesi $\mathcal{U}$ nun sonlu bir alt örtüsü olur. □

Tanım 3.5. *Eğer (X, τ) kompakt, Hausdorff ve 0-boyutlu bir topolojik uzay ise bu uzaya bir **Stone uzayı** denir (Johnstone 1986).*

Tanım 3.6. *(X, τ) bir Stone uzayı ve " $\leq$ ", X üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ ve $x \nleq y$ için X in $x \in U$ ve $y \notin U$ olacak şekilde bir U kaçık ve yukarı altkümesi varsa, $(X, \tau, \leq)$ üçlüsüne bir **Priestley uzayı** denir (Davey ve Priestley 1990; Cignoli vd. 1991).*

Örnek 3.1. *$n \geq 2$ herhangi bir doğal sayı ve $X = \{1, 2, ..., n\}$ olsun. Doğal sayılar kümesi üzerindeki bilinen "$\leq$" kısmi sıralama bağıntısı, X üzerinde de bir kısmi sıralama bağıntısıdır. X üzerindeki ayrık topoloji $\tau_{\mathcal{D}}$ olmak üzere, $(X, \tau_{\mathcal{D}}, \leq)$ üçlüsü bir Priestley uzayı belirtir. Gerçekten; $(X, \tau_{\mathcal{D}})$ nin bir Stone uzayı olduğu açıktır. $x \nleq y$ olacak şekilde herhangi $x, y \in X$ alalım. Bu durumda $y < x$ dir. $U = \{x, x+1, ..., n\}$ olarak tanımlanan U kümesi $\tau_{\mathcal{D}}-$kaçık ve bir yukarı kümedir. Aynı zamanda $x \in U$ ve $y \notin U$ olduğundan $(X, \tau_{\mathcal{D}}, \leq)$ bir Priestley uzayıdır.*

Uyarı 3.1. *Örnek 3.1 de tanımladığımız $(X, \tau_{\mathcal{D}})$ topolojik uzayının kompakt olduğunu garanti etmek adına X kümesini sonlu bir küme olarak tanımladık. Bununla birlikte Örnek 3.2 de olduğu gibi sonsuz elemanlı Priestley uzayı örnekleri de verilebilir.*

Uyarı 3.2. *Bilinen eşitlik bağıntısı olan "$=$" in herhangi bir X kümesi üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olduğu açıktır. Dolayısıyla eğer (X, τ) bir Stone uzayı ise, bu uzayın Hausdorff olmasının bir sonucu olarak, $(X, \tau, =)$ şeklinde bir Priestley uzayı olduğunu söyleyebiliriz. Yani her Stone uzayı özel bir Priestley uzayıdır.*

Önteorem 3.2. *Eğer $(L, \leq)$ bir sınırlı, dağılımlı örgü ise, o zaman $(\mathcal{PF}(L), \tau_L, \subseteq)$ bir Priestley uzayıdır.*

İspat $(L, \leq)$ bir sınırlı, dağılımlı örgü olsun. $(\mathcal{PF}(L), \tau_L)$ nin kompakt, Hausdorff ve 0-boyutlu topolojik uzay olduğunu yukarıda gördük. $\subseteq$ bağıntısının $\mathcal{PF}(L)$ üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olduğu da açıktır. Şimdi $P, Q \in \mathcal{PF}(L)$ (yani $(L, \leq)$ in herhangi iki asal filtresi) ve $P \nsubseteq Q$ olsun. O zaman $\exists x \in L$ öyle ki $x \in P$ ve $x \notin Q$ dir. Dolayısıyla $P \in \varphi(x)$ ve $Q \notin \varphi(x)$ dir. $\sigma_L^{\cap}$, τ_L nin kaçık kümelerden oluşan bir tabanı olduğundan, $\varphi(x)$ aynı zamanda bir kaçık kümedir.

Son olarak $\varphi(x)$ in bir yukarı küme olduğunu görelim. Bunun için $R_1 \in \varphi(x)$ ve $R_1 \subseteq R_2$ koşulunu sağlayan herhangi $R_1, R_2 \in \mathcal{PF}(L)$ alırsak; $x \in R_1$ ve $R_1 \subseteq R_2$ olduğundan $R_2 \in \varphi(x)$ olur. Böylece $\varphi(x)$ bir yukarı küme olur. $\square$

Örnek 3.2. *Uyarı 3.1 de sonsuz elemanlı Priestley uzaylarının varlığından söz ettik. Örnek 2.3 ve Örnek 2.4 te olduğu gibi verilen $(L, \leq)$ ve $(M, \subseteq)$ sınırlı ve dağılımlı örgülerinin sonsuz çoklukta asal filtrelerinin olduğunu belirtmiştik. Dolayısıyla $\mathcal{PF}(L)$ ve*

$\mathcal{PF}(M)$ sonsuz elemanlı kümelerdir. Önteorem 3.2 gereği $(\mathcal{PF}(L), \tau_L, \subseteq)$ ile $(\mathcal{PF}(M), \tau_M, \subseteq)$ yapıları birer Priestley uzayıdır.

$(L, \leq)$ bir sınırlı ve dağılımlı örgü olmak üzere bu örgüyü kolaylık olsun diye kısaca L harfiyle ve $(\mathcal{PF}(L), \tau_L, \subseteq)$ Priestley uzayını kısaca $\mathcal{PS}(L)$ ile göstereceğiz.

Önerme 3.7. *$(X, \tau, \leq)$ bir Priestley uzayı ve $\emptyset \subsetneqq U \subsetneqq X$ koşulunu sağlayan U kümesi, bu uzayda bir yukarı kaçık küme olsun. O zaman her $x \in U$ ve her $y \in X \setminus U$ için*

$$x \nleq y$$

dir.

İspat Keyfi $x \in U$ ve $y \in X \setminus U$ alalım. Eğer $x \leq y$ olsaydı; $x \in U$ ve U yukarı küme olduğundan $y \in U$ olurdu ve bu durum $y \in X \setminus U$ olmasıyla çelişirdi. □

Önteorem 3.3. *$\mathcal{U}$, $\mathcal{PS}(L)$ Priestley uzayının bir yukarı kaçık kümesidir ancak ve ancak $\exists a \in L$ öyle ki $\mathcal{U} = \varphi(a)$ dir.*

İspat $(\Leftarrow)$ Bir $a \in L$ için $\mathcal{U} = \varphi(a)$ olsun. $\varphi(a) \in \sigma_L^{\cap}$ olduğundan $\varphi(a)$ bir kaçık kümedir. Ayrıca $\varphi(a)$ nın bir yukarı küme olduğunu da Önteorem 3.2 nin kanıtında gördük. Böylece $\mathcal{U}$ bir yukarı, kaçık küme olur.

$(\Rightarrow)$ $\mathcal{U}$ kümesi $\mathcal{PS}(L)$ Priestley uzayının bir yukarı kaçık kümesi olsun. Önerme 3.3 gereği eğer $\mathcal{U} = \emptyset$ ise $\mathcal{U} = \varphi(\perp)$ olarak, $\mathcal{U} = \mathcal{PF}(L)$ ise $\mathcal{U} = \varphi(\top)$ olarak yazılabilir. $\emptyset \subsetneqq \mathcal{U} \subsetneqq \mathcal{PF}(L)$ olsun. Bir I damga kümesi için

$$\mathcal{PF}(L) \setminus \mathcal{U} = \{Q_i \in \mathcal{PF}(L) \mid i \in I\}$$

olarak yazılabilir. $\forall i \in I$ için $Q_i \in \mathcal{PF}(L) \setminus \mathcal{U}$ kümesi $(L, \leq)$ in bir asal filtresi olduğundan $Q_i \neq \emptyset$ dir. Keyfi $P \in \mathcal{U}$ alalım. Yine P kümesi $(L, \leq)$ in bir asal filtresi olduğundan $P \neq \emptyset$ dir. Ayrıca $\forall i \in I$ için $P \nsubseteq Q_i$ dir (Önerme 3.7 den). O zaman $\forall i \in I$ için $\exists a_i \in P$ öyle ki $a_i \notin Q_i$ dir. Buradan $Q_i \notin \varphi(a_i)$ ve dolayısıyla $Q_i \in \varphi(a_i)^c$ elde edilir. Böylece

$$\mathcal{PF}(L) \setminus \mathcal{U} \subseteq \bigcup_{i \in I} \varphi(a_i)^c$$

olur. Yani $\mathcal{A} = \{\varphi(a_i)^c \mid i \in I\}$ kümesi $\mathcal{PF}(L) \setminus \mathcal{U}$ nun bir açık örtüsüdür. $\mathcal{PF}(L) \setminus \mathcal{U}$ aynı zamanda bir kapalı küme olduğundan bu küme Teorem 3.4 gereğince kompakttır.

O halde $i_1, i_2, ..., i_n \in I$ olmak üzere $\mathcal{A}$ nın $\{\varphi(a_{i_1})^c, \varphi(a_{i_2})^c, ..., \varphi(a_{i_n})^c\}$ şeklinde $\mathcal{PF}(L) \setminus \mathcal{U}$ kümesini örten sonlu bir alt kümesi vardır. Böylece Sonuç 3.1 yardımıyla

$$\begin{aligned}\mathcal{PF}(L) \setminus \mathcal{U} \subseteq \varphi(a_{i_1})^c \cup ... \cup \varphi(a_{i_n})^c &\Rightarrow (\varphi(a_{i_1})^c \cup ... \cup \varphi(a_{i_n})^c)^c \subseteq \mathcal{U} \\ &\Rightarrow \varphi(a_{i_1}) \cap ... \cap \varphi(a_{i_n}) \subseteq \mathcal{U} \\ &\Rightarrow \varphi(a_{i_1} \wedge ... \wedge a_{i_n}) = \varphi(a_{i_1}) \cap ... \cap \varphi(a_{i_n}) \subseteq \mathcal{U}\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $a_P = a_{i_1} \wedge ... \wedge a_{i_n}$ şeklinde tanımlı $a_P \in L$ için $\varphi(a_P) \subseteq \mathcal{U}$ olduğunu kanıtlamış olduk. Burada $a_P \in L$ nin P asal filtresinin seçimine bağlı olduğuna dikkat edilmelidir. Yine $a_{i_1}, ..., a_{i_n} \in P$ ve P, $(L, \leq)$ in bir asal filtresi olduğundan $a_P = a_{i_1} \wedge ... \wedge a_{i_n} \in P$ olur ki buda $P \in \varphi(a_P)$ olduğunu kanıtlar. Her $P \in \mathcal{U}$ için $\varphi(a_P) \subseteq \mathcal{U}$ olduğundan $\bigcup\limits_{P \in \mathcal{U}} \varphi(a_P) \subseteq \mathcal{U}$ olur. Ayrıca, $\mathcal{U} = \bigcup\limits_{P \in \mathcal{U}} \{P\} \subseteq \bigcup\limits_{P \in \mathcal{U}} \varphi(a_P)$ olduğundan, $\mathcal{U} = \bigcup\limits_{P \in \mathcal{U}} \varphi(a_P)$ olur. $\mathcal{U}$ kompakt olduğundan, $\mathcal{U} = \varphi(a_{P_1}) \cup ... \cup \varphi(a_{P_m})$ olacak şekilde $a_{P_1}, ..., a_{P_m} \in L$ vardır. $a = a_{P_1} \vee ... \vee a_{P_m}$ denirse, $\mathcal{U} = \varphi(a_{P_1}) \cup ... \cup \varphi(a_{P_m}) = \varphi(a_{P_1} \vee ... \vee a_{P_m}) = \varphi(a)$ olur. □

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Priestley Dualitesi

$(X, \tau, \leq)$ bir Priestley uzayı olmak üzere, $(X, \tau, \leq)$ uzayının bütün kaçık ve yukarı kümelerinin kümesini $\mathcal{CU}(X, \tau, \leq)$ ile gösterelim.

Önteorem 4.1. *$(X, \tau, \leq)$ bir Priestley uzayı ve $U, V \in \mathcal{CU}(X, \tau, \leq)$ olsun. Bu durumda $U \cap V, U \cup V \in \mathcal{CU}(X, \tau, \leq)$ dir.*

İspat $U \cap V \in \mathcal{CU}(X, \tau, \leq)$ olduğunu gösterelim. $U \cup V$ için benzer şekilde yapılır. U ve V kümeleri $\tau-$kaçık iken $U \cap V$ nin bir $\tau-$kaçık olduğunu Genel Topoloji derslerinden biliyoruz. Dolayısıyla $U \cap V$ nin bir yukarı küme olduğunu göstermek yeterlidir. Herhangi $x, y \in X$ için $x \in U \cap V$ ve $x \leq y$ koşulu sağlansın. $x \in U \cap V$ olduğundan $x \in U$ ve $x \in V$ olur. U ve V kümeleri yukarı küme ve $x \leq y$ olduğundan $(y \in U$ ve $y \in V) \Rightarrow (y \in U \cap V)$ olur. O halde $U \cap V$ kümesi bir yukarı kümedir. $\square$

$\mathcal{CU}(X, \tau, \leq)$ kümesi, tanımı gereğince X in bazı alt kümelerinden oluşur. " $\subseteq$ " bağıntısının $\mathcal{CU}(X, \tau, \leq)$ üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olduğu açıktır. Ayrıca $\forall U, V \in \mathcal{CU}(X, \tau, \leq)$ için $U \vee V = U \cup V$ ve $U \wedge V = U \cap V$ olarak tanımlanırsa, Önteorem 4.1 uyarınca $(\mathcal{CU}(X, \tau, \leq), \subseteq)$ ikilisi bir sınırlı ve dağılımlı örgü olur. Burada $(\mathcal{CU}(X, \tau, \leq), \subseteq)$ nin en küçük elemanı $\emptyset$ ve en büyük elemanı ise X dir.

$(L, \leq)$ bir sınırlı ve dağılımlı örgü olmak üzere $\mathcal{PS}(L)$ nin bir Priestley uzayı olduğunu Önteorem 3.2 de kanıtladık. Dolayısıyla $(\mathcal{CU}(\mathcal{PS}(L)), \subseteq)$ bir sınırlı ve dağılımlı örgü olur. Yine bu örgünün en küçük elemanın $\perp = \emptyset$ ve en büyük elemanın $\top = \mathcal{PF}(L)$ olduğunu da belirtelim.

Tanım 4.1. *$(L, \leq_L)$ ve $(M, \leq_M)$ birer kısmi sıralı küme ve $\theta : L \longrightarrow M$ bir fonksiyon olsun.*

(1) *Eğer $\forall x, y \in L$ için $x \leq_L y \Rightarrow \theta(x) \leq_M \theta(y)$ oluyorsa, θ fonkiyonuna **sıra-korur (order-preserving) fonksiyon** denir (Birkhoff 1948).*

(2) *Eğer $\forall x, y \in L$ için $x \leq_L y \Longleftrightarrow \theta(x) \leq_M \theta(y)$ oluyorsa, θ fonksiyonuna **sıra-gömmesi** (**order-embedding**) denir (Davey ve Priestley 1990).*

Tanım 4.2. *$(L, \leq_L)$ ve $(M, \leq_M)$ birer sınırlı örgü ve $h : L \longrightarrow M$ bir fonksiyon olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa h ye bir* ***örgü homomorfizmi*** *denir (Johnstone 1986).*

(1) $h(\top) = \top$ *ve* $h(\bot) = \bot$ *dir,*

(2) $\forall x, y \in L$ *için* $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$ *dir,*

(3) $\forall x, y \in L$ *için* $h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$ *dir.*

Örnek 4.1. *Örnek 2.3 ve Örnek 2.4 te $\mathbb{R}$ nin $L = [0, 1]$ kapalı alt aralığını kullanarak $(L, \leq)$ ve $M = \{\downarrow x \mid x \in L\}$ olmak üzere $(M, \subseteq)$ şeklinde iki tane sınırlı ve dağılımlı örgü örneği verdik. $\forall x \in L$ için $h(x) = \downarrow x$ ile tanımlı $h : L \longrightarrow M$ fonksiyonu bir örgü homomorfizmidir.*

Gerçekten;

(1) $h(1) = \downarrow 1 = L$ *ve* $h(0) = \downarrow 0 = \{0\}$*,*

(2) $\forall x, y \in L$ *için* $h(x \vee y) = \downarrow (x \vee y) = \downarrow x \cup \downarrow y = h(x) \cup h(y)$*,*

(3) $\forall x, y \in L$ *için* $h(x \wedge y) = \downarrow (x \wedge y) = \downarrow x \cap \downarrow y = h(x) \cup h(y)$ *dir.*

Şimdi objeleri; sınırlı ve dağılımlı örgüler, morfizmleri; örgü homomorfizmleri, birim morfizmleri; birim fonksiyonlar ve bileşke işlemi; bilinen fonksiyon bileşkesi olan kategoriyi $\mathbf{BDL}$ ile gösterelim. Benzer şekilde objeleri; Priestley uzayları, morfizmleri; sürekli ve sıra-korur fonksiyonlar, birim morfizmleri; birim fonksiyonlar ve bileşke işlemi; bilinen fonksiyon bileşkesi olan kategoriyi $\mathbf{PRS}$ ile gösterelim.

Örnek 4.2. *Örnek 3.2 de verilen $(\mathcal{PF}(L), \tau_L, \subseteq)$ ve $(\mathcal{PF}(M), \tau_M, \subseteq)$ Priestley uzaylarını düşünelim. $f(P) = \{\downarrow x \in M \mid x \in P\}$ eşitliği ile verilen $f : \mathcal{PF}(L) \longrightarrow \mathcal{PF}(M)$ fonksiyonu $\tau_L - \tau_M$ sürekli ve sıra-korur bir fonksiyondur. Bunu görelim:*

Önce f nin gerçekten bir fonksiyon olduğunu göstereceğiz. Herhangi bir $P \in \mathcal{PF}(L)$ alalım. $1 \in P$ olduğundan $\downarrow 1 \in f(P)$ dir. Yani $f(P) \neq \emptyset$ dir. Yine $0 \notin P$ olduğundan $\downarrow 0 \notin f(P)$ dir. Dolayısıyla $f(P) \neq M$ dir.

(F1) *Herhangi $\downarrow x, \downarrow y \in M$ için $\downarrow x \in f(P)$ ve $\downarrow x \subseteq \downarrow y$ koşulu sağlansın. Bu durumda $x \in P$ ve $x \leq y$ olur. Aynı zamanda $P \in \mathcal{PF}(L)$ olduğundan $y \in P \Rightarrow \downarrow y \in f(P)$ olur.*

(F2) *$\downarrow x, \downarrow y \in f(P)$ olsun. O halde $x, y \in P$ olur. $P \in \mathcal{PF}(L)$ olduğundan da $x \wedge y \in P$ olur. Aynı zamanda $\downarrow x \cap \downarrow y = \downarrow x \wedge y$ olduğundan $\downarrow x \cap \downarrow y \in f(P)$ olur.*

(P) *$\downarrow x \cup \downarrow y \in f(P)$ olsun. $\downarrow x \cup \downarrow y = \downarrow x \vee y$ olduğundan $\downarrow x \vee y \in f(P) \Rightarrow x \vee y \in P \Rightarrow x \in P$ veya $y \in P \Rightarrow \downarrow x \in P$ veya $\downarrow y \in P$ olur.*

Yani $f(P) \in \mathcal{PF}(M)$ dir. Dolayısıyla f, $\mathcal{PF}(L)$ den $\mathcal{PF}(M)$ ye tanmlı bir fonksiyondur.

Şimdi bu fonksiynun sıra-korur olduğunu görelim: Herhangi $P, P' \in \mathcal{PF}(L)$ için $P \subseteq P'$ koşulu sağlansın. Keyfi $\downarrow x \in f(P)$ için

$$x \in P \Rightarrow x \in P' \Rightarrow \downarrow x \in f(P') \Rightarrow f(P) \subseteq f(P')$$

olur. Dolayısıyla f, bir sıra-korur fonksiyondur.

Son olarak f nin $\tau_L - \tau_M$ sürekli olduğunu görelim. $\sigma_M = \{\varphi(\downarrow x) \mid \downarrow x \in M\} \cup \{\varphi(\downarrow x)^c \mid \downarrow x \in M\}$ ailesi τ_M için bir taban olduğundan her $\mathcal{V} \in \sigma_M$ için $f^{-1}(\mathcal{V}) \in \tau_L$ olduğunu göstermek yeterlidir. Herhangi bir $\mathcal{V} \in \sigma_M$ alalım. Bu durumda $\exists \downarrow x \in M$ öyle ki $\mathcal{V} = \varphi(\downarrow x)$ ya da $\mathcal{V} = \varphi(\downarrow x)^c$ dir. Eğer $\mathcal{V} = \varphi(\downarrow x)$ ise

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathcal{V}) &= f^{-1}(\varphi(\downarrow x)) = \{P \in \mathcal{PF}(L) \mid f(P) \in \varphi(\downarrow x)\} \\ &= \{P \in \mathcal{PF}(L) \mid \downarrow x \in f(P)\} = \{P \in \mathcal{PF}(L) \mid x \in P\} \\ &= \varphi(x) \in \tau_L \end{aligned}$$

olur. Yok eğer $\mathcal{V} = \varphi(\downarrow x)^c$ ise

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathcal{V}) &= f^{-1}(\varphi(\downarrow x)^c) = \{P \in \mathcal{PF}(L) \mid f(P) \in \varphi(\downarrow x)^c\} \\ &= \{P \in \mathcal{PF}(L) \mid f(P) \notin \varphi(\downarrow x)\} = \{P \in \mathcal{PF}(L) \mid \downarrow x \notin f(P)\} \\ &= \{P \in \mathcal{PF}(L) \mid x \notin P\} = \varphi(x)^c \in \tau_L \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla f, $\tau_L - \tau_M$ süreklidir.

Uyarı 4.1. BDL *kategorisinin izomorfizmleri bire-bir ve örten örgü homomorfizmleridir.*

Önerme 4.1. *$(L, \leq)$ bir sınırlı ve dağılımlı örgü ise, o halde*

$$(L, \leq) \overset{e_{(L,\leq)}}{\longrightarrow} (\mathcal{CU}(\mathcal{PS}(L)), \subseteq), \; e_{(L,\leq)}(x) = \varphi(x)$$

bir $\mathrm{BDL}-$izomorfizmdir.

İspat $(L, \leq)$ bir sınırlı, dağılımlı örgü olsun. $\forall x \in L$ için $\varphi(x) \in \mathcal{CU}(\mathcal{PS}(L))$ olduğundan $e_{(L,\leq)}$, L den $\mathcal{CU}(\mathcal{PS}(L))$ ye tanımlı bir fonksiyondur. $e_{(L,\leq)}$ nin bir örgü homomorfizmi olduğunu görelim:

1. $e_{(L,\leq)}(\bot) = \varphi(\bot) = \emptyset$ ve $e_{(L,\leq)}(\top) = \varphi(\top) = \mathcal{PF}(L)$ dir.

2. Keyfi $x, y \in L$ alalım. Bu durumda
$$e_{(L,\leq)}(x \vee y) = \varphi(x \vee y) = \varphi(x) \cup \varphi(y) = e_{(L,\leq)}(x) \cup e_{(L,\leq)}(y)$$
olur.

3. Keyfi $x, y \in L$ için Önerme 3.3 ten
$$e_{(L,\leq)}(x \wedge y) = \varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \cap \varphi(y) = e_{(L,\leq)}(x) \cap e_{(L,\leq)}(y)$$
elde edilir.

Böylece $e_{(L,\leq)}$ bir örgü homomorfizmi olur.

Şimdi de $e_{(L,\leq)}$ in örten olduğunu görelim. Keyfi bir $\mathcal{U} \in \mathcal{CU}(\mathcal{PS}(L))$ alalım. Yani $\mathcal{U}$, $\mathcal{PS}(L)$ nin bir yukarı kaçık kümesi olsun. Önteorem 3.3 gereği $\exists a \in L$ öyle ki $\mathcal{U} = \varphi(a)$ olarak yazılabilir. Dolayısıyla $e_{(L,\leq)}(a) = \varphi(a) = \mathcal{U}$ olur. Yani $e_{(L,\leq)}$ örtendir.

Son olarak $e_{(L,\leq)}$ in bire-bir olduğunu görelim. Bunun için $x \neq y$ olacak şekilde herhangi $x, y \in L$ alalım. Sonuç 3.3 gereği $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ dir. O halde $e_{(L,\leq)}(x) \neq e_{(L,\leq)}(y)$ olur. Böylece $e_{(L,\leq)}$ in bire-bir olduğunu da görmüş olduk. $\square$

$(X, \tau, \leq)$ bir Priestley uzayı olsun. Yukarıda $\mathcal{CU}(X, \tau, \leq)$ ile $(X, \tau, \leq)$ Priestley uzayının kaçık, yukarı kümelerinin kümesini göstermiştik ve $(\mathcal{CU}(X, \tau, \leq), \subseteq)$ ikilisinin bir sınırlı dağılımlı örgü olduğunu belirtmiştik. Şimdi de $(\mathcal{CU}(X, \tau, \leq), \subseteq)$ nin tüm asal filtrelerinin kümesini daha önce kullandığımız notasyona uygun olarak $\mathcal{PF}(\mathcal{CU}(X, \tau, \leq))$ ile gösterelim. O halde $\left(\mathcal{PF}(\mathcal{CU}(X, \tau, \leq)), \tau_{\mathcal{CU}(X,\tau,\leq)}, \subseteq\right)$ üçlüsü bir Priestley uzayı olur. Bu şekilde tanımlı Priestley uzayını, yine daha önce kullandığımız notasyona uygun olarak $\mathcal{PS}(\mathcal{CU}(X, \tau, \leq))$ ile göstereceğiz.

Önerme 4.2. *$(X, \tau, \leq)$ bir Priestley uzayı ise, o zaman*
$$(X, \tau, \leq) \overset{\eta_{(X,\tau,\leq)}}{\longrightarrow} \mathcal{PS}(\mathcal{CU}(X, \tau, \leq)), \ \eta_{(X,\tau,\leq)}(x) = \{U \in \mathcal{CU}(X, \tau, \leq) \mid x \in U\}$$
bir $\mathbf{PRS}-$*morfizmdir.*

İspat $(X, \tau, \leq)$ bir Priestley uzayı olsun. Önce $\eta_{(X,\tau,\leq)}$ in X den $\mathcal{PF}\left(\mathcal{CU}\left(X, \tau, \leq\right)\right)$ ye tanımlı bir fonksiyon olduğunu görelim. Bunun için $\forall x \in X$ için $\eta_{(X,\tau,\leq)}\left(x\right)$ kümesinin $\left(\mathcal{CU}\left(X, \tau, \leq\right), \subseteq\right)$ nin bir asal filtresi olduğunu göstermek yeterlidir. $\forall x \in X$ için

$$\eta_{(X,\tau,\leq)}\left(x\right) \subseteq \mathcal{CU}\left(X, \tau, \leq\right)$$

olduğu açıktır. Ayrıca $X \in \mathcal{CU}\left(X, \tau, \leq\right)$ ve $x \in X$ olduğundan $X \in \eta_{(X,\tau,\leq)}\left(x\right)$ olur. O halde $\eta_{(X,\tau,\leq)}\left(x\right) \neq \emptyset$ dir. Yine $\emptyset \in \mathcal{CU}\left(X, \tau, \leq\right)$ ve $x \notin \emptyset$ olduğundan $\emptyset \notin \eta_{(X,\tau,\leq)}\left(x\right)$ olur. Bu durumda da $\eta_{(X,\tau,\leq)}\left(x\right) \neq \mathcal{CU}\left(X, \tau, \leq\right)$ olur. Şimdi $\eta_{(X,\tau,\leq)}\left(x\right)$ nın $(\mathbf{F1})$, $(\mathbf{F2})$ ve $(\mathbf{P})$ koşullarını sağladığını görelim:

(F1) Herhangi $U, V \in \mathcal{CU}\left(X, \tau, \leq\right)$ için $U \in \eta_{(X,\tau,\leq)}\left(x\right)$ ve $U \subseteq V$ olsun. Bu durumda $x \in U$ ve $U \subseteq V$ olduğundan $x \in V$ olur. Aynı zamanda $V \in \mathcal{CU}\left(X, \tau, \leq\right)$ olduğundan $V \in \eta_{(X,\tau,\leq)}\left(x\right)$ olur.

(F2) $U, V \in \eta_{(X,\tau,\leq)}\left(x\right)$ olsun. Bu durumda $x \in U$ ve $x \in V$ olduğundan $x \in U \cap V$ dir. Ayrıca $U \cap V \in \mathcal{CU}\left(X, \tau, \leq\right)$ (Önteorem 4.1 den) olduğundan $U \cap V \in \eta_{(X,\tau,\leq)}\left(x\right)$ olur.

(P) Herhangi $U, V \in \mathcal{CU}\left(X, \tau, \leq\right)$ için $U \cup V \in \eta_{(X,\tau,\leq)}\left(x\right)$ olsun. Bu durumda $U \cup V \in \mathcal{CU}\left(X, \tau, \leq\right)$ ve $x \in U \cup V$ dir. O halde ($x \in U$ veya $x \in V$) $\Rightarrow$ ($U \in \eta_{(X,\tau,\leq)}\left(x\right)$ veya $V \in \eta_{(X,\tau,\leq)}\left(x\right)$) olur. Böylece $\eta_{(X,\tau,\leq)}\left(x\right)$, $\left(\mathcal{CU}\left(X, \tau, \leq\right), \subseteq\right)$ nın bir asal filtresi olur.

Şimdi $\eta_{(X,\tau,\leq)}$ fonksiyonunun bir sıra-korur fonksiyon olduğunu görelim: $x \leq y$ koşulunu sağlayan herhangi $x, y \in X$ alalım. $\eta_{(X,\tau,\leq)}\left(x\right) \subseteq \eta_{(X,\tau,\leq)}\left(y\right)$ olduğunu göstereceğiz. Herhangi bir $U \in \eta_{(X,\tau,\leq)}\left(x\right)$ alalım. Bu durumda $U \in \mathcal{CU}\left(X, \tau, \leq\right)$ ve $x \in U$ dur. $x \leq y$ olduğundan $y \in U$ ve dolayısıyla $U \in \eta_{(X,\tau,\leq)}\left(y\right)$ olur. Böylece $\eta_{(X,\tau,\leq)}\left(x\right) \subseteq \eta_{(X,\tau,\leq)}\left(y\right)$ elde edilir. Dolayısıyla $\eta_{(X,\tau,\leq)}$ bir sıra-korur fonksiyondur.

Son olarak $\eta_{(X,\tau,\leq)}$ fonksiyonunun τ – $\tau_{\mathcal{CU}(X,\tau,\leq)}$ sürekli olduğunu görelim. $\sigma_{\mathcal{CU}(X,\tau,\leq)}$ ailesi $\tau_{\mathcal{CU}(X,\tau,\leq)}$ için bir alt taban olduğundan $\forall \mathcal{U} \in \sigma_{\mathcal{CU}(X,\tau,\leq)}$ için $\eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)}\left(\mathcal{U}\right) \in \tau$ olduğunu göstermek yeterlidir. Herhangi bir $\mathcal{U} \in \sigma_{\mathcal{CU}(X,\tau,\leq)}$ alalım. $\sigma_{\mathcal{CU}(X,\tau,\leq)}$ tanımından $\exists V \in \mathcal{CU}\left(X, \tau, \leq\right)$ öyle ki $\mathcal{U} = \varphi\left(V\right)$ veya $\mathcal{U} = \varphi\left(V\right)^c$ dir. Her iki durumda da $\eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)}\left(\mathcal{U}\right) \in \tau$ olduğunu görelim. Eğer $\mathcal{U} = \varphi\left(V\right)$ ise;

$$\begin{aligned}
\eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)}(\mathcal{U}) &= \eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)}(\varphi(V)) \\
&= \left\{x \in X \mid \eta_{(X,\tau,\leq)}(x) \in \varphi(V)\right\} \\
&= \left\{x \in X \mid V \in \eta_{(X,\tau,\leq)}(x)\right\} \\
&= \{x \in X \mid x \in V\} \\
&= V \in \tau
\end{aligned}$$

olur. Eğer $\mathcal{U} = \varphi(V)^c$ ise;

$$\begin{aligned}
\eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)}(\mathcal{U}) &= \eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)}(\varphi(V)^c) \\
&= \left\{x \in X \mid \eta_{(X,\tau,\leq)}(x) \in \varphi(V)^c\right\} \\
&= \left\{x \in X \mid \eta_{(X,\tau,\leq)}(x) \notin \varphi(V)\right\} \\
&= \left\{x \in X \mid V \notin \eta_{(X,\tau,\leq)}(x)\right\} \\
&= \{x \in X \mid x \notin V\} \\
&= X \setminus V \in \tau
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)}(\mathcal{U}) \in \tau$ olur. □

Önerme 4.3. *Herhangi bir* $\mathbf{PRS}-$*morfizm* $(X, \tau_X, \leq_X) \xrightarrow{f} (Y, \tau_Y, \leq_Y)$ *nin bir* $\mathbf{PRS}-$*izomorfizm olması için gerek ve yeter şart* f *nin bir homeomorfizm ve bir sıra-gömmesi olmasıdır.*

İspat ($\Rightarrow$) Önce $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ nin bir homeomorfizm olduğunu görelim. Varsayımımız gereğince $(X, \tau_X, \leq_X) \xrightarrow{f} (Y, \tau_Y, \leq_Y)$ bir $\mathbf{PRS}-$izomorfizm olduğundan $(X, \tau_X, \leq_X) \xrightarrow{f} (Y, \tau_Y, \leq_Y)$ bir $\mathbf{PRS}-$morfizmdir, ayrıca

$$f \circ f^{-1} = id_{(Y,\tau_Y,\leq_Y)} \text{ ve } f^{-1} \circ f = id_{(X,\tau_X,\leq_X)}$$

olacak şekilde bir tek $\mathbf{PRS}-$morfizm $(Y, \tau_Y, \leq_Y) \xrightarrow{f^{-1}} (X, \tau_X, \leq_X)$ vardır. $(X, \tau_X, \leq_X) \xrightarrow{f} (Y, \tau_Y, \leq_Y)$ bir $\mathbf{PRS}-$morfizm olduğundan $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonu $\tau_X - \tau_Y$ sürekli olur. Yine

$$f \circ f^{-1} = id_{(Y,\tau_Y,\leq_Y)} \text{ ve } f^{-1} \circ f = id_{(X,\tau_X,\leq_X)}$$

ve de $(Y, \tau_Y, \leq_Y) \xrightarrow{f^{-1}} (X, \tau_X, \leq_X)$ bir $\mathbf{PRS}-$morfizm olduğundan $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonu bire-bir, örten ve $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ fonksiyonu $\tau_Y - \tau_X$ sürekli olur. Böylece $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ bir homeomorfizm olur.

Şimdi de $f : (X, \leq_X) \longrightarrow (Y, \leq_Y)$ nin bir sıra-gömmesi olduğunu görelim. Herhangi $x, y \in X$ için $x \leq_X y$ olsun. $(X, \tau_X, \leq_X) \xrightarrow{f} (Y, \tau_Y, \leq_Y)$ bir $\mathbf{PRS}-$morfizm olduğundan $f : X \longrightarrow Y$ bir sıra-korur fonksiyondur. Dolayısıyla $f(x) \leq_Y f(y)$ dir. Tersine herhangi $x, y \in X$ için $f(x) \leq_Y f(y)$ olsun. $(Y, \tau_Y, \leq_Y) \xrightarrow{f^{-1}} (X, \tau_X, \leq_X)$ bir $\mathbf{PRS}-$morfizm olduğundan $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ bir sıra-korur fonksiyondur. Dolayısıyla

$$f(x) \leq_Y f(y) \Rightarrow x = f^{-1}(f(x)) \leq_X f^{-1}(f(y)) = y$$

olur. O halde $f : (X, \leq_X) \longrightarrow (Y, \leq_Y)$ bir sıra-gömmesidir.

$(\Leftarrow)$ $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ bir homeomorfizm ve $f : (X, \leq_X) \longrightarrow (Y, \leq_Y)$ bir sıra-gömmesi olsun. Bu durumda X den Y ye tanımlı f fonksiyonu τ_X – τ_Y sürekli ve bir sıra-korur fonksiyondur. Dolayısıyla $(X, \tau_X, \leq_X) \xrightarrow{f} (Y, \tau_Y, \leq_Y)$ bir $\mathbf{PRS}-$morfizm olur. Ayrıca f fonksiyonu bire-bir, örten, f^{-1} fonksiyonu τ_Y – τ_X sürekli ve f^{-1} aynı zamanda bir sıra-korur fonksiyon olduğundan $f \circ f^{-1} = id_{(Y, \tau_Y, \leq_Y)}$ ve $f^{-1} \circ f = id_{(X, \tau_X, \leq_X)}$ olacak şekilde bir $\mathbf{PRS}-$morfizm $(Y, \tau_Y, \leq_Y) \xrightarrow{f^{-1}} (X, \tau_X, \leq_X)$ vardır. Böylece $(X, \tau_X, \leq_X) \xrightarrow{f} (Y, \tau_Y, \leq_Y)$ bir $\mathbf{PRS}-$izomorfizmdir. $\square$

Önerme 4.4. $(X, \tau, \leq)$ *bir Priestley uzayı olmak üzere Önerme 4.2 de olduğu gibi tanımlı* $\mathbf{PRS}-$*morfizm* $(X, \tau, \leq) \xrightarrow{\eta_{(X,\tau,\leq)}} \mathcal{PS}(\mathcal{CU}(X, \tau, \leq))$, *bir* $\mathbf{PRS}-$*izomorfizmdir.*

İspat Önerme 4.2 de $(X, \tau, \leq) \xrightarrow{\eta_{(X,\tau,\leq)}} \mathcal{PS}(\mathcal{CU}(X, \tau, \leq))$ nın bir $\mathbf{PRS}-$morfizm olduğunu kanıtladık. Dolayısıyla Önerme 4.3 gereği $\eta_{(X,\tau,\leq)} : X \longrightarrow \mathcal{PF}(\mathcal{CU}(X, \tau, \leq))$ fonksiyonunun bir homeomorfizm ve bir sıra-gömmesi olduğunu göstermek yeterlidir. Önce $\eta_{(X,\tau,\leq)}$ nın bir homeomorfizm olduğunu olduğunu gösterelim.

İlk olarak $\eta_{(X,\tau,\leq)} : X \longrightarrow \mathcal{PF}(\mathcal{CU}(X, \tau, \leq))$ fonksiyonunun bire-bir olduğunu göstereceğiz. $x \neq y$ olacak şekilde herhangi $x, y \in X$ alalım. Bu durumda $x \nleq y$ veya $y \nleq x$ dir. Aksine eğer $x \leq y$ ve $y \leq x$ olsaydı ters simetri özelliği gereği $x = y$ çelişkisi olurdu. Genelliği bozmayacağından $x \nleq y$ olsun. $(X, \tau, \leq)$ bir Priestley uzayı olduğundan $\exists U \in \mathcal{CU}(X, \tau, \leq)$ öyle ki $x \in U$ ve $y \notin U$ dur. Bu durumda $U \in \eta_{(X,\tau,\leq)}(x)$ ve $U \notin \eta_{(X,\tau,\leq)}(y)$ dir. O halde $\eta_{(X,\tau,\leq)}(x) \neq \eta_{(X,\tau,\leq)}(y)$ elde edilir. Böylece $\eta_{(X,\tau,\leq)}$ fonksiyonu bire-birdir.

Şimdi de $\eta_{(X,\tau,\leq)} : X \longrightarrow \mathcal{PF}(\mathcal{CU}(X, \tau, \leq))$ fonksiyonunun örten olduğunu görelim. Bunun için keyfi $P \in \mathcal{PF}(\mathcal{CU}(X, \tau, \leq))$ alalım. Yani P, $(\mathcal{CU}(X, \tau, \leq), \subseteq)$ nin bir asal filtresi olsun. Biraz ön hazırlığa ihtiyacımız olacak.

1. P, sonlu arakesit özelliğine sahiptir:

   P nin X in bazı altkümelerinden oluştuğu açıktır. Önerme 2.2 gereği P nin her sonlu altailesinin kesişimi yine P nin bir elemanıdır. Aynı zamanda $\emptyset \notin P$ olduğundan P nin her sonlu altailesinin kesişimi boştan farklıdır. O halde P sonlu arakesit özelliğine sahiptir.

2. $\bigcap P \neq \emptyset$ dir:

   P nin her elemanı bir $\tau-$kapalı küme, P sonlu arakesit özelliğine sahip ve $\left(\mathcal{PF}\left(\mathcal{CU}\left(X,\tau,\leq\right)\right), \tau_{\mathcal{CU}(X,\tau,\leq)}\right)$ topolojik uzayı kompakt olduğundan Teorem 3.1 uyarınca $\bigcap P \neq \emptyset$ dır.

3. Herhangi bir $U \in \tau$ için $U \in P$ veya $X \setminus U \in P$ dir:

   $U \cup (X \setminus U) = X \in P$ ve P bir asal filtre olduğundan, $(\mathbf{P})$ özelliğinden $U \in P$ veya $X \setminus U \in P$ olur.

4. $\bigcap P$ kümesi $\{z\}$ şeklinde bir tek nokta kümesidir:

   Diyelim ki $x, y \in \bigcap P$ ve $x \neq y$ olsun. $(X, \tau, \leq)$ bir Priestley uzayı olduğundan τ nun, elemanları kaçık kümeler olan bir β tabanı vardır. (X, τ) Hausdorff ve 0-boyutlu bir topolojik uzay olduğundan Önerme 3.1 gereğince $\exists U \in \beta$ öyle ki $x \in U$ ve $y \in X \setminus U$ dir. $P \subseteq \mathcal{CU}\left(X,\tau,\leq\right)$ olduğundan $P \subseteq \tau$ dir. Yukarıda gösterdik ki $U \in P$ veya $X \setminus U \in P$ dir. Eğer $U \in P$ olsaydı $y \notin U$ olduğundan $y \notin \bigcap P$ olur. Bu durum $y \in \bigcap P$ olmasıyla çelişir. Eğer $X \setminus U \in P$ olsaydı $x \notin X \setminus U$ olduğundan $x \notin \bigcap P$ olur. Bu durum da $x \in \bigcap P$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $\bigcap P$ kümesi $\{z\}$ şeklinde bir tek nokta kümesidir.

Şimdi bir $z \in X$ için $\bigcap P = \{z\}$ diyelim ve $\eta_{(X,\tau,\leq)}(z) = P$ olduğunu gösterelim. Yine olmayana ergi yöntemi kullanarak $\eta_{(X,\tau,\leq)}(z) \neq P$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\eta_{(X,\tau,\leq)}(z) \nsubseteq P$ veya $P \nsubseteq \eta_{(X,\tau,\leq)}(z)$ dir. Şimdi her iki durumunda aslında geçerli olmadığını görelim.

(1. durum) $\eta_{(X,\tau,\leq)}(z) \nsubseteq P$ olsun. O halde $\eta_{(X,\tau,\leq)}(z)$ tanımından $\exists U \in \mathcal{CU}\left(X,\tau,\leq\right)$ ve $z \in U$ öyle ki $U \notin P$ dir. Bu durumda $X \setminus U \in P$ dir. Aynı zamanda $z \in U$ olduğundan $z \notin X \setminus U$ dir. Dolayısıyla $z \notin \bigcap P$ olur. Fakat bu durum $\bigcap P = \{z\}$ olmasıyla çelişir.

(2. durum) $P \nsubseteq \eta_{(X,\tau,\leq)}(z)$ olsun. O zaman $\exists G \in P$ öyle ki $G \notin \eta_{(X,\tau,\leq)}(z)$ dir. Bu durumda $G \in \mathcal{CU}(X,\tau,\leq)$ olduğundan $z \notin G$ olur. Fakat bu durum yine $\bigcap P = \{z\}$ olmasıyla çelişir.

Neticede $\eta_{(X,\tau,\leq)}(z) = P$ elde edilir. Böylece X den $\mathcal{PF}(\mathcal{CU}(X,\tau,\leq))$ ye tanımlı $\eta_{(X,\tau,\leq)}$ fonksiyonu örtendir.

Önerme 4.2 gereği $(X,\tau,\leq) \overset{\eta_{(X,\tau,\leq)}}{\longrightarrow} \mathcal{PS}(\mathcal{CU}(X,\tau,\leq))$ bir $\mathbf{PRS}-$morfizm olduğundan $\eta_{(X,\tau,\leq)} : X \longrightarrow \mathcal{PF}(\mathcal{CU}(X,\tau,\leq))$ fonksiyonu $\tau - \tau_{\mathcal{CU}(X,\tau,\leq)}$ süreklidir.

$\eta_{(X,\tau,\leq)}$ fonksiyonunun bire-bir ve örten olması $\eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)} : \mathcal{PF}(\mathcal{CU}(X,\tau,\leq)) \longrightarrow X$ fonksiyonunun varlığını garanti eder.

$\eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)} : \mathcal{PF}(\mathcal{CU}(X,\tau,\leq)) \longrightarrow X$ fonksiyonunun $\tau_{\mathcal{CU}(X,\tau,\leq)} - \tau$ sürekli olduğunu gösterelim. (X,τ) topolojik uzayı 0-boyutlu olduğundan, bu uzayın elemanları kaçık kümeler olan bir β tabanı vardır. Herhangi bir $G \in \beta$ alalım. Önerme 3.2 gereğince $\left(\eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)}\right)^{-1}(X \setminus G)$ kümesinin $\tau_{\mathcal{CU}(X,\tau,\leq)}-$kapalı olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\left(\eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)}\right)^{-1}(X \setminus G) = \eta_{(X,\tau,\leq)}(X \setminus G)$$

olduğundan $\eta_{(X,\tau,\leq)}(X \setminus G)$ kümesinin $\tau_{\mathcal{CU}(X,\tau,\leq)}-$kapalı olduğunu göstermeliyiz. G kümesi $\tau-$kaçık olduğundan $X \setminus G$ kümesi de $\tau-$kaçıktır. (X,τ) topolojik uzayı kompakt, $X \setminus G$ kümesi bu uzayda kapalı (dolayısıyla kompakt) ve $\eta_{(X,\tau,\leq)}$ fonksiyonu $\tau - \tau_{\mathcal{CU}(X,\tau,\leq)}$ sürekli olduğundan $\eta_{(X,\tau,\leq)}(X \setminus G)$ kümesi $\left(\mathcal{PF}(\mathcal{CU}(X,\tau,\leq)), \tau_{\mathcal{CU}(X,\tau,\leq)}\right)$ topolojik uzayında kompakt olur. $\left(\mathcal{PF}(\mathcal{CU}(X,\tau,\leq)), \tau_{\mathcal{CU}(X,\tau,\leq)}\right)$ topolojik uzayı Hausdorff ve $\eta_{(X,\tau,\leq)}(X \setminus G)$ kümesi bu uzayda kompakt olduğundan, bu küme Teorem 3.5 uyrınca $\tau_{\mathcal{CU}(X,\tau,\leq)}-$kapalı olur. O halde $\eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)} : \mathcal{PF}(\mathcal{CU}(X,\tau,\leq)) \longrightarrow X$ fonksiyonu $\tau_{\mathcal{CU}(X,\tau,\leq)} - \tau$ süreklidir.

Böylece $\eta_{(X,\tau,\leq)} : (X,\tau) \longrightarrow \left(\mathcal{PF}(\mathcal{CU}(X,\tau,\leq)), \tau_{\mathcal{CU}(X,\tau,\leq)}\right)$ bir homeomorfizmdir.

Şimdi de $\eta_{(X,\tau,\leq)} : (X,\leq) \longrightarrow (\mathcal{PF}(\mathcal{CU}(X,\tau,\leq)), \subseteq)$ nın bir sıra-gömmesi olduğunu gösterelim. Önerme 4.2 uyarınca $\eta_{(X,\tau,\leq)} : (X,\tau,\leq) \longrightarrow \mathcal{PS}(\mathcal{CU}(X,\tau,\leq))$ bir $\mathbf{PRS}-$morfizm olduğundan, $\eta_{(X,\tau,\leq)} : X \longrightarrow \mathcal{PF}(\mathcal{CU}(X,\tau,\leq))$ bir sıra-korur fonksiyondur. Dolayısıyla $\forall x, y \in X$ ve $x \leq y$ için $\eta_{(X,\tau,\leq)}(x) \subseteq \eta_{(X,\tau,\leq)}(y)$ dir. Tersine $\forall x, y \in X$ ve $\eta_{(X,\tau,\leq)}(x) \subseteq \eta_{(X,\tau,\leq)}(y)$ için $x \leq y$ olduğunu görelim. Aksine, $\eta_{(X,\tau,\leq)}(x_0) \subseteq \eta_{(X,\tau,\leq)}(y_0)$ ve $x_0 \nleq y_0$ olacak şekilde $x_0, y_0 \in X$ var olsun. Bu durumda $(X,\tau,\leq)$ bir Priestley uzayı olduğundan $\exists U \in \mathcal{CU}(X,\tau,\leq)$ öyle ki $x_0 \in U$ ve $y_0 \notin U$

dir. Buradan $U \in \eta_{(X,\tau,\leq)}(x_0)$ ve $U \notin \eta_{(X,\tau,\leq)}(y_0)$ olur. Dolayısıyla $\eta_{(X,\tau,\leq)}(x_0) \nsubseteq \eta_{(X,\tau,\leq)}(y_0)$ dir. Fakat bu durum $\eta_{(X,\tau,\leq)}(x_0) \subseteq \eta_{(X,\tau,\leq)}(y_0)$ olmasıyla çelişir. $\square$

Önerme 4.5. $\mathcal{PS}\left((L,\leq_L) \xrightarrow{f} (M,\leq_M)\right) = \mathcal{PS}(L) \xrightarrow{\mathcal{PS}(f)} \mathcal{PS}(M)$, $\mathcal{PS}(f)(Q) = (f^{op})^{-1}(Q)$ *ile tanımlı* $\mathcal{PS} : \mathbf{BDL^{op}} \longrightarrow \mathbf{PRS}$ *fonksiyonu bir funktordur.*

İspat Öncelikle $(L,\leq_L) \xrightarrow{f} (M,\leq_M)$ bir $\mathbf{BDL^{op}}-$morfizm, yani $(M,\leq_M) \xrightarrow{f^{op}} (L,\leq_L)$ bir $\mathbf{BDL}-$morfizm olmak üzere $\mathcal{PS}(L) \xrightarrow{\mathcal{PS}(f)} \mathcal{PS}(M)$ nin bir Priestley uzayı morfizmi olduğunu gösterelim. İlk olarak $\mathcal{PS}(f)$ nin $\mathcal{PF}(L)$ den $\mathcal{PF}(M)$ ye bir fonksiyon olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $(L,\leq_L)$ nin herhangi bir Q asal filtresi için $\mathcal{PS}(f)(Q)$ nun $(M,\leq_M)$ nin bir asal filtresi olduğunu göstermeliyiz. $\mathcal{PS}(f)(Q) \subseteq M$ olduğu açıktır.

1. $\mathcal{PS}(f)(Q) \neq \emptyset$ dir:

   $(L,\leq_L)$ nin en büyük elemanı $\top_L$ ve $(M,\leq_M)$ nin en büyük elemanı $\top_M$ olsun. $Q \in \mathcal{PF}(L)$ olduğundan $Q \neq \emptyset$ ve $\top_L \in Q$ dır. $(M,\leq_M) \xrightarrow{f^{op}} (L,\leq_L)$ bir örgü homomorfizmi olduğundan $f^{op}(\top_M) = \top_L \in Q$ dır. Dolayısıyla $\top_M \in (f^{op})^{-1}(Q) = \mathcal{PS}(f)(Q)$ olur. O halde $\mathcal{PS}(f)(Q) \neq \emptyset$ olur.

2. $\mathcal{PS}(f)(Q) \neq M$ dir:

   Q, $(L,\leq_L)$ in bir asal filtresi olduğundan $Q \neq L$ dir. Ayrıca $(L,\leq_L)$ in en küçük elemanını $\perp_L$ ve $(M,\leq_M)$ nin en küçük elemanını $\perp_M$ ile gösterirsek, $\perp_L \notin Q$ olduğunu biliyoruz. $(M,\leq_M) \xrightarrow{f^{op}} (L,\leq_L)$ bir örgü homomorfizmi olduğundan $f^{op}(\perp_M) = \perp_L \notin Q$ dir. O halde $\perp_M \notin (f^{op})^{-1}(Q) = \mathcal{PS}(f)(Q)$ olur. Dolayısıyla $\mathcal{PS}(f)(Q) \neq M$ dir.

(F1) Herhangi $x, y \in M$ için $x \in \mathcal{PS}(f)(Q)$ ve $x \leq_M y$ koşulu sağlansın. Bu durumda $f^{op} : M \longrightarrow L$ şeklinde bir fonksiyon olduğundan $x \in (f^{op})^{-1}(Q) \Rightarrow f^{op}(x) \in Q$ ve $f^{op}(y) \in L$ olur. Ayrıca $x \leq_M y$ ve $(M,\leq_M) \xrightarrow{f^{op}} (L,\leq_L)$ bir örgü homomorfizmi olduğundan $f^{op}(x) \leq_L f^{op}(y)$ olur. Q, $(L,\leq_L)$ nin bir asal filtresi olduğundan $f^{op}(y) \in Q$ ve dolayısıyla $y \in (f^{op})^{-1}(Q) = \mathcal{PS}(f)(Q)$ olur.

(F2) $x, y \in \mathcal{PS}(f)(Q)$ olsun. $Q \in \mathcal{PF}(L)$ olduğunu göz önünde bulundurarak

$$\begin{aligned} x, y \in (f^{op})^{-1}(Q) &\Rightarrow f^{op}(x), f^{op}(y) \in Q \\ &\Rightarrow f^{op}(x) \wedge f^{op}(y) \in Q \\ &\Rightarrow f^{op}(x) \wedge f^{op}(y) = f^{op}(x \wedge y) \in Q \\ &\Rightarrow x \wedge y \in (f^{op})^{-1}(Q) = \mathcal{PS}(f)(Q) \end{aligned}$$

elde ederiz.

(P) $x \vee y \in \mathcal{PS}(f)(Q)$ olsun. Yine $Q \in \mathcal{PF}(L)$ olduğunu belirterek

$$\begin{aligned} x \vee y \in (f^{op})^{-1}(Q) &\Rightarrow f^{op}(x \vee y) \in Q \\ &\Rightarrow f^{op}(x \vee y) = f^{op}(x) \vee f^{op}(y) \in Q \\ &\Rightarrow f^{op}(x) \in Q \text{ veya } f^{op}(y) \in Q \\ &\Rightarrow x \in (f^{op})^{-1}(Q) \text{ veya } y \in (f^{op})^{-1}(Q) \\ &\Rightarrow x \in \mathcal{PS}(f^{op})(Q) \text{ veya } y \in \mathcal{PS}(f)(Q) \end{aligned}$$

elde ederiz.

Böylece $\mathcal{PS}(f)(Q) \in \mathcal{PF}(M)$ ve dolayısıyla $\mathcal{PS}(f)$, $\mathcal{PF}(L)$ den $\mathcal{PF}(M)$ ye bir fonksiyon olur.

Şimdi de $\mathcal{PS}(f) : \mathcal{PF}(L) \longrightarrow \mathcal{PF}(M)$ fonksiyonunun τ_L – τ_M sürekli olduğunu görelim. Bunun için $\sigma_M = \{\varphi(x) \mid x \in M\} \cup \{\varphi(x)^c \mid x \in M\}$ ailesi τ_M nin bir alttabanı olduğundan $\forall \mathcal{U} \in \sigma_M$ için $\mathcal{PS}(f)(\mathcal{U}) \in \tau_L$ olduğunu göstermek yeterlidir. Herhangi bir $\mathcal{U} \in \sigma_M$ alalım. Bu durumda $\exists x \in M$ öyle ki $\mathcal{U} = \varphi(x)$ veya $\mathcal{U} = \varphi(x)^c$ dir. $\mathcal{U} = \varphi(x)$ durumunda

$$\begin{aligned} \mathcal{PS}(f)^{-1}(\mathcal{U}) &= \mathcal{PS}(f)^{-1}(\varphi(x)) \\ &= \{P \in \mathcal{PF}(L) \mid \mathcal{PS}(f)(P) \in \varphi(x)\} \\ &= \{P \in \mathcal{PF}(L) \mid x \in \mathcal{PS}(f)(P)\} \\ &= \left\{P \in \mathcal{PF}(L) \mid x \in (f^{op})^{-1}(P)\right\} \\ &= \{P \in \mathcal{PF}(L) \mid f^{op}(x) \in P\} \\ &= \varphi(f^{op}(x)) \in \tau_L \end{aligned}$$

olur. $\mathcal{U} = \varphi(x)^c$ durumunda ise

$$
\begin{aligned}
\mathcal{PS}(f)^{-1}(\mathcal{U}) &= \mathcal{PS}(f)^{-1}(\varphi(x)^{c}) \\
&= \{P \in \mathcal{PF}(L) \mid \mathcal{PS}(f)(P) \notin \varphi(x)\} \\
&= \{P \in \mathcal{PF}(L) \mid x \notin \mathcal{PS}(f)(P)\} \\
&= \left\{P \in \mathcal{PF}(L) \mid x \notin (f^{op})^{-1}(P)\right\} \\
&= \{P \in \mathcal{PF}(L) \mid f^{op}(x) \notin P\} \\
&= \varphi(f^{op}(x))^{c} \in \tau_L
\end{aligned}
$$

olur. O halde $\mathcal{PS}(f) : \mathcal{PF}(L) \longrightarrow \mathcal{PF}(M)$ fonksiyonu τ_L – τ_M süreklidir.

$\mathcal{PS}(L) \overset{\mathcal{PS}(f)}{\longrightarrow} \mathcal{PS}(M)$ nin bir Priestley uzayı morfizmi olduğunu göstermek için göstermemiz gereken bir diğer koşul da, $\mathcal{PS}(f)$ nin sıra-korur fonksiyon, yani; $P, Q \in \mathcal{PF}(L)$ ve $P \subseteq Q$ iken $\mathcal{PS}(f)(P) \subseteq \mathcal{PS}(f)(Q)$ olmasıdır. $P, Q \in \mathcal{PF}(L)$ ve $P \subseteq Q$ olsun. Keyfi $x \in \mathcal{PS}(f)(P)$ alalım. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
x \in (f^{op})^{-1}(P) &\Rightarrow f^{op}(x) \in P \\
&\Rightarrow f^{op}(x) \in Q \\
&\Rightarrow x \in (f^{op})^{-1}(Q) \Rightarrow x \in \mathcal{PS}(f)(Q)
\end{aligned}
$$

olur. O halde $\mathcal{PS}(f)(P) \subseteq \mathcal{PS}(f)(Q)$ dir. Böylece $\mathcal{PS}(L) \overset{\mathcal{PS}(f)}{\longrightarrow} \mathcal{PS}(M)$ bir Priestley uzayı morfizmi olur.

Son olarak $\mathcal{PS}$ nin $\mathbf{BDL^{op}}$ dan $\mathbf{PRS}$ ye bir funktor olduğunu görmek için $\mathcal{PS}$ nin bileşkeyi ve birimleri koruduğunu göstereceğiz. Bunun için önce keyfi $(L, \leq_L) \overset{f}{\longrightarrow} (M, \leq_M)$, $(M, \leq_M) \overset{g}{\longrightarrow} (N, \leq_N) \in \mathbf{Mor}(\mathbf{BDL^{op}})$ için bileşke işleminin korunduğunu görelim. $Q \in \mathcal{PF}(L)$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\mathcal{PS}(g \circ^{op} f)(Q) &= ((g \circ^{op} f)^{op})^{-1}(Q) \\
&= (f^{op} \circ g^{op})^{-1}(Q) \\
&= \left((g^{op})^{-1} \circ (f^{op})^{-1}\right)(Q) = (g^{op})^{-1}\left((f^{op})^{-1}(Q)\right) \\
&= (g^{op})^{-1}(\mathcal{PS}(f)(Q)) = \mathcal{PS}(g)(\mathcal{PS}(f)(Q)) \\
&= (\mathcal{PS}(g) \circ \mathcal{PS}(f))(Q)
\end{aligned}
$$

dir. O halde $\mathcal{PS}(g \circ^{op} f) = \mathcal{PS}(g) \circ \mathcal{PS}(f)$ dir. Yani bileşke işlemi korunuyor.

Şimdi de $\mathcal{PS}$ nin birim morfizmleri koruduğunu görelim. Keyfi $(L, \leq) \in \mathbf{Ob}(\mathbf{BDL^{op}})$ için $id_{(L,\leq)} : (L, \leq) \longrightarrow (L, \leq)$, $id_{(L,\leq)}(x) = x$ birim morfizmi ve $(L, \leq)$ ni bir Q asal filtresi için

$$\mathcal{PS}\left(id_{(L,\leq)}\right)(Q)=\left(id^{op}_{(L,\leq)}\right)^{-1}(Q)=id^{-1}_{(L,\leq)}(Q)=Q=id_{\mathcal{PS}(L)}(Q)$$

olduğundan $\mathcal{PS}\left(id_{(L,\leq)}\right)=id_{\mathcal{PS}(L)}$ elde edilir.

Böylece $\mathcal{PS}$, $\mathbf{BDL^{op}}$ dan $\mathbf{PRS}$ ye tanımlı bir funktor olur. □

Önerme 4.6. $\mathcal{CU}:\mathbf{PRS}\longrightarrow\mathbf{BDL^{op}}$ *fonksiyonu*

$$\mathcal{CU}\left((X,\tau_X,\leq_X)\xrightarrow{f}(Y,\tau_Y,\leq_Y)\right)=(\mathcal{CU}(X,\tau_X,\leq_X),\subseteq)\xrightarrow{\mathcal{CU}(f)}(\mathcal{CU}(Y,\tau_Y,\leq_Y),\subseteq)$$

ile tanımlı bir funktordur. Burada $(\mathcal{CU}(X,\tau_X,\leq_X),\subseteq)\xrightarrow{\mathcal{CU}(f)}(\mathcal{CU}(Y,\tau_Y,\leq_Y),\subseteq)$ $\mathbf{BDL^{op}}$ *morfizmi,*

$$\mathcal{CU}(f)^{op}(V)=f^{-1}(V)$$

eşitliği ile tanımlanan $(\mathcal{CU}(Y,\tau_Y,\leq_Y),\subseteq)\xrightarrow{\mathcal{CU}(f)^{op}}(\mathcal{CU}(X,\tau_X,\leq_X),\subseteq)$ $\mathbf{BDL}-$*morfizminin karşıtıdır.*

İspat $(X,\tau_X,\leq_X)\xrightarrow{f}(Y,\tau_Y,\leq_Y)$ bir $\mathbf{PRS}-$morfizm olmak üzere

$$(\mathcal{CU}(X,\tau_X,\leq_X),\subseteq)\xrightarrow{\mathcal{CU}(f)}(\mathcal{CU}(Y,\tau_Y,\leq_Y),\subseteq)$$

nin gerçekten bir $\mathbf{BDL^{op}}-$morfizm olduğunu gösterelim. Bunun için $(\mathcal{CU}(Y,\tau_Y,\leq_Y),\subseteq)$ $\xrightarrow{\mathcal{CU}(f)^{op}}$ $(\mathcal{CU}(X,\tau_X,\leq_X),\subseteq)$ nin bir $\mathbf{BDL}-$morfizm olduğunu göstermeliyiz. Tabi ki ilk önce $\mathcal{CU}(f)^{op}$ un $\mathcal{CU}(Y,\tau_Y,\leq_Y)$ den $\mathcal{CU}(X,\tau_X,\leq_X)$ ye tanımlı bir fonksiyon olduğunu göstermeliyiz. $(\mathcal{CU}(X,\tau_X,\leq_X),\subseteq)$ ve $(\mathcal{CU}(Y,\tau_Y,\leq_Y),\subseteq)$ nin birer sınırlı dağılımlı örgü olduklarını biliyoruz. Herhangi bir $V\in\mathcal{CU}(Y,\tau_Y,\leq_Y)$ alalım ve $\mathcal{CU}(f)^{op}(V)$ $\in\mathcal{CU}(X,\tau_X,\leq_X)$ olduğunu gösterelim.

1. $\mathcal{CU}(f)^{op}(V)$, τ_X-açıktır: Çünkü V kümesi (Y,τ_Y) açık ve f, $\tau_X-\tau_Y$ sürekli olduğundan $\mathcal{CU}(f)^{op}(V)=f^{-1}(V)$ kümesi τ_X-açıktır.

2. $\mathcal{CU}(f)^{op}(V)$, τ_X-kapalıdır: Çünkü V kümesi τ_Y-kapalı ve f, $\tau_X-\tau_Y$ sürekli olduğundan $\mathcal{CU}(f)^{op}(V)=f^{-1}(V)$ kümesi τ_X-kapalıdır.

3. $\mathcal{CU}(f)^{op}(V)$ bir yukarı kümedir: Herhangi $x,y\in X$ için $x\in\mathcal{CU}(f)^{op}(V)$ ve $x\leq_X y$ olsun. Bu durumda $x\in f^{-1}(V)\Rightarrow f(x)\in V$ olur. f bir Priestley

uzayı morfizmi olduğundan $f(x) \leq_Y f(y)$ olur. V bir yukarı küme olduğundan $f(y) \in V$ ve dolayısıyla $y \in f^{-1}(V) = \mathcal{CU}(f)^{op}(V)$ olur. Yani $\mathcal{CU}(f)^{op}(V)$ bir yukarı kümedir.

Böylece $\mathcal{CU}(f)^{op}$ un $\mathcal{CU}(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ den $\mathcal{CU}(X, \tau_X, \leq_X)$ ye tanımlı bir fonksiyon olduğunu söyleyebiliriz. Şimdi de $\mathcal{CU}(f)^{op} : \mathcal{CU}(Y, \tau_Y, \leq_Y) \longrightarrow \mathcal{CU}(X, \tau_X, \leq_X)$ fonksiyonunun örgü homomorfizmi koşullarını sağladığını görelim.

1. $\mathcal{CU}(f)^{op}(\emptyset) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ ve $\mathcal{CU}(f)^{op}(Y) = f^{-1}(Y) = X$ dir.

2. $U, V \in \mathcal{CU}(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{CU}(f)^{op}(U \cup V) &= f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) \\ &= \mathcal{CU}(f)^{op}(U) \cup \mathcal{CU}(f)^{op}(V) \end{aligned}$$

   dir.

3. $U, V \in \mathcal{CU}(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{CU}(f)^{op}(U \cap V) &= f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \\ &= \mathcal{CU}(f)^{op}(U) \cap \mathcal{CU}(f)^{op}(V) \end{aligned}$$

   dir.

Böylece $\mathcal{CU}(f)^{op}$ fonksiyonunun $(\mathcal{CU}(Y, \tau_Y, \leq_Y), \subseteq)$ den $(\mathcal{CU}(X, \tau_X, \leq_X), \subseteq)$ ye bir örgü homomorfizmi olduğunu görmüş olduk. O halde $(\mathcal{CU}(X, \tau_X, \leq_X), \subseteq) \xrightarrow{\mathcal{CU}(f)} (\mathcal{CU}(Y, \tau_Y, \leq_Y), \subseteq)$ bir $\mathbf{BDL^{op}}-$morfizmdir. Son olarak $\mathcal{CU}$ nun $\mathbf{PRS}$ den $\mathbf{BDL^{op}}$ a tanımlı bir funktor olduğunu görmek için $\mathcal{CU}$ nun bileşkeyi ve birim morfizmleri koruduğunu görmeliyiz.

bileşke işlemi: $(X, \tau_X, \leq_X) \xrightarrow{f} (Y, \tau_Y, \leq_Y)$ ve $(Y, \tau_Y, \leq_Y) \xrightarrow{g} (Z, \tau_Z, \leq_Z)$ birer $\mathbf{PRS}-$morfizm olsun. $\mathcal{CU}(g \circ f) = \mathcal{CU}(g) \circ^{op} \mathcal{CU}(f)$ olduğunu göstermek için $\mathcal{CU}(g \circ f)^{op} = \mathcal{CU}(f)^{op} \circ \mathcal{CU}(g)^{op}$ olduğunu göstereceğiz. Her $V \in \mathcal{CU}(Z, \tau_Z, \leq_Z)$ için

$$\begin{aligned}\mathcal{CU}(g\circ f)^{op}(V) &= (g\circ f)^{-1}(V) = \left(f^{-1}\circ g^{-1}\right)(V)\\ &= f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right)\\ &= \mathcal{CU}(f)^{op}\left(g^{-1}(V)\right)\\ &= \mathcal{CU}(f)^{op}\left(\mathcal{CU}(g)^{op}(V)\right)\\ &= \mathcal{CU}(f)^{op}\circ\mathcal{CU}(g)^{op}(V)\end{aligned}$$

dir. Böylece $\mathcal{CU}(g\circ f)^{op} = \mathcal{CU}(f)^{op}\circ\mathcal{CU}(g)^{op}$ olur.

birim morfizmler: Keyfi $(X,\tau,\leq)\in\mathbf{Ob}(\mathbf{PRS})$ ve $\mathbf{PRS}-$birim morfizm $(X,\tau\leq)\overset{id_{(X,\tau,\leq)}}{\longrightarrow}(X,\tau,\leq)$, $id_{(X,\tau,\leq)}(x)=x$ verilsin. $V\in\mathcal{CU}(X,\tau,\leq)$ olmak üzere

$$\mathcal{CU}\left(id_{(X,\tau,\leq)}\right)^{op}(V) = id^{-1}_{(X,\tau,\leq)}(V) = V$$

dir. O halde

$$\mathcal{CU}\left((X,\tau\leq)\overset{id_{(X,\tau,\leq)}}{\longrightarrow}(X,\tau,\leq)\right)^{op} = \mathcal{CU}(X,\tau,\leq)\overset{id_{\mathcal{CU}(X,\tau,\leq)}}{\longrightarrow}\mathcal{CU}(X,\tau,\leq)$$

olur ve dolayısıyla

$$\mathcal{CU}\left((X,\tau\leq)\overset{id_{(X,\tau,\leq)}}{\longrightarrow}(X,\tau,\leq)\right) = \mathcal{CU}(X,\tau,\leq)\overset{id_{\mathcal{CU}(X,\tau,\leq)}}{\longrightarrow}\mathcal{CU}(X,\tau,\leq)$$

eşitliği elde edilir.

$\mathcal{CU}$ nun $\mathbf{PRS}$ den $\mathbf{BDL^{op}}$ a tanımlı bir funktor olduğu görülmüştür. □

Bu bölümde iki tane doğal dönüşüm (natural transformation) tanımlayacağız. Bilindiği üzere $id_{\mathbf{PRS}}:\mathbf{PRS}\longrightarrow\mathbf{PRS}$ funktoru

$$id_{\mathbf{PRS}}\left((X,\tau_X,\leq_X)\overset{f}{\longrightarrow}(Y,\tau_Y,\leq_Y)\right) = (X,\tau_X,\leq_X)\overset{f}{\longrightarrow}(Y,\tau_Y,\leq_Y)$$

şeklindeki birim funktor olarak tanımlanır. Yine

$$\mathcal{PS}:\mathbf{BDL^{op}}\longrightarrow\mathbf{PRS}\text{ ve }\mathcal{CU}:\mathbf{PRS}\longrightarrow\mathbf{BDL^{op}}$$

birer funktor olduğundan $\mathcal{PS}\circ\mathcal{CU}:\mathbf{PRS}\longrightarrow\mathbf{PRS}$ bir funktor olur. Burada herhangi bir $(X,\tau_X,\leq_X)\overset{f}{\longrightarrow}(Y,\tau_Y,\leq_Y)\in\mathbf{Mor}(\mathbf{PRS})$ için

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{PS}\circ\mathcal{CU})\Big((X,\tau_X,\leq_X)\xrightarrow{f}(Y,\tau_Y,\leq_Y)\Big)\\
&=\mathcal{PS}\left(\mathcal{CU}\left(X,\tau_X,\leq_X\right)\right)\overset{\mathcal{PS}(\mathcal{CU}(f))}{\longrightarrow}\mathcal{PS}\left(\mathcal{CU}\left(Y,\tau_Y,\leq_Y\right)\right)
\end{aligned}
$$

ile tanımlıdır.

$\mathcal{PF}\left(\mathcal{CU}\left(X,\tau_X,\leq_X\right)\right)$ den $\mathcal{PF}\left(\mathcal{CU}\left(Y,\tau_Y,\leq_Y\right)\right)$ ye tanımlı $\mathcal{PS}\left(\mathcal{CU}\left(f\right)\right)$ fonksiyonunun nasıl bir dönüşüm uyguladığını görmek için herhangi bir $P\in\mathcal{PF}\left(\mathcal{CU}\left(X,\tau_X,\leq_X\right)\right)$ alırsak,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{PS}\left(\mathcal{CU}\left(f\right)\right)\left(P\right)&=\left(\mathcal{CU}\left(f\right)^{op}\right)^{-1}\left(P\right)\\
&=\left\{U\in\mathcal{CU}\left(Y,\tau_Y,\leq_Y\right)\mid\mathcal{CU}\left(f\right)^{op}\left(U\right)\in P\right\}\\
&=\Big\{U\in\mathcal{CU}\left(Y,\tau_Y,\leq_Y\right)\mid f^{-1}\left(U\right)\in P\Big\}
\end{aligned}
$$

olur.

Önerme 4.7. *$\eta=\Big((X,\tau,\leq)\overset{\eta(X,\tau,\leq)}{\longrightarrow}\mathcal{PS}\left(\mathcal{CU}\left(X,\tau,\leq\right)\right)\Big)_{(X,\tau,\leq)\in\mathbf{Ob}(\mathbf{PRS})}$ ailesi $id_{\mathbf{PRS}}$ den $\mathcal{PS}\circ\mathcal{CU}$ ya tanımlı bir doğal dönüşümdür.*

İspat Her $\mathbf{PRS}-$obje $(X,\tau,\leq)$ için $\mathbf{PRS}$-morfizm $(X,\tau,\leq)\overset{\eta(X,\tau,\leq)}{\longrightarrow}\mathcal{PS}\left(\mathcal{CU}\left(X,\tau,\leq\right)\right)$ nın $\eta_{(X,\tau,\leq)}\left(x\right)=\left\{U\in\mathcal{CU}\left(X,\tau,\leq\right)\mid x\in U\right\}$ ile tanımlandığını hatırlayalım (bkz. Önerme 4.2). η nın $\eta:id_{\mathbf{PRS}}\longrightarrow\mathcal{PS}\circ\mathcal{CU}$ şeklinde bir doğal dönüşüm olduğunu görmek için herhangi bir $(X,\tau_X,\leq_X)\xrightarrow{f}(Y,\tau_Y,\leq_Y)\in\mathbf{Mor}\left(\mathbf{PRS}\right)$ alalım ve

$$
\begin{tikzcd}
(X,\tau_X,\leq_X) \arrow[r, "\eta(X,\tau_X,\leq_X)"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{PS}\left(\mathcal{CU}\left(X,\tau_X,\leq_X\right)\right) \arrow[d, "\mathcal{PS}(\mathcal{CU}(f))"] \\
(Y,\tau_Y,\leq_Y) \arrow[r, "\eta(Y,\tau_Y,\leq_Y)"'] & \mathcal{PS}\left(\mathcal{CU}\left(Y,\tau_Y,\leq_Y\right)\right)
\end{tikzcd}
\tag{4.4}
$$

kare diyagramının değişmeli olduğunu görelim. Herhangi bir $x\in X$ için;

$$
\begin{aligned}
\left(\mathcal{PS}\left(\mathcal{CU}\left(f\right)\right)\circ\eta_{(X,\tau_X,\leq_X)}\right)\left(x\right)&=\mathcal{PS}\left(\mathcal{CU}\left(f\right)\right)\left(\eta_{(X,\tau_X,\leq_X)}\left(x\right)\right)\\
&=\Big\{U\in\mathcal{CU}\left(Y,\tau_Y,\leq_Y\right)\mid f^{-1}\left(U\right)\in\eta_{(X,\tau_X,\leq_X)}\left(x\right)\Big\}\\
&=\Big\{U\in\mathcal{CU}\left(Y,\tau_Y,\leq_Y\right)\mid x\in f^{-1}\left(U\right)\Big\}\\
&=\left\{U\in\mathcal{CU}\left(Y,\tau_Y,\leq_Y\right)\mid f\left(x\right)\in U\right\}\\
&=\eta_{(Y,\tau_Y,\leq_Y)}\left(f\left(x\right)\right)\\
&=\left(\eta_{(Y,\tau_Y,\leq_Y)}\circ f\right)\left(x\right)
\end{aligned}
$$

olur. Böylece (4.4) değişmelidir. Dolayısıyla η, $id_{\mathbf{PRS}}$ den $\mathcal{PS}\circ\mathcal{CU}$ ye tanımlı bir doğal dönüşümdür. $\square$

Şimdi de ikinci bir doğal dönüşümü tanımlayacağız. $id_{\mathbf{BDL^{op}}} : \mathbf{BDL^{op}} \longrightarrow \mathbf{BDL^{op}}$, $id_{\mathbf{BDL^{op}}}\Big((L,\leq_L) \xrightarrow{f} (M,\leq_M)\Big) = (L,\leq_L) \xrightarrow{f} (M,\leq_M)$ şeklinde tanımlı birim funktor ve $\mathcal{CU}\circ\mathcal{PS} : \mathbf{BDL^{op}} \longrightarrow \mathbf{BDL^{op}}$ funktoru $\mathcal{CU}$ ile $\mathcal{PS}$ nin bileşke funktoru olsun. Burada herhangi bir $(L,\leq_L) \xrightarrow{f} (M,\leq_M) \in \mathbf{Mor}\,(\mathbf{BDL^{op}})$ için

$$(\mathcal{CU}\circ\mathcal{PS})\Big((L,\leq_L) \xrightarrow{f} (M,\leq_M)\Big) = (\mathcal{CU}\,(\mathcal{PS}\,(L))\,,\subseteq) \overset{\mathcal{CU}(\mathcal{PS}(f))}{\longrightarrow} (\mathcal{CU}\,(\mathcal{PS}\,(M))\,,\subseteq)$$

dir. Elbette ki $\mathbf{BDL^{op}}-$morfizm $(\mathcal{CU}\,(\mathcal{PS}\,(L))\,,\subseteq) \overset{\mathcal{CU}(\mathcal{PS}(f))}{\longrightarrow} (\mathcal{CU}\,(\mathcal{PS}\,(M))\,,\subseteq)$ morfizmi $\mathbf{BDL}-$morfizm $(\mathcal{CU}\,(\mathcal{PS}\,(M))\,,\subseteq) \overset{\mathcal{CU}(\mathcal{PS}(f))^{op}}{\longrightarrow} (\mathcal{CU}\,(\mathcal{PS}\,(L))\,,\subseteq)$ nin karşıtıdır. $\mathcal{CU}\,(\mathcal{PS}\,(M))$ den $\mathcal{CU}\,(\mathcal{PS}\,(L))$ ye tanımlı $\mathcal{CU}\,(\mathcal{PS}\,(f))^{op}$ fonksiyonunun nasıl bir dönüşüm uyguladığını görmek için herhangi bir $\mathcal{U} \in \mathcal{CU}\,(\mathcal{PS}\,(M))$ alalım. Önteorem 3.3 gereği $\exists a \in M$ öyle ki $\mathcal{U} = \varphi\,(a)$ olur. O halde

$$\begin{aligned}
\mathcal{CU}\,(\mathcal{PS}\,(f))^{op}\,(\mathcal{U}) &= \mathcal{CU}\,(\mathcal{PS}\,(f))^{op}\,(\varphi\,(a)) \\
&= (\mathcal{PS}\,(f))^{-1}\,(\varphi\,(a)) \\
&= \{Q \in \mathcal{PF}\,(L) \mid \mathcal{PS}\,(f)\,(Q) \in \varphi\,(a)\} \\
&= \left\{Q \in \mathcal{PF}(L) \mid (f^{op})^{-1}\,(Q) \in \varphi\,(a)\right\} \\
&= \left\{Q \in \mathcal{PF}\,(L) \mid a \in (f^{op})^{-1}\,(Q)\right\} \\
&= \{Q \in \mathcal{PF}\,(L) \mid f^{op}\,(a) \in Q\} \\
&= \varphi\,(f^{op}\,(a))
\end{aligned}$$

olur.

Önerme 4.8. $\varepsilon = \Big((\mathcal{CU}(\mathcal{PS}\,(L)),\subseteq) \overset{\varepsilon_{(L,\leq)}}{\longrightarrow} (L,\leq)\Big)_{(L,\leq)\in\mathbf{Ob}(\mathbf{BDL^{op}})}$ *ailesi $\mathcal{CU}\circ\mathcal{PS}$ den $id_{\mathbf{BDL^{op}}}$ ye tanımlı bir doğal dönüşümdür. Burada $\mathbf{BDL^{op}}-$morfizm $(\mathcal{CU}(\mathcal{PS}\,(L)),\subseteq) \overset{\varepsilon_{(L,\leq)}}{\longrightarrow} (L,\leq)$, $\mathbf{BDL}-$morfizm $(L,\leq) \overset{e_{(L,\leq)}}{\longrightarrow} (\mathcal{CU}\,(\mathcal{PS}\,(L))\,,\subseteq)$ nin karşıt morfizmidir.*

İspat Öncelikle herhangi bir $\mathbf{BDL}-$obje $(L,\leq)$ için, $\mathbf{BDL}-$morfizm $(L,\leq) \overset{e_{(L,\leq)}}{\longrightarrow} (\mathcal{CU}\,(\mathcal{PS}\,(L))\,,\subseteq)$ nin $e_{(L,\leq)}\,(x) = \varphi\,(x)$ ile tanımlandığını hatırlayalım (bkz. Önerme 4.1). ε ailesinin $\varepsilon : \mathcal{CU}\circ\mathcal{PS} \longrightarrow id_{\mathbf{BDL^{op}}}$ şeklinde bir doğal dönüşüm olduğunu görmek için herhangi bir $(L, \leq_L) \xrightarrow{f} (M, \leq_M) \in \mathbf{Mor}\,(\mathbf{BDL^{op}})$ alalım ve

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{CU}\,(\mathcal{PS}\,(L))\,,\subseteq) & \xrightarrow{\varepsilon_{(L,\leq_L)}} & (L, \leq_L) \\ {\scriptstyle \mathcal{CU}(\mathcal{PS}(f))}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} \\ (\mathcal{CU}\,(\mathcal{PS}\,(M))\,,\subseteq) & \xrightarrow[\varepsilon_{(M,\leq_M)}]{} & (M, \leq_M) \end{array}$$

kare diyagramının değişmeli olduğunu görelim. Fakat bu diyagramın değişmeli olduğunu görmek için bu diyagrama $\mathbf{BDL}$ kategorisi içinde karşı gelen diyagramın değişmeli olduğunu göstereceğiz. $\mathbf{BDL^{op}}$-morfizm $(\mathcal{CU}(\mathcal{PS}\,(L)), \subseteq) \overset{\mathcal{CU}(\mathcal{PS}(f))}{\longrightarrow} (\mathcal{CU}(\mathcal{PS}\,(M)), \subseteq)$ yi, $\mathbf{BDL}-$morfizm $(\mathcal{CU}(\mathcal{PS}\,(M)), \subseteq) \overset{\mathcal{CU}(\mathcal{PS}(f))^{op}}{\longrightarrow} (\mathcal{CU}(\mathcal{PS}\,(L)), \subseteq)$ nin karşıtı olarak ve $\mathbf{BDL^{op}}-$morfizm $(\mathcal{CU}(\mathcal{PS}\,(L)), \subseteq) \overset{\varepsilon_{(L,\leq)}}{\longrightarrow} (L, \leq)$ yi $\mathbf{BDL}$-morfizm $(L, \leq) \overset{e_{(L,\leq)}}{\longrightarrow} (\mathcal{CU}\,(\mathcal{PS}\,(L))\,,\subseteq)$ nin karşıtı olarak tanımladığımızı göz önünde tutalım. Dolayısıyla bir önceki diyagramın $\mathbf{BDL^{op}}$ içinde değişmeli olması,

$$\begin{array}{ccc} (M, \leq_M) & \overset{e_{(M,\leq_M)}}{\longrightarrow} & (\mathcal{CU}\,(\mathcal{PS}\,(M))\,,\subseteq) \\ {\scriptstyle f^{op}}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{CU}(\mathcal{PS}(f))^{op}} \\ (L, \leq_L) & \xrightarrow[e_{(L,\leq_L)}]{} & (\mathcal{CU}\,(\mathcal{PS}\,(L))\,,\subseteq) \end{array}$$

diyagramının $\mathbf{BDL}$ içinde değişmeli olmasına denktir. Her $x \in M$ için;

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{CU}\,(\mathcal{PS}\,(f))^{op} \circ e_{(M,\leq_M)}\right)(x) &= \mathcal{CU}\,(\mathcal{PS}\,(f))^{op}\left(e_{(M,\leq_M)}\,(x)\right) \\ &= \mathcal{CU}\,(\mathcal{PS}\,(f))^{op}\,(\varphi\,(x)) \\ &= \varphi\,(f^{op}\,(x)) \\ &= e_{(L,\leq_L)}\,(f^{op}\,(x)) \\ &= \left(e_{(L,\leq_L)} \circ f^{op}\right)(x) \end{aligned}$$

olduğundan $\mathcal{CU}\,(\mathcal{PS}\,(f))^{op} \circ e_{(M,\leq_M)} = e_{(L,\leq_L)} \circ f^{op}$ olur. □

Şimdi buraya kadar yaptıklarımızı toparlayalım.

Bu kısımda, $\mathbf{PRS}$ ile objeleri Priestley uzayları ve morfizmleri Priestley uzayı morfizmleri olan kategoriyi gösterdik. Ayrıca $id_{\mathbf{PRS}} : \mathbf{PRS} \longrightarrow \mathbf{PRS}$ nin ve $\mathcal{PS} \circ \mathcal{CU} : \mathbf{PRS} \longrightarrow \mathbf{PRS}$ nin birer funktor olduğunu ve η nın $id_{\mathbf{PRS}}$ den $\mathcal{PS} \circ \mathcal{CU}$ ya tanımlı bir doğal dönüşüm olduğunu gösterdik. Önerme 4.4 gereği her $(X, \tau, \leq)$ Priestley uzayı için $(X, \tau, \leq) \overset{\eta_{(X,\tau,\leq)}}{\longrightarrow} \mathcal{PS}\,(\mathcal{CU}\,(X, \tau, \leq))$ bir $\mathbf{PRS}-$izomorfizm olduğundan η, $id_{\mathbf{PRS}}$ den $\mathcal{PS} \circ \mathcal{CU}$ ye tanımlı bir doğal izomorfizmdir. Dolayısıyla $id_{\mathbf{PRS}} \approx \mathcal{PS} \circ \mathcal{CU}$ dir.

Yine $\mathbf{BDL^{op}}$ ile; objeleri sınırlı dağılımlı örgüler ve morfizmleri örgü homomorfizmleri olan kategoriyi gösterdik.

$$id_{\mathbf{BDL^{op}}} : \mathbf{BDL^{op}} \longrightarrow \mathbf{BDL^{op}} \text{ ve } \mathcal{CU} \circ \mathcal{PS} : \mathbf{BDL^{op}} \longrightarrow \mathbf{BDL^{op}}$$

nin birer funktor ve ε un $\mathcal{CU} \circ \mathcal{PS}$ den $id_{\mathbf{BDL^{op}}}$ ye tanımlı bir doğal dönüşüm olduğunu gösterdik. Her $(L, \leq)$ sınırlı, dağılımlı örgüsü için $(\mathcal{CU}(\mathcal{PS}(L)), \subseteq) \overset{\varepsilon_{(L,\leq)}}{\longrightarrow} (L, \leq)$ nin bir $\mathbf{BDL^{op}}-$izomorfizm (çünkü $e_{(L,\leq)} : (L, \leq) \longrightarrow (\mathcal{CU}(\mathcal{PS}(L)), \subseteq)$ bir $\mathbf{BDL}-$izomorfizmdir. Bkz. Önerme 4.1) olduğundan ε, $\mathcal{CU} \circ \mathcal{PS}$ den $id_{\mathbf{BDL^{op}}}$ ye tanımlı bir doğal izomorfizmdir. Dolayısıyla $\mathcal{CU} \circ \mathcal{PS} \approx id_{\mathbf{BDL^{op}}}$ dir.

Böylece Önerme 2.11 uyarınca aşağıdaki teorem kanıtlanmış oldu.

Teorem 4.1. *$\mathcal{PS} : \mathbf{BDL^{op}} \longrightarrow \mathbf{PRS}$ ve $\mathcal{CU} : \mathbf{PRS} \longrightarrow \mathbf{BDL^{op}}$ birer denkliktir.*

4.2. Bazı Genişletilmiş Kategoriler

Tanım 4.3. *$(L, \leq_L)$ ve $(M, \leq_M)$ birer sınırlı, dağılımlı örgü ve $u : L \longrightarrow M$ bir fonksiyon olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa u ya $(L, \leq_L)$ den $(M, \leq_M)$ ye tanımlı bir **bitişme koruyan fonksiyon** (join-homomorfizm) denir (Cignoli vd. 1991):*

(J1) *$(L, \leq_L)$ ve $(M, \leq_M)$ nin en küçük elemanları sırayla $\perp_L$ ve $\perp_M$ olmak üzere $u(\perp_L) = \perp_M$ dir,*

(J2) *$\forall x, y \in L$ için $u(x \vee y) = u(x) \vee u(y)$ dir.*

Tanım 4.4. *$(L, \leq_L)$ ve $(M, \leq_M)$ birer sınırlı, dağılımlı örgü ve $v : L \longrightarrow M$ bir fonksiyon olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa v ye $(L, \leq_L)$ den $(M, \leq_M)$ ye tanımlı bir **buluşma koruyan fonksiyon** (meet-homomorfizm) denir (Cignoli vd. 1991):*

(M1) *$(L, \leq_L)$ ve $(M, \leq_M)$ nin en büyük elemanları sırayla $\top_L$ ve $\top_M$ olmak üzere $v(\top_L) = \top_M$ dir,*

(M2) *$\forall x, y \in L$ için $v(x \wedge y) = v(x) \wedge v(y)$ dir.*

Tanım 4.5. *$(L, \leq_L)$ ve $(M, \leq_M)$ birer Boole cebiri ve $f : L \longrightarrow M$ bir örgü homomorfizmi olsun. Eğer $\forall a \in L$ için*

$$f(a') = f(a)'$$

*oluyorsa, f ye bir **Boole homomorfizmi** denir.*

Objeleri sınırlı ve dağılımlı örgüler ve morfizmleri bitişme koruyan fonksiyonlar olan kategoriyi $\mathbf{JBDL}$ ile göstereceğiz ve bu kategoriye **Genişletilmiş Sınırlı ve Dağılımlı Örgülerin Kategorisi** diyeceğiz. Elbetteki burada bileşke işlemi, bilinen fonksiyon bileşkesi ve birim morfizmler ise birim fonksiyonlardır. Eğer özel halde bu kategorinin her bir objesi bir Boole cebiri oluyorsa, bu kategoriyi $\mathbf{JBA}$ ile gösterecek olup, elde edilen bu kategoriye **Genişletilmiş Boole Cebirlerinin Kategorisi** diyeceğiz. Burada

$$\hom_{\mathbf{JBA}}\left(\left(B,\leq_B\right),\left(C,\leq_C\right)\right)=\hom_{\mathbf{JBDL}}\left(\left(B,\leq_B\right),\left(C,\leq_C\right)\right)$$

olduğu açıktır. Dolayısıyla $\mathbf{JBA}$ kategorisi $\mathbf{JBDL}$ kategorisinin bir dolu altkategorisidir.

Uyarı 4.2. *Tanım 4.3 ve Tanım 4.4 ün apaçık bir sonucu olarak; $(K,\leq_K)$ ve $(M,\leq_M)$ birer sınırlı, dağılımlı örgü ve $h:K\longrightarrow M$ bir fonksiyon olmak üzere, h nin $(K,\leq_K)$ dan $(M,\leq_M)$ ye tanımlı bir örgü homomorfizmi olması için gerek ve yeter şart $(K,\leq_K)$ dan $(M,\leq_M)$ ye tanımlı bir bitişme koruyan fonksiyon ve buluşma koruyan fonksiyon olmasıdır.*

Önerme 4.9. *$(X,\leq)$ bir kısmi sıralı küme, I bir damga kümesi ve $\forall i\in I$ için A_i bir aşağı küme olsun. Bu durumda $\bigcup_{i\in I}A_i$ kümesi de bir aşağı kümedir. Kısaca aşağı kümelerin keyfi birleşimi yine bir aşağı kümedir.*

İspat Keyfi $x,y\in X$ için $x\in\bigcup_{i\in I}A_i$ ve $y\leq x$ olsun. Bu durumda $\exists i_0\in I$ öyle ki $x\in A_{i_0}$ dir. A_{i_0} bir aşağı küme ve $y\leq x$ olduğundan $y\in A_{i_0}$ ve dolayısıyla $y\in\bigcup_{i\in I}A_i$ olur. $\square$

Tanım 4.6. *$(X,\tau_X,\leq_X)$ ve $(Y,\tau_Y,\leq_Y)$ birer Priestley uzayı ve R, X den Y ye tanımlı bir bağıntı olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa, R ye $(X,\tau_X,\leq_X)$ den $(Y,\tau_Y,\leq_Y)$ ye tanımlı bir **Priestley bağıntısı** denir (Cignoli vd. 1991).*

(i) *Her $x\in X$ için $R(x)$ kümesi τ_Y-kapalı ve aşağı kümedir,*

(ii) *Her $V\in\mathcal{CU}(Y,\tau_Y,\leq_Y)$ için $R^{-1}(V)\in\mathcal{CU}(X,\tau_X,\leq_X)$ dir.*

Uyarı 4.3. *Uyarı 3.2 de verilen bir (X,τ) Stone uzayının $(X,\tau,=)$ şeklinde bir Priestley uzayı olarak düşünülebileceğini belirtmiştik. Eğer (X,τ_X) ve (Y,τ_Y) birer Stone uzayı* *(dolayısıyla Priestley uzayı) ve R, (X, τ_X) den (Y, τ_Y) ye tanımlı bir Priestley bağıntısı ise, bu bağıntıya (X, τ_X) den (Y, τ_Y) ye tanımlı bir **Boole bağıntısı** denir. Bu bağlamda her Boole bağıntısının aynı zamanda bir Priestley bağıntısı olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca bir Stone uzayında herhangi bir altkümenin bir aşağı (yukarı) küme olduğu açıktır. Dolayısıyla bir Stone uzayında bir kümenin yukarı küme veya aşağı küme olması koşulunu aramayacağız. Bir (X, τ) Stone uzayı verildiğinde $\mathcal{C}(X, \tau)$ ile (X, τ) in tüm kaçık kümelerinin kümesini göstereceğiz. Aşağıdaki Tanım 4.7 de en genel halde Boole bağıntısı tanımı verilmiştir.*

Tanım 4.7. *(X, τ_X) ve (Y, τ_Y) birer Stone uzayı, R, X den Y ye tanımlı bir bağıntı olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa, R ye (X, τ_X) den (Y, τ_Y) ye tanımlı bir **Boole bağıntısı** denir (Halmos 1955).*

(i) *Her $x \in X$ için $R(x)$ kümesi τ_Y-kapalıdır,*

(ii) *Her $V \in \mathcal{C}(Y, \tau_Y)$ için $R^{-1}(V) \in \mathcal{C}(X, \tau_X)$ dir.*

Örnek 4.3. *$(X, \tau_X, \leq_X)$ ve $(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ birer Priestley uzayı olmak üzere, $\emptyset$ $(X, \tau_X, \leq_X)$ den $(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ ye tanımlı bir Priestley bağıntısıdır.*

Örnek 4.4. *Örnek 3.2 de verilen $(\mathcal{PF}(L), \tau_L, \subseteq)$ ve $(\mathcal{PF}(M), \tau_M, \subseteq)$ Priestley uzaylarını göz önüne alalım.*

$$\mathcal{R} = \{(P, Q) \in \mathcal{PF}(L) \times \mathcal{PF}(M) \mid (\forall \downarrow x \in Q), x \in P\}$$

şeklinde tanımlı $\mathcal{R}$, $(\mathcal{PF}(L), \tau_L, \subseteq)$ den $(\mathcal{PF}(M), \tau_M, \subseteq)$ ye tanımlı bir Priestley bağıntısıdır. Bunu görelim: $P \in \mathcal{PF}(L)$ olmak üzere herhangi $Q, Q' \in \mathcal{PF}(M)$ için $Q \in \mathcal{R}(P)$ ve $Q' \subseteq Q$ koşulu sağlansın. Her $\downarrow x \in Q'$ için $\downarrow x \in Q \Rightarrow x \in P$ olduğundan $Q' \in \mathcal{R}(P)$ dir. Dolayısıyla $\mathcal{R}(P)$ bir aşağı kümedir.

Herhangi bir $Q \in \overline{\mathcal{R}(P)}$ alalım. $Q \in \mathcal{PF}(M)$ olduğundan $Q \neq \emptyset$ dir. $\downarrow x \in Q$ olsun. Bu durumda $Q \in \varphi(\downarrow x)$ olur. Aynı zamanda $\varphi(\downarrow x) \in \tau_M$ olduğundan

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(P) \cap \varphi(\downarrow x) \neq \emptyset &\Rightarrow (\exists Q' \in \mathcal{PF}(M)), Q' \in \mathcal{R}(P) \text{ ve } Q' \in \varphi(\downarrow x) \\ &\Rightarrow Q' \in \mathcal{R}(P) \text{ ve } \downarrow x \in Q' \Rightarrow x \in P \Rightarrow Q \in \mathcal{R}(P) \Rightarrow \overline{\mathcal{R}(P)} = \mathcal{R}(P) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\mathcal{R}(P)$ kapalıdır.

Herhangi bir $\mathcal{V} \in \mathcal{CU}(\mathcal{PS}(M))$ alalım. Eğer $\mathcal{V} = \emptyset$ ise $\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{V}) = \emptyset \in \mathcal{CU}(\mathcal{PS}(L))$ olur. $\mathcal{V} \neq \emptyset$ olsun. Önteorem 3.3 gereği $\exists \downarrow x \in M$ öyle ki $\mathcal{V} = \varphi(\downarrow x)$ dir. $\mathcal{R}^{-1}(\varphi(\downarrow x))$ $= \varphi(x)$ olduğunu görmek istiyoruz. Çünkü $\varphi(x) \in \mathcal{CU}(\mathcal{PS}(L))$ dir. Herhangi bir $P \in \mathcal{R}^{-1}(\varphi(\downarrow x))$ alalım. Bu durumda

$$(\exists Q \in \varphi(\downarrow x)), P \in \mathcal{R}^{-1}(Q) \Rightarrow (Q, P) \in \mathcal{R}^{-1} \Rightarrow (P, Q) \in \mathcal{R}$$

olur. Aynı zamanda $Q \in \varphi(\downarrow x)$ olduğundan

$$\downarrow x \in Q \Rightarrow x \in P \Rightarrow P \in \varphi(x) \Rightarrow \mathcal{R}^{-1}(\varphi(\downarrow x)) \subseteq \varphi(x)$$

olur. Şimdi de ters kapsamayı görelim. Diyelim ki $\varphi(x) \nsubseteq \mathcal{R}^{-1}(\varphi(\downarrow x))$ olsun. O halde

$$(\exists P \in \varphi(x)), P \notin \mathcal{R}^{-1}(\varphi(\downarrow x)) \Rightarrow \mathcal{R}(P) \cap \varphi(\downarrow x) = \emptyset$$

dir. $\mathcal{V} = \varphi(\downarrow x) \neq \emptyset$ olduğunu söyledik. $Q \in \varphi(\downarrow x)$ olsun. O zaman $\downarrow x \in Q$ olur. Aynı zamanda $P \in \varphi(x) \Rightarrow x \in P$ olduğundan $(P, Q) \in \mathcal{R} \Rightarrow Q \in \mathcal{R}(P)$ olur. Fakat bu durum $\mathcal{R}(P) \cap \varphi(\downarrow x) = \emptyset$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $\varphi(x) \subseteq \mathcal{R}^{-1}(\varphi(\downarrow x))$ dir. Böylece $\mathcal{R}^{-1}(\varphi(\downarrow x)) \in \mathcal{CU}(\mathcal{PS}(L))$ elde edilir.

Önteorem 4.2. *$(X, \tau_X, \leq_X)$ ve $(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ birer Priestley uzayı, R, $(X, \tau_X, \leq_X)$ den $(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ ye tanımlı bir Priestley bağıntısı, $x \in X$ ve $y \in Y$ olsun. Eğer $y \notin R(x)$ ise, o zaman $\exists V \in \mathcal{CU}(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ öyle ki $y \in V$ ve $V \cap R(x) = \emptyset$ dir.*

İspat Eğer $R(x) = \emptyset$ ise $V = Y$ olarak seçmek yeterlidir. $R(x) \neq \emptyset$ olsun. Boş olmayan bir I damga kümesi için $R(x) = \{y_i \in Y \mid i \in I\}$ olsun. R, $(X, \tau_X, \leq_X)$ den $(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ ye tanımlı bir Priestley bağıntısı olduğundan $R(x)$ bir aşağı kümedir. Dolayısıyla $\forall i \in I$ için $y \nleq_Y y_i$ dir. Aksi takdirde $y \in R(x)$ olur ki bu durum $y \notin R(x)$ olmasıyla çelişir. Aynı zamanda $(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ bir Priestley uzayı olduğundan $\exists V_{y_i} \in \mathcal{CU}(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ öyle ki $y \in V_{y_i}$ ve $y_i \notin V_{y_i} \Rightarrow y_i \in Y \setminus V_{y_i} \Rightarrow y_i \in \bigcup\limits_{i \in I}(Y \setminus V_{y_i})$ dir. Dolayısıyla $R(x) \subseteq \bigcup\limits_{i \in I}(Y \setminus V_{y_i})$ olur. O halde $\mathcal{V} = \{Y \setminus V_{y_i} \mid i \in I\}$ ailesi $R(x)$ in bir açık örtüsüdür. (Y, τ_Y) topolojik uzayı kompakt ve Priestley bağıntısı tanımı gereği $R(x)$ kümesi τ_Y-kapalı olduğundan Teorem 3.4 uyarınca $R(x)$ de kompakttır. O halde $R(x) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n}(Y \setminus V_{y_i})$ olacak şekilde $\mathcal{V}$ nin bir sonlu $\{Y \setminus V_{y_1}, Y \setminus V_{y_2}, ..., Y \setminus V_{y_n}\}$ alt örtüsü vardır. Bu durumda

$$R(x) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}(Y \setminus V_{y_i}) = Y \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}\right) \Rightarrow R(x) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}\right) = \emptyset$$

olur. Burada $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$ için $y \in V_{y_i}$ olduğundan $y \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_{y_i}$ dir. Önteorem 4.1 in bir sonucu olarak da $\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_{y_i} \in \mathcal{CU}(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ olduğundan kanıt tamamlanır. $\square$

Önteorem 4.3. $(X, \tau_X, \leq_X)$ *ve* $(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ *birer Priestley uzayı ve* R, $(X, \tau_X, \leq_X)$ *den* $(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ *ye tanımlı bir Priestley bağıntısı olsun. Bu durumda* $\forall s, t \in X$ *ve* $s \leq_X t$ *için*

$$R(s) \subseteq R(t)$$

dir (Cignoli vd. 1991).

İspat Eğer $R(t) = Y$ ise istenen açıktır. $R(t) \neq Y$ olsun. Herhangi bir $y \in Y \setminus R(t)$ alalım. Bu durmda $y \notin R(t)$ ve Önteorem 4.2 uyarınca $\exists V \in \mathcal{CU}(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ öyle ki $y \in V$ ve $V \cap R(t) = \emptyset$ dir. Buradan $t \notin R^{-1}(V)$ olur. $R^{-1}(V)$ bir yukarı küme ve $s \leq_X t$ olduğundan

$$\begin{aligned} s \notin R^{-1}(V) &\Rightarrow V \cap R(s) = \emptyset \Rightarrow y \notin R(s) \Rightarrow y \in Y \setminus R(s) \\ &\Rightarrow Y \setminus R(t) \subseteq Y \setminus R(s) \Rightarrow R(s) \subseteq R(t) \end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Önteorem 4.4. $(X, \tau_X, \leq_X)$ *ve* $(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ *birer Priestley uzayı ve* R, $(X, \tau_X, \leq_X)$ *den* $(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ *ye tanımlı bir Priestley bağıntısı olsun. Bu durumda* R *kümesi* $X \times Y$ *çarpım uzayının bir kapalı altkümesidir.*

İspat Herhangi bir $(x, y) \in (X \times Y) \setminus R$ alalım. Bu durumda $(x, y) \notin R \Rightarrow y \notin R(x)$ olur. Önteorem 4.2 gereği $\exists V \in \mathcal{CU}(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ öyle ki $y \in V$ ve $V \cap R(x) = \emptyset$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} x \notin R^{-1}(V) &\Rightarrow x \in X \setminus R^{-1}(V) \\ &\Rightarrow (x, y) \in \left(X \setminus R^{-1}(V)\right) \times V \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi $(X \setminus R^{-1}(V)) \times V \subseteq (X \times Y) \setminus R$ olduğunu görelim. Herhangi bir $(a, b) \in (X \setminus R^{-1}(V)) \times V$ alalım. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
& a \notin R^{-1}(V) \text{ ve } b \in V \Rightarrow R(a) \cap V = \emptyset \Rightarrow b \notin R(a) \\
& \Rightarrow (a, b) \notin R \Rightarrow (a, b) \in (X \times Y) \setminus R \\
& \Rightarrow \left(X \setminus R^{-1}(V)\right) \times V \subseteq (X \times Y) \setminus R
\end{aligned}
$$

olur. Burada $V \in \mathcal{CU}(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ ve R, $(X, \tau_X, \leq_X)$ den $(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ ye tanımlı bir Priestley bağıntısı olduğundan $R^{-1}(V) \in \mathcal{CU}(X, \tau_X, \leq_X)$ olur. Dolayısıyla $(X \setminus R^{-1}(V)) \times V$ kümesi $X \times Y$ çarpım uzayının bir açık alt kümesidir.

Böylece $(X \times Y) \setminus R$ kümesinin her noktası bir iç nokta olur. Yani $(X \times Y) \setminus R$ kümesi $X \times Y$ çarpım uzayında açık ve dolayısıyla R aynı uzayda kapalıdır. $\square$

Önerme 4.10. *$(X, \tau_X, \leq_X)$, $(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ ve $(Z, \tau_Z, \leq_Z)$ Priestley uzayları olmak üzere R, $(X, \tau_X, \leq_X)$ den $(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ ye tanımlı ve S, $(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ den $(Z, \tau_Z, \leq_Z)$ ye tanımlı birer Priestley bağıntısı olsun. Bu durumda $S \circ R$, $(X, \tau_X, \leq_X)$ den $(Z, \tau_Z, \leq_Z)$ ye tanımlı bir Priestley bağıntısıdır.*

İspat $S \circ R$ nin X den Z ye tanımlı bir bağıntı olduğu açıktır.

(i) Keyfi $x \in X$ alalım ve $(S \circ R)(x)$ in τ_Z-kapalı olduğunu görelim. Bir ön hazırlık olarak $Y \times Z$ den Z ye $\pi_2(y, z) = z$ ile tanımlı projeksiyon dönüşümünü ele alalım ve

$$(S \circ R)(x) = \pi_2((R(x) \times Z) \cap S)$$

olduğunu görelim. Herhangi bir $z \in (S \circ R)(x)$ alalım. Bu durumda $\exists y \in R(x)$ öyle ki $z \in S(y) \Rightarrow (y, z) \in S$ dir. Dolayısıyla $(y, z) \in (R(x) \times Z) \cap S$ olur. Yani $z \in \pi_2((R(x) \times Z) \cap S)$ olur. O halde

$$(S \circ R)(x) \subseteq \pi_2((R(x) \times Z) \cap S)$$

kapsaması vardır. Şimdi de herhangi bir $z \in \pi_2((R(x) \times Z) \cap S)$ alalım. O halde $\exists y \in Y$ öyle ki

$$
\begin{aligned}
& (y, z) \in (R(x) \times Z) \cap S \Rightarrow (y, z) \in R(x) \times Z \text{ ve } (y, z) \in S \\
& \Rightarrow y \in R(x) \text{ ve } z \in S(y) \Rightarrow z \in (S \circ R)(x)
\end{aligned}
$$

olur. Böylece $\pi_2((R(x) \times Z) \cap S) \subseteq (S \circ R)(x)$ olur. Yani

$$(S \circ R)(x) = \pi_2((R(x) \times Z) \cap S)$$

eşitliği vardır. $R(x)$ kümesi τ_Y-kapalı (dolayısıyla $R(x)\times Z$ kümesi $Y \times Z$ çarpım uzayında kapalı) ve Önteorem 4.4 gereği S kümesi $Y \times Z$ çarpım uzayında kapalı olduğundan $(R(x) \times Z) \cap S$ kümesi de $Y \times Z$ çarpım uzayında kapalı olur. (Y, τ_Y) ve (Z, τ_Z) topolojik uzayları kompakt olduğundan Teorem 3.3 gereği $Y \times Z$ çarpım uzayı kompakttır. O halde $(R(x) \times Z) \cap S$ kümesi bu uzayda kompakttır. Projeksiyon dönüşümleri sürekli fonksiyonlar ve kompaktlık sürekli fonksiyonlar altında korunduğundan $\pi_2((R(x) \times Z) \cap S)$ kümesi (Z, τ_Z) topolojik uzayında kompakttır. Yani $(S \circ R)(x)$ kümesi (Z, τ_Z) topolojik uzayında kompakttır. Aynı zamanda (Z, τ_Z) Hausdorff olduğundan Teorem 3.5 gereği $(S \circ R)(x)$ kümesi τ_Z-kapalıdır.

Şimdi de $(S \circ R)(x)$ in (dolayısıyla $S(R(x))$ in) aşağı küme olduğunu görelim. Tanım 2.1 in bir sonucu olarak

$$S(R(x)) = \bigcup_{y \in R(x)} S(y)$$

eşitliğini hemen görebiliriz. S, $(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ den $(Z, \tau_Z, \leq_Z)$ ye tanımlı bir Priestley bağıntısı olduğundan $\forall y \in R(x) \subseteq Y$ için $S(y)$ bir aşağı kümedir. Önerme 4.9 gereği aşağı kümelerin keyfi birleşimi yine bir aşağı küme olduğundan $\bigcup_{y \in R(x)} S(y)$ bir aşağı küme ve dolayısıyla $S(R(x))$ bir aşağı küme olur.

(ii) Keyfi $V \in \mathcal{CU}(Z, \tau_Z, \leq_Z)$ alalım ve $(S \circ R)^{-1}(V) \in \mathcal{CU}(X, \tau_X, \leq_X)$ olduğunu görelim. Yine Tanım 2.1 in bir sonucu olarak $(S \circ R)^{-1}(V) = R^{-1}(S^{-1}(V))$ olduğundan $R^{-1}(S^{-1}(V)) \in \mathcal{CU}(X, \tau_X, \leq_X)$ olduğunu göstermek yeterlidir. S, $(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ den $(Z, \tau_Z, \leq_Z)$ ye tanımlı bir Priestley bağıntısı ve $V \in \mathcal{CU}(Z, \tau_Z, \leq_Z)$ olduğundan $S^{-1}(V) \in \mathcal{CU}(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ dir. Yine R, $(X, \tau_X, \leq_X)$ den $(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ ye tanımlı bir Priestley bağıntısı ve $S^{-1}(V) \in \mathcal{CU}(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ olduğundan

$$R^{-1}\left(S^{-1}(V)\right) \in \mathcal{CU}(X, \tau_X, \leq_X)$$

olur. □

Tanım 4.8. *$(X, \tau_X, \leq_X)$, $(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ ve $(Z, \tau_Z, \leq_Z)$ Priestley uzayları, R, $(X, \tau_X, \leq_X)$ den $(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ ye tanımlı ve S, $(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ den $(Z, \tau_Z, \leq_Z)$ ye tanımlı birer Priestley bağıntısı olmak üzere, $(X, \tau_X, \leq_X)$ den $(Z, \tau_Z, \leq_Z)$ ye tanımlı $S \circ R$ Priestley bağıntısına*

*R ile S nin **Priestley bileşke bağıntısı** denir.*

Uyarı 4.4. *(X, τ_X), (Y, τ_Y) ve (Z, τ_Z) Stone uzayları ve R, (X, τ_X) den (Y, τ_Y) ye tanımlı ve S, (Y, τ_Y) den (Z, τ_Z) ye tanımlı birer Boole bağıntısı olmak üzere, (X, τ_X) den (Z, τ_Z) ye tanımlı $S \circ R$ Boole bağıntısına R ile S nin **Boole bileşke bağıntısı** denir.*

$(X, \leq)$ bir kısmi sıralı küme olsun. İlerde "Priestley birim bağıntısı" diyeceğimiz X den X e tanımlı $\triangle_{(X,\leq)} = \{(x, y) \in X \times X \mid y \leq x\}$ bağıntısını göz önüne alalım. Burada herhangi bir $x \in X$ için

$$\triangle_{(X,\leq)}(x) = \{y \in X \mid y \leq x\} = \downarrow x$$

ve herhangi bir $A \subseteq X$ için

$$\triangle_{(X,\leq)}(A) = \{y \in X \mid (\exists x \in A),\ y \leq x\}$$

olduğunu hemen görebiliriz. Eğer $(X, \tau, \leq)$ bir Priestley uzayı ise bu bağıntıyı $\triangle_{(X,\tau,\leq)}$ ile göstereceğiz.

Önerme 4.11. *$(X, \tau_X, \leq_X)$ ve $(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ birer Priestley uzayı ve R, $(X, \tau_X, \leq_X)$ den $(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ ye tanımlı bir Priestley bağıntısı olsun. Bu durumda*

(a) *$R \circ \triangle_{(X,\tau_X,\leq_X)} = R$ dir.*

(b) *$\triangle_{(Y,\tau_Y,\leq_Y)} \circ R = R$ dir.*

İspat

(a) $\forall x \in X$ için $\left(R \circ \triangle_{(X,\tau_X,\leq_X)}\right)(x) = R(x)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Herhangi bir $x \in X$ alalım.

Önce $\left(R \circ \triangle_{(X,\tau_X,\leq_X)}\right)(x) \subseteq R(x)$ olduğunu görelim. Bunun için keyfi $y \in \left(R \circ \triangle_{(X,\tau_X,\leq_X)}\right)(x)$ alalım. Bu durumda $y \in R\left(\triangle_{(X,\tau_X,\leq_X)}(x)\right)$ olur. Buradan $\exists x' \in \triangle_{(X,\tau_X,\leq_X)}(x)$ öyle ki $(x', y) \in R$ olur. $\triangle_{(X,\tau_X,\leq_X)}$ tanımı gereği $x' \leq_X x$ dir. Dolayısıyla Önteorem 4.3 uyarınca $R(x') \subseteq R(x)$ olur. Ayrıca $(x', y) \in R$ olduğundan $y \in R(x')$ dir. Buradan da $y \in R(x)$ elde edilir. Yani

$$\left(R \circ \triangle_{(X,\tau_X,\leq_X)}\right)(x) \subseteq R(x)$$

kapsaması vardır.

Şimdi de $R(x) \subseteq \left(R \circ \triangle_{(X,\tau_X,\leq_X)}\right)(x)$ kapsamasını görelim. $x \leq_X x$ olduğundan $x \in \triangle_{(X,\tau_X,\leq_X)}(x)$ dir. Buradan

$$R(x) \subseteq R\left(\triangle_{(X,\tau_X,\leq_X)}(x)\right) = \left(R \circ \triangle_{(X,\tau_X,\leq_X)}\right)(x)$$

olur. O halde $R(x) \subseteq \left(R \circ \triangle_{(X,\tau_X,\leq_X)}\right)(x)$ kapsaması da vardır.

(b) $\triangle_{(Y,\tau_Y,\leq_Y)} \circ R = R$ eşitliğini görmek için herhangi bir $x \in X$ alalım ve $\left(\triangle_{(Y,\tau_Y,\leq_Y)} \circ R\right)(x) = R(x)$ olduğunu gösterelim. Yine küme eşitliği tanımını kullanacağız.

Herhangi $y \in \left(\triangle_{(Y,\tau_Y,\leq_Y)} \circ R\right)(x)$ alalım. Bu durumda $y \in \triangle_{(Y,\tau_Y,\leq_Y)}(R(x))$ dir. O halde $\exists y' \in R(x)$ öyle ki $(y', y) \in \triangle_{(Y,\tau_Y,\leq_Y)}$ dir. $\triangle_{(Y,\tau_Y,\leq_Y)}$ tanımı gereği $y \leq_Y y'$ olur. R, $(X, \tau_X, \leq_X)$ den $(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ ye tanımlı bir Priestley bağıntısı olduğundan $R(x)$ bir aşağı kümedir. Dolayısıyla $y \in R(x)$ olur. Yani

$$\left(\triangle_{(Y,\tau_Y,\leq_Y)} \circ R\right)(x) \subseteq R(x)$$

kapsaması vardır. Şimdi de herhangi bir $y \in R(x)$ alalım. Bu durumda $\{y\} \subseteq R(x)$ dir. Aynı zamanda $y \leq_Y y$ olduğundan $y \in \triangle_{(Y,\tau_Y,\leq_Y)}(y)$ dir. Buradan

$$y \in \triangle_{(Y,\tau_Y,\leq_Y)}(y) \subseteq \triangle_{(Y,\tau_Y,\leq_Y)}(R(x)) = \left(\triangle_{(Y,\tau_Y,\leq_Y)} \circ R\right)(x)$$

olur. Yani $R(x) \subseteq \left(\triangle_{(Y,\tau_Y,\leq_Y)} \circ R\right)(x)$ kapsaması da vardır. □

Önerme 4.12. *$(X, \tau, \leq)$ bir Priestley uzayı olmak üzere $\triangle_{(X,\tau,\leq)}$ bağıntısı $(X, \tau, \leq)$ den $(X, \tau, \leq)$ ye tanımlı bir Priestley bağıntısıdır.*

İspat $\triangle_{(X,\tau,\leq)}$ nin X den X e tanımlı bir bağıntı olduğunu söylemiştik.

(i) Herhangi bir $x \in X$ alalım. $\triangle_{(X,\tau,\leq)}(x)$ in aşağı küme olduğu açıktır. $\triangle_{(X,\tau,\leq)}(x)$ in $\tau-$kapalı olduğunu görelim. Bunun için $\triangle_{(X,\tau,\leq)}(x)$ kümesinin kapanışına eşit olduğunu, yani; $\triangle_{(X,\tau,\leq)}(x) = \overline{\triangle_{(X,\tau,\leq)}(x)}$ olduğunu göstereceğiz. $\triangle_{(X,\tau,\leq)}(x) \subseteq \overline{\triangle_{(X,\tau,\leq)}(x)}$ olduğundan $\overline{\triangle_{(X,\tau,\leq)}(x)} \subseteq \triangle_{(X,\tau,\leq)}(x)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Farzedelim ki $\overline{\triangle_{(X,\tau,\leq)}(x)} \nsubseteq \triangle_{(X,\tau,\leq)}(x)$ olsun. O zaman $\exists y \in \overline{\triangle_{(X,\tau,\leq)}(x)}$ öyle ki $y \notin \triangle_{(X,\tau,\leq)}(x)$ dir. O halde $\triangle_{(X,\tau,\leq)}$ tanımı gereği $y \nleq x$ olur. $(X, \tau, \leq)$

bir Priestley uzayı olduğundan $\exists U \in \mathcal{CU}(X,\tau,\leq)$ öyle ki $y \in U$ ve $x \notin U$ dur. Aynı zamanda $U \in \tau$ ve $y \in \overline{\triangle_{(X,\tau,\leq)}(x)}$ olduğundan $U \cap \triangle_{(X,\tau,\leq)}(x) \neq \emptyset$ dir. O halde $\exists z \in X$ öyle ki $z \in U$ ve $z \in \triangle_{(X,\tau,\leq)}(x)$ dir. $\triangle_{(X,\tau,\leq)}$ tanımı gereği $z \leq x$ olur. U, yukarı küme, $z \in U$ ve $z \leq x$ olduğundan $x \in U$ olur. Fakat bu durum $x \notin U$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $\overline{\triangle_{(X,\tau,\leq)}(x)} \subseteq \triangle_{(X,\tau,\leq)}(x)$ kapsaması vardır.

(ii) Herhangi bir $V \in \mathcal{CU}(X,\tau,\leq)$ alalım.

$$\triangle^{-1}_{(X,\tau,\leq)}(V) = \{x \in X \mid (\exists y \in V),\ y \leq x\} = V \in \mathcal{CU}(X,\tau,\leq)$$

olur. □

Tanım 4.9. *$(X,\tau,\leq)$ bir Priestley uzayı olmak üzere, $(X,\tau,\leq)$ den $(X,\tau,\leq)$ e tanımlı*

$$\triangle_{(X,\tau,\leq)} = \{(x,y) \in X \times X \mid y \leq x\}$$

*şeklindeki Priestley bağıntısına **Priestley birim bağıntısı** denir.*

Tanım 4.10. *(X,τ) bir Stone uzayı olmak üzere, (X,τ) den (X,τ) e tanımlı*

$$\triangle_{(X,\tau)} = \{(x,x) \mid x \in X\}$$

*şeklindeki Stone bağıntısına **Boole birim bağıntısı** denir.*

Sonuç 4.1. *Objeleri Priestley uzayları, morfizmleri Priestley bağıntıları, birim morfizmleri Priestley birim bağıntıları ve bileşke işlemi Priestley bağıntılarının bileşkesi olan bir kategori vardır.*

İspat Önerme 4.11, Önerme 4.12 ve Önerme 4.10 un apaçık bir sonucudur. □

Bundan böyle Sonuç 4.1 de bahsi geçen kategoriyi $\mathbf{PREL}$ ile göstereceğiz ve bu kategoriye **Genişletilmiş Priestley Uzaylarının Kategorisi** diyeceğiz.

Sonuç 4.2. *Objeleri Stone uzayları, morfizmleri Boole bağıntıları, birim morfizmleri Boole birim bağıntıları ve bileşke işlemi Boole bağıntılarının bileşkesi olan bir kategori vardır.*

İspat Sonuç 4.1 e benzer olarak kolayca görülür. □

Bundan böyle Sonuç 4.2 de bahsi geçen kategoriyi $\mathbf{RStone}$ ile göstereceğiz ve bu kategoriye **Genişletilmiş Stone Uzaylarının Kategorisi** diyeceğiz.

Uyarı 4.5. *Her* $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y) \in \mathbf{Ob}(\mathbf{RStone})$ *için*

$$\hom_{\mathbf{RStone}}((X, \tau_X), (Y, \tau_Y)) = \hom_{\mathbf{PREL}}((X, \tau_X, =), (Y, \tau_Y, =))$$

olduğu açıktır. Dolayısıyla $\mathbf{RStone}$ *kategorisi* $\mathbf{PREL}$ *kategorisinin bir dolu altkategorisidir.*

4.3. Priestley Dualitesinin Bir Genişlemesi

Önteorem 4.5. $(L, \leq_L)$ *ve* $(M, \leq_M)$ *birer sınırlı dağılımlı örgü,* $Q \in \mathcal{PF}(M)$ *ve* u*,* $(L, \leq_L)$ *den* $(M, \leq_M)$ *ye tanımlı bir bitişme koruyan fonksiyon olsun. O halde* $L \backslash u^{-1}(Q)$ *kümesi* $(L, \leq_L)$ *nin bir idealidir.*

İspat $I = L \setminus u^{-1}(Q)$ diyelim. $I \subseteq L$ olduğu açıktır. Aynı zamanda Q, $(M, \leq_M)$ nin bir asal filtresi olduğundan

$$u(\perp_L) = \perp_M \notin Q \Rightarrow \perp_L \notin u^{-1}(Q) \Rightarrow u^{-1}(Q) \neq L \Rightarrow I \neq \emptyset$$

dir.

(I1) Herhangi $a, b \in L$ için $a \in I$ ve $b \leq_L a$ koşulu sağlansın. Bu durumda

$$a \notin u^{-1}(Q) \Rightarrow u(a) \notin Q$$

olur. Ayrıca $b \leq_L a$ olduğundan $b \vee a = a$ dir. u, $(L, \leq_L)$ den $(M, \leq_M)$ ye tanımlı bir bitişme koruyan fonksiyon olduğundan

$$u(a) = u(b \vee a) = u(b) \vee u(a) \Rightarrow u(b) \leq_M u(a)$$

dir. Dolayısıyla $u(b) \notin Q$ olur (aksi halde $u(b) \leq_M u(a)$ olduğundan $u(a) \in Q$ olur ki bu durum, $u(a) \notin Q$ olmasıyla çelişir). Böylece $u(b) \in I$ olur.

(I2) $a, b \in I$ olsun. Bu durumda

$$a \notin u^{-1}(Q) \text{ ve } b \notin u^{-1}(Q) \Rightarrow u(a) \notin Q \text{ ve } u(b) \notin Q$$

olur. Dolayısıyla $u(a) \vee u(b) \notin Q$ dir (aksi halde Q, $(M, \leq_M)$ nin bir asal filtresi olduğundan $u(a) \in Q$ veya $u(b) \in Q$ olur ki bu durum, $u(a) \notin Q$ ve $u(b) \notin Q$ olmasıyla çelişir). u, $(L, \leq_L)$ den $(M, \leq_M)$ ye tanımlı bir bitişme koruyan fonksiyon olduğundan

$$u(a \vee b) = u(a) \vee u(b) \notin Q \Rightarrow a \vee b \notin u^{-1}(Q) \Rightarrow a \vee b \in I$$

olur. □

Önteorem 4.6. *$(L, \leq_L)$ ve $(M, \leq_M)$ birer sınırlı dağılımlı örgü, $Q \in \mathcal{PF}(M)$ ve u, $(L, \leq_L)$ den $(M, \leq_M)$ ye tanımlı bir bitişme koruyan fonksiyon olsun. O halde $u^{-1}(Q)$ kümesi bir yukarı kümedir.*

İspat Herhangi $a, b \in L$ için $a \in u^{-1}(Q)$ ve $a \leq_L b$ koşulu sağlansın. Bu durumda $u(a) \in Q$ ve $a \vee b = b$ dir. u, $(L, \leq_L)$ den $(M, \leq_M)$ ye tanımlı bir bitişme koruyan fonksiyon olduğundan

$$u(b) = u(a \vee b) = u(a) \vee u(b) \Rightarrow u(a) \leq_M u(b)$$

olur. $u(a) \in Q$ ve $Q \in \mathcal{PF}(M)$ olduğundan $u(b) \in Q$ olur. Böylece $b \in u^{-1}(Q)$ dir. □

Önteorem 4.7. *$(L, \leq_L)$ ve $(M, \leq_M)$ birer sınırlı dağılımlı örgü, $Q \in \mathcal{PF}(M)$, u $(L, \leq_L)$ den $(M, \leq_M)$ ye tanımlı bir bitişme koruyan fonksiyon ve $T \subseteq L$ olsun. Eğer, verilen $t_1, t_2, ..., t_n \in T$ için $\exists a \in u^{-1}(Q)$ öyle ki $a \leq_L t_1 \wedge t_2 \wedge ... \wedge t_n$ oluyorsa, o zaman $\exists P \in \mathcal{PF}(L)$ öyle ki*

$$T \subseteq P \subseteq u^{-1}(Q)$$

olur.

İspat Önteorem 4.5 gereği $I = L \setminus u^{-1}(Q)$ kümesi $(L, \leq_L)$ nin bir idealidir. F_T, T nin ürettiği filtre olsun. $F_T \cap I = \emptyset$ olduğunu görelim. Diyelim ki $F_T \cap I \neq \emptyset$ olsun. O halde $\exists b \in L$ öyle ki $b \in F_T$ ve $b \in I$ dir. F_T tanımı gereği $\exists \{t_1, t_2, ..., t_n\} \subseteq T$ öyle ki

$$t_1 \wedge t_2 \wedge ... \wedge t_n \leq_L b$$

dir (bkz. Önerme 2.3). Varsayım gereği de $\exists a \in u^{-1}(Q)$ öyle ki

$$a \leq_L t_1 \wedge t_2 \wedge ... \wedge t_n$$

dir. Dolayısıyla $a \leq_L b$ olur. $a \in u^{-1}(Q)$, $a \leq_L b$ ve Önteorem 4.6 gereği $u^{-1}(Q)$ kümesi yukarı küme olduğundan $b \in u^{-1}(Q)$ olur. Fakat bu durum $b \in I$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $F_T \cap I = \emptyset$ dir. Önteorem 2.1 uyarınca $\exists P \in \mathcal{PF}(L)$ öyle ki $F_T \subseteq P$ ve $P \cap I = \emptyset$ dir. Buradan da

$$T \subseteq F_T \subseteq P \subseteq L \setminus I = u^{-1}(Q)$$

olur. □

Önerme 4.13. $\mathcal{PS}^*\Big((L, \leq_L) \xrightarrow{u} (M, \leq_M)\Big) = \mathcal{PS}(L) \xrightarrow{\mathcal{PS}^*(u)} \mathcal{PS}(M)$, $\mathcal{PS}^*(u) = \big\{(P, Q) \in \mathcal{PF}(L) \times \mathcal{PF}(M) \mid Q \subseteq (u^{op})^{-1}(P)\big\}$ *ile tanımlı* $\mathcal{PS}^*$*:*$\mathbf{JBDL^{op}} \longrightarrow \mathbf{PREL}$ *fonksiyonu bir funktordur.*

İspat Öncelikle $(L, \leq_L) \xrightarrow{u} (M, \leq_M)$ bir $\mathbf{JBDL^{op}}-$morfizm, yani $(M, \leq_M) \xrightarrow{u^{op}} (L, \leq_L)$ bir $\mathbf{JBDL}-$morfizm olmak üzere, $\mathcal{PS}(L) \xrightarrow{\mathcal{PS}^*(u)} \mathcal{PS}(M)$ nin bir $\mathbf{PREL}-$morfizm olduğunu gösterelim. $\mathcal{PS}^*(u)$ nin $\mathcal{PF}(L)$ den $\mathcal{PF}(M)$ ye tanımlı bir bağıntı olduğu açıktır. Herhangi bir $P \in \mathcal{PF}(L)$ alalım. Eğer $(u^{op})^{-1}(P) = \emptyset$ ise, $\mathcal{PS}^*(u) = \emptyset$ olacağından $\mathcal{PS}(L) \xrightarrow{\mathcal{PS}^*(u)} \mathcal{PS}(M)$ nin bir $\mathbf{PREL}-$morfizm olduğu açıktır. $(u^{op})^{-1}(P)$ $\neq \emptyset$ olsun. Herhangi bir $b \in (u^{op})^{-1}(P)$ alalım. $\{b\} \subseteq M$ ve $b \leq_M b$ olduğundan Önteorem 4.7 uyarınca $\exists Q \in \mathcal{PF}(M)$ öyle ki

$$\{b\} \subseteq Q \subseteq (u^{op})^{-1}(P)$$

dir. Buradan $Q \in \mathcal{PS}^*(u)(P)$ ve dolayısıyla $\mathcal{PS}^*(u)(P) \neq \emptyset$ olur.

(i) $\mathcal{PS}^*(u)(P)$ nin τ_M-kapalı ve bir aşağı küme olduğunu görelim.

Önce $\mathcal{PS}^*(u)(P)$ nin τ_M-kapalı olduğunu göstereceğiz. Bunun için $\mathcal{PS}^*(u)(P)$ nin kapanışına eşit olduğunu, yani $\mathcal{PS}^*(u)(P) = \overline{\mathcal{PS}^*(u)(P)}$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\mathcal{PS}^*(u)(P) \subseteq \overline{\mathcal{PS}^*(u)(P)}$ olduğundan $\overline{\mathcal{PS}^*(u)(P)} \subseteq \mathcal{PS}^*(u)(P)$ olduğunu göstereceğiz. Herhangi bir $Q \in \overline{\mathcal{PS}^*(u)(P)}$ için $Q \in \mathcal{PF}(M)$ olduğundan $Q \neq \emptyset$ olduğu açıktır. Herhangi bir $b \in Q$ alalım. Bu durumda $Q \in \varphi(b)$ olur. $\varphi(b)$ kümesi τ_M-açık ve $Q \in \overline{\mathcal{PS}^*(u)(P)}$ olduğundan

$$\varphi(b) \cap \mathcal{PS}^*(u)(P) \neq \emptyset$$

dir. Buradan $\exists R \in \mathcal{PF}(M)$ öyle ki

$$\begin{aligned} R \in \varphi(b) \text{ ve } R \in \mathcal{PS}^*(u)(P) &\Rightarrow b \in R \text{ ve } (P,R) \in \mathcal{PS}^*(u) \\ &\Rightarrow b \in R \text{ ve } R \subseteq (u^{op})^{-1}(P) \Rightarrow b \in (u^{op})^{-1}(P) \\ &\Rightarrow Q \subseteq (u^{op})^{-1}(P) \\ &\Rightarrow (P,Q) \in \mathcal{PS}^*(u) \Rightarrow Q \in \mathcal{PS}^*(u)(P) \end{aligned}$$

olur. Böylece $\overline{\mathcal{PS}^*(u)(P)} \subseteq \mathcal{PS}^*(u)(P)$ kapsaması elde edilir.

Şimdi de $\mathcal{PS}^*(u)(P)$ nin aşağı küme olduğunu görelim. Herhangi $Q, R \in \mathcal{PF}(M)$ için $Q \in \mathcal{PS}^*(u)(P)$ ve $R \subseteq Q$ olsun. Burada $(P,Q) \in \mathcal{PS}^*(u)$ ve dolayısıyla $Q \subseteq (u^{op})^{-1}(P)$ olacağından

$$\begin{aligned} R \subseteq Q \subseteq (u^{op})^{-1}(P) &\Rightarrow R \subseteq (u^{op})^{-1}(P) \\ &\Rightarrow (P,R) \in \mathcal{PS}^*(u) \Rightarrow R \in \mathcal{PS}^*(u)(P) \end{aligned}$$

olur.

(ii) Herhangi bir $V \in \mathcal{CU}(\mathcal{PS}(M))$ alalım. Önteorem 3.3 gereği $\exists b \in M$ öyle ki $V = \varphi(b)$ dir. $\mathcal{PS}^*(u)^{-1}(\varphi(b)) \in \mathcal{CU}(\mathcal{PS}(L))$ olduğunu göstereceğiz. $\varphi(u^{op}(b)) \in \mathcal{CU}(\mathcal{PS}(L))$ olduğundan $\mathcal{PS}^*(u)^{-1}(\varphi(b)) = \varphi(u^{op}(b))$ olduğunu göstermek yeterlidir. Önce $\mathcal{PS}^*(u)^{-1}(\varphi(b)) \subseteq \varphi(u^{op}(b))$ kapsamasını görelim. Herhangi bir $P \in \mathcal{PS}^*(u)^{-1}(\varphi(b))$ alalım. Bu durumda $\mathcal{PS}^*(u)(P) \subseteq \varphi(b)$ olur. Herhangi bir $Q \in \mathcal{PS}^*(u)(P)$ alırsak, $Q \in \varphi(b) \Rightarrow b \in Q$ olur. Aynı zamanda

$$Q \in \mathcal{PS}^*(u)(P) \Rightarrow (P,Q) \in \mathcal{PS}^*(u) \Rightarrow Q \subseteq (u^{op})^{-1}(P)$$

dir. Dolayısıyla $b \in Q$ olduğundan

$$b \in (u^{op})^{-1}(P) \Rightarrow u^{op}(b) \in P \Rightarrow P \in \varphi(u^{op}(b))$$

olur. Böylece $\mathcal{PS}^*(u)^{-1}(\varphi(b)) \subseteq \varphi(u^{op}(b))$ olur. Şimdi de

$$\varphi(u^{op}(b)) \subseteq \mathcal{PS}^*(u)^{-1}(\varphi(b))$$

kapsamasını görelim. Herhangi bir $P \in \varphi(u^{op}(b))$ alalım. Bu durumda $u^{op}(b) \in P$ $\Rightarrow b \in (u^{op})^{-1}(P)$ dir. $b \in M$ olduğundan $T = \{b\} \subseteq M$ dir. Aynı zamanda

$b \in (u^{op})^{-1}(P)$ ve $b \leq_M b$ olduğundan Önteorem 4.7 uyarınca $\exists Q \in \mathcal{PF}(M)$ öyle ki $T \subseteq Q \subseteq (u^{op})^{-1}(P)$ dir. $Q \in \varphi(b)$ olduğunu da göz önüne alırsak

$$\begin{aligned}
&(P,Q) \in \mathcal{PS}^*(u) \Rightarrow Q \in \mathcal{PS}^*(u)(P) \\
&\Rightarrow \mathcal{PS}^*(u)(P) \cap \varphi(b) \neq \emptyset \\
&\Rightarrow P \in \mathcal{PS}^*(u)^{-1}(\varphi(b))
\end{aligned}$$

olur. Böylece $\varphi(u^{op}(b)) \subseteq \mathcal{PS}^*(u)^{-1}(\varphi(b))$ kapsaması da vardır. O halde

$$\varphi(u^{op}(b)) = \mathcal{PS}^*(u)^{-1}(\varphi(b))$$

eşitliği vardır. Böylece $\mathcal{PS}(L) \overset{\mathcal{PS}^*(u)}{\longrightarrow} \mathcal{PS}(M)$ nin gerçekten bir $\mathbf{PREL}-$morfizmi olduğunu göstermiş olduk.

Şimdi $\mathcal{PS}^* : \mathbf{JBDL^{op}} \longrightarrow \mathbf{PREL}$ fonksiyonunun bileşke işlemini ve birim morfizmleri koruduğunu görelim.

bileşke işlemi: Herhangi $(L, \leq_L) \xrightarrow{u_1} (M, \leq_M)$ ve $(M, \leq_M) \xrightarrow{u_2} (N, \leq_N)$ $\mathbf{JBDL^{op}}-$morfizmlerini ve $P \in \mathcal{PF}(L)$ alalım.

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{PS}^*(u_2) \circ \mathcal{PS}^*(u_1))(P) = \mathcal{PS}^*(u_2)(\mathcal{PS}^*(u_1)(P)) \\
&= \{R \in \mathcal{PF}(N) \mid (\exists Q \in \mathcal{PS}^*(u_1)(P)),\ (Q,R) \in \mathcal{PS}^*(u_2)\} \\
&= \Big\{R \in \mathcal{PF}(N) \mid \Big(\exists Q \subseteq (u_1^{op})^{-1}(P)\Big),\ R \in \mathcal{PS}^*(u_2)(Q)\Big\} \\
&= \Big\{R \in \mathcal{PF}(N) \mid \Big(\exists Q \subseteq (u_1^{op})^{-1}(P)\Big),\ R \subseteq (u_2^{op})^{-1}(Q)\Big\} \\
&\subseteq \Big\{R \in \mathcal{PF}(N) \mid R \subseteq (u_2^{op})^{-1}\Big((u_1^{op})^{-1}(P)\Big)\Big\} \\
&= \Big\{R \in \mathcal{PF}(N) \mid R \subseteq \Big((u_2^{op})^{-1} \circ (u_1^{op})^{-1}\Big)(P)\Big\} \\
&= \Big\{R \in \mathcal{PF}(N) \mid R \subseteq (u_1^{op} \circ u_2^{op})^{-1}(P)\Big\} \\
&= \big\{R \in \mathcal{PF}(N) \mid R \subseteq (u_2 \circ^{op} u_1)^{-1}(P)\big\} \\
&= \mathcal{PS}^*(u_2 \circ^{op} u_1)(P)
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $(\mathcal{PS}^*(u_2) \circ \mathcal{PS}^*(u_1))(P) \subseteq \mathcal{PS}^*(u_2 \circ^{op} u_1)(P)$ dir. Şimdi de $\mathcal{PS}^*(u_2 \circ^{op} u_1)(P) \subseteq (\mathcal{PS}^*(u_2) \circ \mathcal{PS}^*(u_1))(P)$ olduğunu görelim. Bunun için herhangi bir $R \in \mathcal{PS}^*\left(u_2 \circ^{op} u_1\right)(P)$ alalım. Bu durumda $R \in \mathcal{PF}(N)$ ve

$$\begin{aligned} R &\subseteq \left(u_2 \circ^{op} u_1\right)^{-1}(P) = \left(u_1^{op} \circ u_2^{op}\right)^{-1}(P) \\ &= \left(\left(u_2^{op}\right)^{-1} \circ \left(u_1^{op}\right)^{-1}\right)(P) = \left(u_2^{op}\right)^{-1}\left(\left(u_1^{op}\right)^{-1}(P)\right) \\ &\Rightarrow R \subseteq \left(u_2^{op}\right)^{-1}\left(\left(u_1^{op}\right)^{-1}(P)\right) \Rightarrow u_2^{op}(R) \subseteq \left(u_1^{op}\right)^{-1}(P) \end{aligned}$$

olur. Burada $u_2^{op}(R) \subseteq M$ olduğu açıktır. $R \in \mathcal{PF}(N)$ olduğundan $R \neq \emptyset \Rightarrow u_2^{op}(R) \neq \emptyset$ olur. Herhangi bir $t \in u_2^{op}(R)$ alalım. $u_2^{op}(R) \subseteq \left(u_1^{op}\right)^{-1}(P)$ olduğundan $t \in \left(u_1^{op}\right)^{-1}(P)$ olur. Aynı zamanda $t \leq_M t$ olduğundan Önteorem 4.7 uyarınca $\exists Q \in \mathcal{PF}(M)$ öyle ki

$$u_2^{op}(R) \subseteq Q \subseteq \left(u_1^{op}\right)^{-1}(P)$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} & Q \subseteq \left(u_1^{op}\right)^{-1}(P) \text{ ve } R \subseteq \left(u_2^{op}\right)^{-1}(Q) \\ & \Rightarrow (P, Q) \in \mathcal{PS}^*(u_1) \text{ ve } (Q, R) \in \mathcal{PS}^*(u_2) \\ & \Rightarrow (P, R) \in \mathcal{PS}^*(u_2) \circ \mathcal{PS}^*(u_1) \\ & \Rightarrow R \in \left(\mathcal{PS}^*(u_2) \circ \mathcal{PS}^*(u_1)\right)(P) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\mathcal{PS}^*\left(u_2 \circ^{op} u_1\right)(P) \subseteq \left(\mathcal{PS}^*(u_2) \circ \mathcal{PS}^*(u_1)\right)(P)$ dir. Böylece

$$\mathcal{PS}^*\left(u_2 \circ^{op} u_1\right)(P) = \left(\mathcal{PS}^*(u_2) \circ \mathcal{PS}^*(u_1)\right)(P)$$

olur. Dolayısıyla $\mathcal{PS}^* : \mathbf{JBDL^{op}} \longrightarrow \mathbf{PREL}$ fonksiyonunun bileşke işlemini koruduğunu söyleyebiliriz.

birim morfizmler: Herhangi $(L, \leq_L) \in \mathbf{Ob}\left(\mathbf{JBDL^{op}}\right)$ için $(L, \leq_L) \overset{id_{(L,\leq_L)}}{\longrightarrow} (L, \leq_L)$ $\mathbf{JBDL^{op}}-$birim morfizm (yani; $(L, \leq_L) \overset{id^{op}_{(L,\leq_L)}}{\longrightarrow} (L, \leq_L)$, $id^{op}_{(L,\leq_L)}(x) = x$ $\mathbf{JBDL}-$birim morfizm) ve $P \in \mathcal{PF}(L)$ için

$$\begin{aligned} \mathcal{PS}^*\left(id_{(L,\leq_L)}\right)(P) &= \left\{P' \in \mathcal{PF}(L) \mid P' \subseteq \left(id^{op}_{(L,\leq_L)}\right)^{-1}(P)\right\} \\ &= \left\{P' \in \mathcal{PF}(L) \mid P' \subseteq P\right\} \\ &= \triangle_{\mathcal{PS}(L)}(P) \end{aligned}$$

olur. $\square$

Önerme 4.14. *$\mathcal{CU}^*\left((X,\tau_X,\leq_X)\xrightarrow{R}(Y,\tau_Y,\leq_Y)\right)=(\mathcal{CU}(X,\tau_X,\leq_X),\subseteq)\xrightarrow{\mathcal{CU}^*(R)}$ $(\mathcal{CU}(Y,\tau_Y,\leq_Y),\subseteq)$ ile tanımlı $\mathcal{CU}^*:\mathbf{PREL}\longrightarrow\mathbf{JBDL^{op}}$ fonksiyonu bir funktordur. Burada $\mathbf{JBDL^{op}}-$morfizm $(\mathcal{CU}(X,\tau_X,\leq_X),\subseteq)\xrightarrow{\mathcal{CU}^*(R)}(\mathcal{CU}(Y,\tau_Y,\leq_Y),\subseteq)$,*

$$\mathcal{CU}^*(R)^{op}(V)=R^{-1}(V)$$

eşitliği ile tanımlanan $\mathbf{JBDL}$-morfizm $(\mathcal{CU}(Y,\tau_Y,\leq_Y),\subseteq)\xrightarrow{\mathcal{CU}^*(R)^{op}}(\mathcal{CU}(X,\tau_X,\leq_X),\subseteq)$ nin karşıtıdır.

İspat İlk olarak $(X,\tau_X,\leq_X)\xrightarrow{R}(Y,\tau_Y,\leq_Y)$ bir $\mathbf{PREL}-$morfizm olmak üzere $(\mathcal{CU}(X,\tau_X,\leq_X),\subseteq)\xrightarrow{\mathcal{CU}^*(R)}(\mathcal{CU}(Y,\tau_Y,\leq_Y),\subseteq)$ nin bir $\mathbf{JBDL^{op}}-$morfizm olduğunu gösterelim. Bunun için $(\mathcal{CU}(Y,\tau_Y,\leq_Y),\subseteq)\xrightarrow{\mathcal{CU}^*(R)^{op}}(\mathcal{CU}(X,\tau_X,\leq_X),\subseteq)$ nin bir $\mathbf{JBDL}$-morfizm olduğunu göstereceğiz. $\mathcal{CU}^*(R)^{op}$ nin $\mathcal{CU}(Y,\tau_Y,\leq_Y)$ den $\mathcal{CU}(X,\tau_X,\leq_X)$ ye tanımlı bir fonksiyon olduğu açıktır.

(J1) $\mathcal{CU}^*(R)^{op}(\emptyset)=R^{-1}(\emptyset)=\emptyset$ dir.

(J2) $U,V\in\mathcal{CU}(Y,\tau_Y,\leq_Y)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\mathcal{CU}^*(R)^{op}(U\cup V)&=R^{-1}(U\cup V)\\&=\{x\in X\mid R(x)\cap(U\cup V)\neq\emptyset\}\\&=\{x\in X\mid (R(x)\cap U)\cup(R(x)\cap V)\neq\emptyset\}\\&=\{x\in X\mid R(x)\cap U\neq\emptyset \text{ veya } R(x)\cap V\neq\emptyset\}\\&=\{x\in X\mid R(x)\cap U\neq\emptyset\}\cup\{x\in X\mid R(x)\cap V\neq\emptyset\}\\&=R^{-1}(U)\cup R^{-1}(V)\\&=\mathcal{CU}^*(R)^{op}(U)\cup\mathcal{CU}^*(R)^{op}(V)\end{aligned}$$

olur. Böylece $\mathcal{CU}^*(R)^{op}$ fonksiyonu $(\mathcal{CU}(Y,\tau_Y,\leq_Y),\subseteq)$ den $(\mathcal{CU}(X,\tau_X,\leq_X),\subseteq)$ ye tanımlı bir bitişme koruyan fonksiyon ve dolayısıyla

$$(\mathcal{CU}(Y,\tau_Y,\leq_Y),\subseteq)\xrightarrow{\mathcal{CU}^*(R)^{op}}(\mathcal{CU}(X,\tau_X,\leq_X),\subseteq)$$

bir $\mathbf{JBDL}-$morfizm olur.

Son olarak $\mathcal{CU}^*$ nun bileşke işlemini ve birim morfizmleri koruduğunu görelim.

bileşke işlemi: $(X,\tau_X,\leq_X) \xrightarrow{R} (Y,\tau_Y,\leq_Y)$ ve $(Y,\tau_Y,\leq_Y) \xrightarrow{S} (Z,\tau_Z,\leq_Z)$ morfizmleri birer $\mathbf{PREL}-$morfizm olsun. $\mathcal{CU}^*(S\circ R) = \mathcal{CU}^*(S) \circ^{op} \mathcal{CU}^*(R)$ olduğunu göstermek için $\mathcal{CU}^*(S\circ R)^{op} = \mathcal{CU}^*(R)^{op} \circ \mathcal{CU}^*(S)^{op}$ olduğunu göstereceğiz. Her $V \in \mathcal{CU}(Z,\tau_Z,\leq_Z)$ için

$$\begin{aligned}
\mathcal{CU}^*(S\circ R)^{op}(V) &= (S\circ R)^{-1}(V) \\
&= \left(R^{-1}\circ S^{-1}\right)(V) \\
&= R^{-1}\left(S^{-1}(V)\right) \\
&= \mathcal{CU}^*(R)^{op}\left(S^{-1}(V)\right) \\
&= \mathcal{CU}^*(R)^{op}\left(\mathcal{CU}^*(S)^{op}(V)\right) \\
&= \left(\mathcal{CU}^*(R)^{op}\circ \mathcal{CU}^*(R)^{op}\right)(V)
\end{aligned}$$

dir. Böylece $\mathcal{CU}^*$ bileşkeyi korur.

birim morfizmler: Keyfi $(X,\tau,\leq) \in \mathbf{Ob}(\mathbf{PREL})$ ve $\mathbf{PREL}-$birim morfizm

$$(X,\tau,\leq) \xrightarrow{\triangle_{(X,\tau,\leq)}} (X,\tau,\leq),\ \triangle_{(X,\tau,\leq)} = \{(x,y)\in X\times X \mid y\leq x\}$$

Priestley bağıntısını göz önüne alalım. Keyfi $V\in \mathcal{CU}(X,\tau,\leq)$ için

$$\mathcal{CU}^*\left(\triangle_{(X,\tau,\leq)}\right)^{op}(V) = \triangle^{-1}_{(X,\tau,\leq)}(V) = V = id_{(\mathcal{CU}(X,\tau,\leq),\subseteq)}(V)$$

olur. Dolayısıyla $\mathcal{CU}^*$ birim morfizmleri korur. $\square$

Önerme 4.15. *$(X,\tau_X,\leq_X)$ ve $(Y,\tau_Y,\leq_Y)$ birer Priestley uzayı ve $f: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer f, $\tau_X - \tau_Y$ sürekli ve sıra-korur fonksiyon ise, o zaman*

$$R_f = \{(x,y)\in X\times Y \mid y\leq_Y f(x)\}$$

şeklinde tanımlı bağıntı, $(X,\tau_X,\leq_X)$ den $(Y,\tau_Y,\leq_Y)$ ye tanımlı bir Priestley bağıntısıdır.

İspat f, $\tau_X - \tau_Y$ sürekli ve sıra-korur fonksiyon olsun. R_f nin X den Y ye tanımlı bir bağıntı olduğu açıktır.

(i) Herhangi bir $x\in X$ alalım. $R_f(x) = \downarrow f(x)$ olduğundan, bir aşağı küme olduğu açıktır. $R_f(x)$ in τ_Y-kapalı olduğunu görelim. Bunun için $R_f(x)$ in kapanışına eşit olduğunu, yani $R_f(x) = \overline{R_f(x)}$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için

$\overline{R_f(x)} \subseteq R_f(x)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Farzedelim ki $\overline{R_f(x)} \nsubseteq R_f(x)$ olsun. Bu durumda $\exists y \in \overline{R_f(x)}$ öyle ki $y \notin R_f(x)$ dir. Dolayısıyla $y \nleq_Y f(x)$ olur. $(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ bir Priestley uzayı olduğundan $\exists V \in \mathcal{CU}(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ öyle ki $y \in V$ ve $f(x) \notin V$ dir. Aynı zamanda $y \in \overline{R_f(x)}$ olduğundan $V \cap R_f(x) \neq \emptyset$ olur. O halde $\exists y' \in Y$ öyle ki $y' \in V$ ve $y' \in R_f(x)$ dir. R_f tanımı gereği $y' \leq_Y f(x)$ olur. Aynı zamanda $V \in \mathcal{CU}(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ olduğundan $f(x) \in V$ olur. Fakat bu durum $f(x) \notin V$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $\overline{R_f(x)} \subseteq R_f(x)$ kapsaması vardır.

(ii) Keyfi $V \in \mathcal{CU}(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ alalım ve $R_f^{-1}(V) \in \mathcal{CU}(X, \tau_X, \leq_X)$ olduğunu görelim. f, $\tau_X - \tau_Y$ sürekli olduğundan $f^{-1}(V)$ kümesi τ_X-kaçıktır. Ayrıca herhangi $x, x' \in X$ için $x \in f^{-1}(V)$ ve $x \leq_X x'$ koşulu sağlandığında, $f(x) \in V$ ve f, sıra-korur fonksiyon olduğundan $f(x) \leq_Y f(x')$ olur. Buradan $f(x') \in V$ ve dolayısıyla $x' \in f^{-1}(V)$ olur. Yani $f^{-1}(V)$ yukarı kümedir. Böylece $f^{-1}(V) \in \mathcal{CU}(X, \tau_X, \leq_X)$ olduğunu söyleyebiliriz. Dolayısıyla $R_f^{-1}(V) = f^{-1}(V)$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Önce $R_f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(V)$ kapsamasını görelim. Herhangi bir $x \in R_f^{-1}(V)$ alalım. Bu durumda $R_f(x) \cap V \neq \emptyset$ dir. O halde $\exists y \in Y$ öyle ki $y \in R_f(x)$ ve $y \in V$ dir. Buradan $y \leq_Y f(x)$ ve $V \in \mathcal{CU}(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ olduğundan

$$f(x) \in V \Rightarrow x \in f^{-1}(V)$$

olur. Böylece $R_f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(V)$ kapsaması vardır.

Şimdi de $f^{-1}(V) \subseteq R_f^{-1}(V)$ olduğunu görelim. Farzedelim ki $f^{-1}(V) \nsubseteq R_f^{-1}(V)$ olsun. O zaman $\exists x \in f^{-1}(V)$ öyle ki

$$x \notin R_f^{-1}(V) \Rightarrow R_f(x) \cap V = \emptyset$$

dir. Burada $f(x) \leq_Y f(x)$ olduğundan $f(x) \in R_f(x)$ dir. Dolayısıyla

$$f(x) \notin V \Rightarrow x \notin f^{-1}(V)$$

dir. Fakat bu durum $x \in f^{-1}(V)$ olmasıyla çelişir. O halde $f^{-1}(V) \subseteq R_f^{-1}(V)$ kapsaması da vardır. $\square$

$(X,\tau,\leq)$ bir Priestley uzayı olsun. Önerme 4.2 de olduğu gibi tanımlı $(X,\tau,\leq) \overset{\eta_{(X,\tau,\leq)}}{\longrightarrow}$ $\mathcal{PS}\left(\mathcal{CU}\left(X,\tau,\leq\right)\right), \eta_{(X,\tau,\leq)}\left(x\right) = \left\{U \in \mathcal{CU}\left(X,\tau,\leq\right) \mid x \in U\right\}$ $\mathbf{PRS}-$izomorfizmini hatırlayalım (bkz. Önerme 4.4). Önerme 4.15 gereği

$$R_{\eta_{(X,\tau,\leq)}} = \left\{(x,P) \in X \times \mathcal{PF}\left(\mathcal{CU}\left(X,\tau,\leq\right)\right) \mid P \subseteq \eta_{(X,\tau,\leq)}\left(x\right)\right\} \tag{4.5}$$

$(X,\tau,\leq)$ den $\mathcal{PS}\left(\mathcal{CU}\left(X,\tau,\leq\right)\right)$ ye ve

$$R_{\eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)}} = \left\{(P,x) \in \mathcal{PF}\left(\mathcal{CU}\left(X,\tau,\leq\right)\right) \times X \mid x \leq \eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)}\left(P\right)\right\}$$

$\mathcal{PS}\left(\mathcal{CU}\left(X,\tau,\leq\right)\right)$ den $(X,\tau,\leq)$ e tanımlı birer Priestley bağıntısıdır. Dolayısıyla

$$(X,\tau,\leq) \overset{R_{\eta_{(X,\tau,\leq)}}}{\longrightarrow} \mathcal{PS}\left(\mathcal{CU}\left(X,\tau,\leq\right)\right)$$

ve

$$\mathcal{PS}\left(\mathcal{CU}\left(X,\tau,\leq\right)\right) \overset{R_{\eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)}}}{\longrightarrow} (X,\tau,\leq)$$

birer $\mathbf{PREL}-$morfizmdir.

Önerme 4.16. *$\mathbf{PREL}-$morfizm $(X,\tau,\leq) \overset{R_{\eta_{(X,\tau,\leq)}}}{\longrightarrow} \mathcal{PS}\left(\mathcal{CU}\left(X,\tau,\leq\right)\right)$, bir $\mathbf{PREL}-$izomorfizmdir.*

İspat Yukarıda $(X,\tau,\leq) \overset{R_{\eta_{(X,\tau,\leq)}}}{\longrightarrow} \mathcal{PS}\left(\mathcal{CU}\left(X,\tau,\leq\right)\right)$ ve $\mathcal{PS}\left(\mathcal{CU}\left(X,\tau,\leq\right)\right) \overset{R_{\eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)}}}{\longrightarrow}$ $(X,\tau,\leq)$ nin birer $\mathbf{PREL}-$morfizm olduğunu belirttik. Dolayısıyla $R_{\eta_{(X,\tau,\leq)}} \circ R_{\eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)}} = \triangle_{\mathcal{PS}(\mathcal{CU}(X,\tau,\leq))}$ ve $R_{\eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)}} \circ R_{\eta_{(X,\tau,\leq)}} = \triangle_{(X,\tau,\leq)}$ olduğunu göstermek yeterlidir. Önce $R_{\eta_{(X,\tau,\leq)}} \circ R_{\eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)}} = \triangle_{\mathcal{PS}(\mathcal{CU}(X,\tau,\leq))}$ eşitliğini gösterelim. Bu doğrultuda her $P \in \mathcal{PF}\left(\mathcal{CU}\left(X,\tau,\leq\right)\right)$ için $\left(R_{\eta_{(X,\tau,\leq)}} \circ R_{\eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)}}\right)(P) = \triangle_{\mathcal{PS}(\mathcal{CU}(X,\tau,\leq))}(P)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Herhangi bir $P \in \mathcal{PF}\left(\mathcal{CU}\left(X,\tau,\leq\right)\right)$ için

$$\begin{aligned}
&\left(R_{\eta_{(X,\tau,\leq)}} \circ R_{\eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)}}\right)(P) = R_{\eta_{(X,\tau,\leq)}}\left(R_{\eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)}}(P)\right) \\
&= \left\{P' \in \mathcal{PF}\left(\mathcal{CU}\left(X,\tau,\leq\right)\right) \mid \left(\exists x \in R_{\eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)}}(P)\right),\ (x,P') \in R_{\eta_{(X,\tau,\leq)}}\right\} \\
&= \left\{P' \in \mathcal{PF}\left(\mathcal{CU}\left(X,\tau,\leq\right)\right) \mid (\exists x \in X),\ x \leq \eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)}(P),\ P' \subseteq \eta_{(X,\tau,\leq)}(x)\right\} \\
&= \left\{P' \in \mathcal{PF}\left(\mathcal{CU}\left(X,\tau,\leq\right)\right) \mid (\exists x \in X),\ \eta_{(X,\tau,\leq)}(x) \subseteq P,\ P' \subseteq \eta_{(X,\tau,\leq)}(x)\right\} \\
&= \left\{P' \in \mathcal{PF}\left(\mathcal{CU}\left(X,\tau,\leq\right)\right) \mid (\exists x \in X),\ P' \subseteq \eta_{(X,\tau,\leq)}(x) \subseteq P\right\} \\
&= \left\{P' \in \mathcal{PF}\left(\mathcal{CU}\left(X,\tau,\leq\right)\right) \mid P' \subseteq P\right\} \qquad (4.6) \\
&= \triangle_{\mathcal{PS}(\mathcal{CU}(X,\tau,\leq))}(P)
\end{aligned}$$

olduğundan $R_{\eta_{(X,\tau,\leq)}} \circ R_{\eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)}} = \triangle_{\mathcal{PS}(\mathcal{CU}(X,\tau,\leq))}$ eşitliği doğrulanır. Burada (4.6) eşitliği, $\eta_{(X,\tau,\leq)}$ nın örten olmasının bir sonucudur. Çünkü her $P' \in \mathcal{PF}\left(\mathcal{CU}\left(X,\tau,\leq\right)\right)$ ve $P' \subseteq P$ için Önerme 4.4 gereği $P' = \eta_{(X,\tau,\leq)}\left(x\right)$ olacak şekilde bir $x \in X$ bulunabilir. Şimdi de $R_{\eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)}} \circ R_{\eta_{(X,\tau,\leq)}} = \triangle_{(X,\tau,\leq)}$ eşitliğini görelim. Herhangi bir $x \in X$ için

$$
\begin{aligned}
&\left(R_{\eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)}} \circ R_{\eta_{(X,\tau,\leq)}}\right)(x) = R_{\eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)}}\left(R_{\eta_{(X,\tau,\leq)}}\left(x\right)\right) \\
&= \left\{x' \in X \mid \left(\exists P \in R_{\eta_{(X,\tau,\leq)}}\left(x\right)\right),\ x' \in R_{\eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)}}\left(P\right)\right\} \\
&= \left\{x' \in X \mid \left(\exists P \in \mathcal{PF}\left(\mathcal{CU}\left(X,\tau,\leq\right)\right)\right),\ P \subseteq \eta_{(X,\tau,\leq)}\left(x\right),\ x' \leq \eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)}\left(P\right)\right\} \\
&= \left\{x' \in X \mid \left(\exists P \in \mathcal{PF}\left(\mathcal{CU}\left(X,\tau,\leq\right)\right)\right),\ \eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)}\left(P\right) \leq x,\ x' \leq \eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)}\left(P\right)\right\} \\
&= \left\{x' \in X \mid \left(\exists P \in \mathcal{PF}\left(\mathcal{CU}\left(X,\tau,\leq\right)\right)\right),\ x' \leq \eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)}\left(P\right) \leq x\right\} \\
&= \left\{x' \in X \mid x' \leq x\right\} \qquad (4.7) \\
&= \triangle_{(X,\tau,\leq)}\left(x\right)
\end{aligned}
$$

olduğundan $R_{\eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)}} \circ R_{\eta_{(X,\tau,\leq)}} = \triangle_{(X,\tau,\leq)}$ eşitliği de vardır. Burada da (4.7) eşitliği yine Önerme 4.4 ün bir sonucudur. $\eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)}$ örten olduğundan $x' \leq x$ koşulunu sağlayan her $x' \in X$ için, $x' = \eta^{-1}_{(X,\tau,\leq)}\left(P\right)$ olacak şekilde en az bir $P \in \mathcal{PF}\left(\mathcal{CU}\left(X,\tau,\leq\right)\right)$ vardır. $\square$

Bu bölümde; $\mathcal{PS}^*$nin $\mathbf{JBDL^{op}}$ den $\mathbf{PREL}$ e tanımlı ve $\mathcal{CU}^*$ nin $\mathbf{PREL}$ den $\mathbf{JBDL^{op}}$ ye tanımlı birer funktor olduğunu gösterdik. O halde $\mathcal{PS}^* \circ \mathcal{CU}^* : \mathbf{PREL} \longrightarrow \mathbf{PREL}$ bir funktordur. Elbette ki bu funktor herhangi bir $\mathbf{PREL}-$morfizm $(X,\tau_X,\leq_X) \xrightarrow{R} (Y,\tau_Y,\leq_Y)$ ye $\mathbf{PREL}$-morfizm $\mathcal{PS}\left(\mathcal{CU}\left(X,\tau_X,\leq_X\right)\right) \xrightarrow{\mathcal{PS}^*(\mathcal{CU}^*(R))} \mathcal{PS}\left(\mathcal{CU}\left(Y,\tau_Y,\leq_Y\right)\right)$ yi karşılık getirir. Şimdi; $\mathcal{PS}^*\left(\mathcal{CU}^*\left(R\right)\right)$ nin herhangi bir $P \in \mathcal{PF}\left(\mathcal{CU}\left(X,\tau_X,\leq_X\right)\right)$ ye nasıl bir dönüşüm uyguladığını açıkça görelim.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{PS}^*\left(\mathcal{CU}^*\left(R\right)\right)\left(P\right) &= \left\{Q \in \mathcal{PF}\left(\mathcal{CU}\left(Y,\tau_Y,\leq_Y\right)\right) \mid Q \subseteq \left(\mathcal{CU}^*\left(R\right)^{op}\right)^{-1}\left(P\right)\right\} \\
&= \left\{Q \in \mathcal{PF}\left(\mathcal{CU}\left(Y,\tau_Y,\leq_Y\right)\right) \mid \left(\forall V \in Q\right),\ \mathcal{CU}^*\left(R\right)^{op}\left(V\right) \in P\right\} \\
&= \left\{Q \in \mathcal{PF}\left(\mathcal{CU}\left(Y,\tau_Y,\leq_Y\right)\right) \mid \left(\forall V \in Q\right),\ R^{-1}\left(V\right) \in P\right\} \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

olur. Bu eşitlik aşağıda Önerme 4.17 yi kantılamamıza yardımcı olacaktır.

Önerme 4.17. $\eta^* = \left((X,\tau,\leq) \xrightarrow{R_{\eta_{(X,\tau,\leq)}}} \mathcal{PS}\left(\mathcal{CU}\left(X,\tau,\leq\right)\right)\right)_{(X,\tau,\leq)\in\mathbf{Ob}(\mathbf{PREL})}$ *ailesi* $id_{\mathbf{PREL}}$ *den* $\mathcal{PS}^* \circ \mathcal{CU}^*$ *ya tanımlı bir doğal dönüşümdür.*

İspat η^* nın bir doğal dönüşüm olduğunu görmek için herhangi bir $\mathbf{PREL}-$morfizm $(X, \tau_X, \leq_X) \xrightarrow{R} (Y, \tau_Y, \leq_Y)$ için

$$\begin{array}{ccc} (X, \tau_X, \leq_X) & \xrightarrow{R_{\eta_{(X,\tau_X,\leq_X)}}} & \mathcal{PS}\left(\mathcal{CU}\left(X, \tau_X, \leq_X\right)\right) \\ R\downarrow & & \downarrow \mathcal{PS}^*(\mathcal{CU}^*(R)) \\ (Y, \tau_Y, \leq_Y) & \xrightarrow[R_{\eta_{(Y,\tau_Y,\leq_Y)}}]{} & \mathcal{PS}\left(\mathcal{CU}\left(Y, \tau_Y, \leq_Y\right)\right) \end{array} \tag{4.9}$$

dikdörtgeninin değişmeli olduğunu görelim. Bunun için herhangi bir $x \in X$ alalım ve

$$\left(\mathcal{PS}^*\left(\mathcal{CU}^*\left(R\right)\right) \circ R_{\eta_{(X,\tau_X,\leq_X)}}\right)(x) = \left(R_{\eta_{(Y,\tau_Y,\leq_Y)}} \circ R\right)(x) \tag{4.10}$$

olduğunu gösterelim. Herhangi bir $Q \in \left(\mathcal{PS}^*\left(\mathcal{CU}^*\left(R\right)\right) \circ R_{\eta_{(X,\tau_X,\leq_X)}}\right)(x)$ alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} & Q \in \mathcal{PS}^*\left(\mathcal{CU}^*\left(R\right)\right)\left(R_{\eta_{(X,\tau_X,\leq_X)}}(x)\right) \\ & \quad \Rightarrow \left(\exists P \in R_{\eta_{(X,\tau_X,\leq_X)}}(x)\right), (P, Q) \in \mathcal{PS}^*\left(\mathcal{CU}^*\left(R\right)\right) \end{aligned}$$

olur. Burada $P \in R_{\eta_{(X,\tau_X,\leq_X)}}(x)$ olduğundan $(x, P) \in R_{\eta_{(X,\tau_X,\leq_X)}}$ ve dolayısıyla (4.5) eşitliği gereği $P \subseteq \eta_{(X,\tau_X,\leq_X)}(x)$ olur. Aynı zamanda $(P, Q) \in \mathcal{PS}^*\left(\mathcal{CU}^*\left(R\right)\right)$ olduğundan $Q \in \mathcal{PS}^*\left(\mathcal{CU}^*\left(R\right)\right)(P)$ ve dolayısıyla (4.8) eşitliği gereği $Q \in \mathcal{PF}\left(\mathcal{CU}\left(Y, \tau_Y, \leq_Y\right)\right)$ $\Rightarrow Q \subseteq \mathcal{CU}\left(Y, \tau_Y, \leq_Y\right)$ ve yine aynı eşitlik gereği $\forall V \in Q$ için $R^{-1}(V) \in P$ dir. O zaman $\forall V \in Q$ için $V \in \mathcal{CU}\left(Y, \tau_Y, \leq_Y\right)$ dir. Yine $P \subseteq \eta_{(X,\tau_X,\leq_X)}(x)$ olduğundan

$$\begin{aligned} & (\forall V \in Q), R^{-1}(V) \in \eta_{(X,\tau_X,\leq_X)}(x) \\ & \Rightarrow (\forall V \in Q), x \in R^{-1}(V) \Rightarrow (\forall V \in Q), R(x) \cap V \neq \emptyset \end{aligned}$$

olur. Şimdi $\mathcal{U} = Q \cup \{R(x)\}$ ailesini tanımlayalım ve bu ailenin sonlu arakesit özelliğine sahip olduğunu görelim. R, $(X, \tau_X, \leq_X)$ den $(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ ye tanımlı bir Priestley bağıntısı olduğundan $R(x)$ kümesi τ_Y-kapalı ve $\forall V \in Q$ için $V \in \mathcal{CU}\left(Y, \tau_Y, \leq_Y\right)$ olduğundan, $\mathcal{U}$ nun her elemanının τ_Y-kapalı olduğu açıktır. Önerme 2.2 gereği her $V_1, V_2, ..., V_n \in Q$ için $\bigcap_{i=1}^{n} V_i \in Q$ dir. Ayrıca Q, $\left(\mathcal{CU}\left(Y, \tau_Y, \leq_Y\right), \subseteq\right)$ nin bir asal filtresi olduğundan $\emptyset \notin Q$ dir. Aksi halde $\forall V \in \mathcal{CU}\left(Y, \tau_Y, \leq_Y\right)$ için $\emptyset \subseteq V$ ve dolayısıyla $(\mathbf{F1})$ koşulu gereği $V \in Q \Rightarrow \mathcal{CU}\left(Y, \tau_Y, \leq_Y\right) \subseteq Q$ olur ki, bu durum Q nun $\mathcal{CU}\left(Y, \tau_Y, \leq_Y\right)$ nin bir öz altkümesi olmasıyla çelişir. Aynı zamanda $\bigcap_{i=1}^{n} V_i \in Q$ olduğundan $\bigcap_{i=1}^{n} V_i \neq \emptyset$ dir. Yine

$\forall V \in Q$ için $R(x) \cap V \neq \emptyset$ olduğundan, $\mathcal{U}$ nun her sonlu alt ailesinin arakesitinin boştan farklı olduğunu, dolayısıyla $\mathcal{U}$ nun sonlu arakesit özelliğine sahip olduğunu söyleyebiliriz. Burada $(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ bir Priestley uzayı olduğundan (Y, τ_Y) topolojik uzayı kompakttır. Teorem 3.1 gereği

$$\bigcap \mathcal{U} \neq \emptyset \Rightarrow (\exists y \in Y), y \in R(x) \text{ ve } (\forall V \in Q), y \in V$$

olur. Burada $\forall V \in Q$ için $V \in \mathcal{CU}(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ ve $y \in V$ olduğundan $V \in \eta_{(Y,\tau_Y,\leq_Y)}(y)$ olur. Dolayısıyla

$$Q \subseteq \eta_{(Y,\tau_Y,\leq_Y)}(y) \Rightarrow Q \in R_{\eta_{(Y,\tau_Y,\leq_Y)}}(y)$$

dir. $y \in R(x) \Rightarrow \{y\} \subseteq R(x)$ olduğundan Uyarı 2.1 gereği

$$\begin{aligned} & R_{\eta_{(Y,\tau_Y,\leq_Y)}}(y) \subseteq R_{\eta_{(Y,\tau_Y,\leq_Y)}}(R(x)) \\ & \Rightarrow Q \in R_{\eta_{(Y,\tau_Y,\leq_Y)}}(R(x)) = \left(R_{\eta_{(Y,\tau_Y,\leq_Y)}} \circ R\right)(x) \end{aligned}$$

olur. O halde $\left(\mathcal{PS}^*(\mathcal{CU}^*(R)) \circ R_{\eta_{(X,\tau_X,\leq_X)}}\right)(x) \subseteq \left(R_{\eta_{(Y,\tau_Y,\leq_Y)}} \circ R\right)(x)$ kapsaması vardır. Ters kapsamayı görmek için, herhangi bir $Q \in \left(R_{\eta_{(Y,\tau_Y,\leq_Y)}} \circ R\right)(x)$ alalım. Bu durumda da

$$\begin{aligned} & Q \in R_{\eta_{(Y,\tau_Y,\leq_Y)}}(R(x)) \Rightarrow (\exists y \in R(x)),\ Q \in R_{\eta_{(Y,\tau_Y,\leq_Y)}}(y) \\ & \Rightarrow Q \in \mathcal{PF}(\mathcal{CU}(Y, \tau_Y, \leq_Y)) \text{ ve } Q \subseteq \eta_{(Y,\tau_Y,\leq_Y)}(y) \\ & \Rightarrow (\forall V \in Q),\ V \in \eta_{(Y,\tau_Y,\leq_Y)}(y) \Rightarrow (\forall V \in Q),\ y \in V \\ & \Rightarrow (\forall V \in Q),\ R(x) \cap V \neq \emptyset \Rightarrow (\forall V \in Q),\ x \in R^{-1}(V) \\ & \Rightarrow (\forall V \in Q),\ R^{-1}(V) \in \eta_{(X,\tau_X,\leq_X)}(x) \\ & \Rightarrow Q \in \mathcal{PS}^*(\mathcal{CU}^*(R))\left(\eta_{(X,\tau_X,\leq_X)}(x)\right) \end{aligned} \tag{4.11}$$

olur. Buradaki (4.11) gerektirmesi (4.8) eşitliğinden görülür. Burada $\eta_{(X,\tau_X,\leq_X)}(x) \in R_{\eta_{(X,\tau_X,\leq_X)}}(x)$ olduğundan

$$\left\{\eta_{(X,\tau_X,\leq_X)}(x)\right\} \subseteq R_{\eta_{(X,\tau_X,\leq_X)}}(x)$$

olur. Uyari 2.1 den $\mathcal{PS}^*(\mathcal{CU}^*(R))\left(\eta_{(X,\tau_X,\leq_X)}(x)\right) \subseteq \mathcal{PS}^*(\mathcal{CU}^*(R))\left(R_{\eta_{(X,\tau_X,\leq_X)}}(x)\right)$ elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} & Q \in \mathcal{PS}^*(\mathcal{CU}^*(R))\left(R_{\eta_{(X,\tau_X,\leq_X)}}(x)\right) = \left(\mathcal{PS}^*(\mathcal{CU}^*(R)) \circ R_{\eta_{(X,\tau_X,\leq_X)}}\right)(x) \\ & \Rightarrow \left(R_{\eta_{(Y,\tau_Y,\leq_Y)}} \circ R\right)(x) \subseteq \left(\mathcal{PS}^*(\mathcal{CU}^*(R)) \circ R_{\eta_{(X,\tau_X,\leq_X)}}\right)(x) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla (4.10) eşitliği vardır. Böylece (4.9) diyagramı değişmeli olur. □

Sonuç 4.3. *$id_{\mathbf{PREL}}$ ile $\mathcal{PS}^* \circ \mathcal{CU}^*$ funktorları doğal izomorfiktir.*

İspat Önerme 4.16 ve Önerme 4.17 nin açık bir sonucudur. □

Şimdi ikinci bir doğal dönüşümden söz edeceğiz. $\mathcal{CU}^* \circ \mathcal{PS}^*$:$\mathbf{JBDL^{op}} \longrightarrow \mathbf{JBDL^{op}}$ bileşke funktorunu göz önüne alalım. Herhangi bir $(L, \leq_L) \overset{u}{\longrightarrow} (M, \leq_M)$ $\mathbf{JBDL^{op}}-$morfizm için

$$\begin{aligned}&(\mathcal{CU}^* \circ \mathcal{PS}^*)\Big((L, \leq_L) \overset{u}{\longrightarrow} (M, \leq_M)\Big)\\ &= (\mathcal{CU}(\mathcal{PS}(L)), \subseteq) \overset{\mathcal{CU}^*(\mathcal{PS}^*(u))}{\longrightarrow} (\mathcal{CU}(\mathcal{PS}(M)), \subseteq)\end{aligned}$$

olduğu açıktır. Elbette ki burada $\mathbf{JBDL^{op}}-$morfizm

$$(\mathcal{CU}(\mathcal{PS}(L)), \subseteq) \overset{\mathcal{CU}^*(\mathcal{PS}^*(u))}{\longrightarrow} (\mathcal{CU}(\mathcal{PS}(M)), \subseteq)$$

$\mathbf{JBDL}-$morfizm $(\mathcal{CU}(\mathcal{PS}(M)), \subseteq) \overset{\mathcal{CU}^*(\mathcal{PS}^*(u))^{op}}{\longrightarrow} (\mathcal{CU}(\mathcal{PS}(L)), \subseteq)$ nin karşıtıdır. Burada $\mathcal{CU}^*(\mathcal{PS}^*(u))^{op}$ nin herhangi bir $\mathcal{V} \in \mathcal{CU}(\mathcal{PS}(M))$ ye nasıl bir dönüşüm uyguladığını görelim. Önteorem 3.3 gereği $\exists y \in M$ öyle ki $\mathcal{V} = \varphi(y)$ dir. Buradan

$$\begin{aligned}&\mathcal{CU}^*(\mathcal{PS}^*(u))^{op}(\mathcal{V}) = \mathcal{CU}^*(\mathcal{PS}^*(u))^{op}(\varphi(y))\\ &= \mathcal{PS}^*(u)^{-1}(\varphi(y))\\ &= \{P \in \mathcal{PF}(L) \mid \mathcal{PS}^*(u)(P) \cap \varphi(y) \neq \emptyset\}\\ &= \{P \in \mathcal{PF}(L) \mid (\exists Q \in \mathcal{PF}(M)),\ Q \in \mathcal{PS}^*(u)(P),\ Q \in \varphi(y)\}\\ &= \big\{P \in \mathcal{PF}(L) \mid (\exists Q \in \mathcal{PF}(M)),\ Q \subseteq (u^{op})^{-1}(P),\ y \in Q\big\}\\ &= \big\{P \in \mathcal{PF}(L) \mid y \in (u^{op})^{-1}(P)\big\} \qquad (4.12)\\ &= \{P \in \mathcal{PF}(L) \mid u^{op}(y) \in P\}\\ &= \varphi(u^{op}(y)) \qquad (4.13)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada (4.12) eşitliği yine Önteorem 4.7 nin bir sonucudur. Çünkü verilen bir $P \in \mathcal{PF}(L)$ ve $y \in (u^{op})^{-1}(P)$ için $T = \{y\}$ olarak seçilirse; $T \subseteq M$ ve $y \leq_M y$ olduğundan daima

$$T \subseteq Q \subseteq (u^{op})^{-1}(P)$$

olacak şekilde $Q \in \mathcal{PF}(M)$ bulunabilir. Bu (4.13) eşitliği aşağıda Önerme 4.18 i kanıtlamamıza yardımcı olacaktır.

Önerme 4.18. $\varepsilon^* = \left((\mathcal{CU}(\mathcal{PS}(L)), \subseteq) \overset{\varepsilon_{(L,\leq)}}{\longrightarrow} (L, \leq) \right)_{(L,\leq)\in \mathbf{Ob}(\mathbf{JBDL^{op}})}$ *ailesi* $\mathcal{CU}^* \circ \mathcal{PS}^*$ *den* $id_{\mathbf{JBDL^{op}}}$ *ye tanımlı bir doğal dönüşümdür. Burada* $(\mathcal{CU}(\mathcal{PS}(L)), \subseteq) \overset{\varepsilon_{(L,\leq)}}{\longrightarrow} (L, \leq)$ $\mathbf{JBDL^{op}}-$*morfizmi* $\mathbf{JBDL}-$*morfizm* $(L, \leq) \overset{e_{(L,\leq)}}{\longrightarrow} (\mathcal{CU}(\mathcal{PS}(L)), \subseteq)$ *nin karşıt morfizmidir.*

İspat Herhangi bir $\mathbf{JBDL}-$obje $(L, \leq)$ için $(L, \leq) \overset{e_{(L,\leq)}}{\longrightarrow} (\mathcal{CU}(\mathcal{PS}(L)), \subseteq)$ $\mathbf{JBDL}-$morfizminin $e_{(L,\leq)}(x) = \varphi(x)$ ile tanımlandığını hatırlayalım (bkz. Önerme 4.1). Burada dikkat edilmesi gereken husus, Uyarı 4.2 nin bir sonucu olarak $\mathbf{BDL}-$morfizm $(L, \leq) \overset{e_{(L,\leq)}}{\longrightarrow} (\mathcal{CU}(\mathcal{PS}(L)), \subseteq)$ nin aynı zamanda bir $\mathbf{JBDL}-$morfizm olmasıdır. ε^* un bir doğal dönüşüm olduğunu görmek için herhangi bir $(L, \leq_L) \overset{u}{\longrightarrow} (M, \leq_M) \in \mathbf{Mor}(\mathbf{JBDL^{op}})$ alalım ve

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{CU}(\mathcal{PS}(L)), \subseteq) & \overset{\varepsilon_{(L,\leq_L)}}{\longrightarrow} & (L, \leq_L) \\ {\scriptstyle \mathcal{CU}^*(\mathcal{PS}^*(u))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ (\mathcal{CU}(\mathcal{PS}(M)), \subseteq) & \underset{\varepsilon_{(M,\leq_M)}}{\longrightarrow} & (M, \leq_M) \end{array}$$

kare diyagramının değişmeli olduğunu görelim. Bunun için

$$\begin{array}{ccc} (M, \leq_M) & \overset{e_{(M,\leq_M)}}{\longrightarrow} & (\mathcal{CU}(\mathcal{PS}(M)), \subseteq) \\ {\scriptstyle u^{op}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{CU}^*(\mathcal{PS}^*(u))^{op}} \\ (L, \leq_L) & \underset{e_{(L,\leq_L)}}{\longrightarrow} & (\mathcal{CU}(\mathcal{PS}(L)), \subseteq) \end{array}$$

diyagramının değişmeli olduğunu göstermek yeterlidir. Çünkü $(\mathcal{CU}(\mathcal{PS}(L)), \subseteq) \overset{\varepsilon_{(L,\leq)}}{\longrightarrow} (L, \leq)$ $\mathbf{JBDL^{op}}-$morfizmini $\mathbf{JBDL}-$morfizm $(L, \leq) \overset{e_{(L,\leq)}}{\longrightarrow} (\mathcal{CU}(\mathcal{PS}(L)), \subseteq)$ nin karşıtı olarak ve $\mathbf{JBDL^{op}}-$morfizm $(\mathcal{CU}(\mathcal{PS}(L)), \subseteq) \overset{\mathcal{CU}^*(\mathcal{PS}^*(u))}{\longrightarrow} (\mathcal{CU}(\mathcal{PS}(M)), \subseteq)$ yi $\mathbf{JBDL}-$morfizm $(\mathcal{CU}(\mathcal{PS}(M)), \subseteq) \overset{\mathcal{CU}^*(\mathcal{PS}^*(u))^{op}}{\longrightarrow} (\mathcal{CU}(\mathcal{PS}(L)), \subseteq)$ nin karşıtı olarak tanımladık. Her $y \in M$ için

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{CU}^*(\mathcal{PS}^*(u))^{op} \circ e_{(M,\leq_M)}\right)(y) &= \mathcal{CU}^*(\mathcal{PS}^*(u))^{op}\left(e_{(M,\leq_M)}(y)\right) \\ &= \mathcal{CU}^*(\mathcal{PS}^*(u))^{op}(\varphi(y)) \\ &= \varphi(u^{op}(y)) \\ &= e_{(L,\leq_L)}(u^{op}(y)) \\ &= \left(e_{(L,\leq_L)} \circ u^{op}\right)(y) \end{aligned}$$

olduğundan $\mathcal{CU}^*(\mathcal{PS}^*(u))^{op} \circ e_{(M,\leq_M)} = e_{(L,\leq_L)} \circ u^{op}$ elde edilir. □

Uyarı 4.6. *4.1. Kısımda tanımlanan* $\mathbf{BDL}$ *kategorisinin, bu bölümde tanımladığımız* $\mathbf{JBDL}$ *kategorisinin bir alt kategorisi olduğu açıktır. Önerme 4.1 in bir sonucu olarak* $\mathbf{JBDL^{op}}-$*morfizm* $(\mathcal{CU}(\mathcal{PS}(L)), \subseteq) \overset{\varepsilon(L,\leq)}{\longrightarrow} (L, \leq)$*, aynı zamanda bir* $\mathbf{BDL^{op}}-$*izomorfizm olduğundan Önerme 2.12 gereği bir* $\mathbf{JBDL^{op}}-$*izomorfizm olur.*

Sonuç 4.4. $id_{\mathbf{JBDL^{op}}}$ *ile* $\mathcal{CU}^* \circ \mathcal{PS}^*$ *funktorları doğal izomorfiktir.*

İspat Uyarı 4.2, Uyarı 4.6 ve Önerme 4.18 in apaçık bir sonucudur. □

4.1. Kısımda olduğu gibi, bu bölümde de tüm yaptıklarımızın bir sonucu olarak aslında aşağıdaki teoremi kanıtlamış olduk.

Teorem 4.2. $\mathcal{PS}^* : \mathbf{JBDL^{op}} \longrightarrow \mathbf{PREL}$ *ve* $\mathcal{CU}^* : \mathbf{PREL} \longrightarrow \mathbf{JBDL^{op}}$ *birer denkliktir.*

4.4. Priestley Dualitesinin Bir Uygulaması

Objeleri Stone uzayları, morfizmleri sürekli fonksiyonlar, birim morfizmleri birim fonksiyonlar ve bileşke işlemi bilinen fonksiyon bileşkesi olan kategori vardır. Bu kategoriyi $\mathbf{Stone}$ ile gösterelim. Uyarı 3.2 de de söz edildiği üzere verilen bir (X, τ) Stone uzayının $(X, \tau, =)$ şeklinde bir Priestley uzayı olduğunu unutmayalım.

Yine objeleri Boole cebirleri, morfizmleri Boole homomorfizmleri, birim morfizmleri birim fonksiyonlar ve bileşke işlemi bilinen fonksiyon bileşkesi olan bir kategori vardır. Bu kategoriyi ise $\mathbf{BA}$ ile gösterelim.

Bu kısımdaki amacımız $\mathbf{Stone}$ kategorisi ile $\mathbf{BA}$ kategorisinin dual olarak denk olduklarını, Priestley dualitesi'nin bir uygulaması olarak göstermektir. Güncel literatürde bu denkliğe Stone dualitesi (Erne 2004; Stone 1936) adı verilir. Biz bu denkliği gösterirken Önerme 2.13 ü kullanacağız.

Öncelikle her bir Boole homomorfizmi aynı zamanda bir örgü homomorfizmi olduğundan $\mathbf{BA}$ kategorisinin $\mathbf{BDL}$ kategorisinin bir alt kategorisi olduğu açıktır. $\mathbf{BA}$ nın $\mathbf{BDL}$ içerisinde dolu olduğunu göstermek için ise $(B, \leq_B)$ ve $(C, \leq_C)$ birer Boole cebiri ve $h : (B, \leq_B) \longrightarrow (C, \leq_C)$ bir örgü homomorfizmi olmak üzere; her $x \in B$ için $h(x') = h(x)'$ olduğunu göstermek yeterlidir. Herhangi bir $x \in B$ için

$$\top_C = h(\top_B) = h(x \vee x') = h(x) \vee h(x') \Rightarrow h(x) \vee h(x') = \top_C$$

ve

$$\bot_C = h\left(\bot_B\right) = h\left(x \wedge x'\right) = h\left(x\right) \wedge h\left(x'\right) \Rightarrow h\left(x\right) \wedge h\left(x'\right) = \bot_C$$

dir. Aynı zamanda $h\left(x\right) \vee h\left(x\right)' = \top_C$ ve $h\left(x\right) \wedge h\left(x\right)' = \bot_C$ olduğundan Uyarı 2.2 gereğince $h\left(x'\right) = h\left(x\right)'$ olur. Böylece $\mathbf{BA}$ kategorisi $\mathbf{BDL}$ kategorisinin bir dolu alt kategorisi olur.

Her bir (X, τ) Stone uzayı $(X, \tau, =)$ şeklinde bir Priestley uzayı olduğundan $\mathbf{Stone}$ kategorisinin $\mathbf{PRS}$ kategorisinin bir alt kategorisi olduğu açıktır. Dolayısıyla

$$\hom_{\mathbf{Stone}}\left(\left(X, \tau_X\right), \left(Y, \tau_Y\right)\right) \subseteq \hom_{\mathbf{PRS}}\left(\left(X, \tau_X, =\right), \left(Y, \tau_Y, =\right)\right)$$

dir. Herhangi bir $f \in \hom_{\mathbf{PRS}}\left(\left(X, \tau_X, =\right), \left(Y, \tau_Y, =\right)\right)$ için f, $\tau_X - \tau_Y$ sürekli fonksiyon olduğundan $f \in \hom_{\mathbf{Stone}}\left(\left(X, \tau_X\right), \left(Y, \tau_Y\right)\right)$ olur. Dolayısıyla

$$\hom_{\mathbf{PRS}}\left(\left(X, \tau_X, =\right), \left(Y, \tau_Y, =\right)\right) \subseteq \hom_{\mathbf{Stone}}\left(\left(X, \tau_X\right), \left(Y, \tau_Y\right)\right)$$

dir. Bu iki kapsama

$$\hom_{\mathbf{Stone}}\left(\left(X, \tau_X\right), \left(Y, \tau_Y\right)\right) = \hom_{\mathbf{PRS}}\left(\left(X, \tau_X, =\right), \left(Y, \tau_Y, =\right)\right)$$

eşitliğini doğrular. O halde $\mathbf{Stone}$ kategorisi $\mathbf{PRS}$ kategorisinin bir dolu alt kategorisidir. 4.1. Kısımda $\mathcal{PS} : \mathbf{BDL}^{\mathbf{op}} \longrightarrow \mathbf{PRS}$ ve $\mathcal{CU} : \mathbf{PRS} \longrightarrow \mathbf{BDL}^{\mathbf{op}}$ funktorlarının $id_{\mathbf{PRS}} \approx \mathcal{PS} \circ \mathcal{CU}$ ve $\mathcal{CU} \circ \mathcal{PS} \approx id_{\mathbf{BDL}^{\mathbf{op}}}$ koşullarını sağladığını gösterdik.

Herhangi bir $(B, \leq)$ Boole cebiri için

$$\mathcal{PS}\left(\left(B, \leq\right)\right) = \left(\mathcal{PF}\left(B\right), \tau_B, =\right) = \left(\mathcal{PF}\left(B\right), \tau_B\right) \in \mathbf{Ob}\left(\mathbf{Stone}\right)$$

dir. Çünkü; eğer $P, Q \in \mathcal{PF}\left(B\right)$ ve $P \subseteq Q$ ise, Sonuç 2.2 gereği $P = Q$ dir.

Benzer şekilde herhangi bir (X, τ) Stone uzayı için $\mathcal{CU}\left(X, \tau, =\right) \subseteq \mathcal{C}\left(X, \tau\right)$ olduğu neredeyse açıktır. Çünkü bir Priestley uzayındaki kaçık ve yukarı bir küme zaten kaçıktır. Bilinen eşitlik bağıntısı olan " $=$ " e göre her küme aynı zamanda bir yukarı küme olduğundan $\mathcal{C}\left(X, \tau\right) \subseteq \mathcal{CU}\left(X, \tau, =\right)$ dir. Dolayısıyla $\mathcal{CU}\left(X, \tau, =\right) = \mathcal{C}\left(X, \tau\right)$ dir. Ayrıca $\left(\mathcal{C}\left(X, \tau\right), \subseteq\right)$ ikilisi bir Boole cebiri belirtir. Burada her $U, V \in \mathcal{C}\left(X, \tau\right)$ için $U \vee V = U \cup V$, $U \wedge V = U \cap V$ ve $U' = U^c = X \setminus U$ ile tanımlıdır. O halde

$$\mathcal{CU}\left(\left(X, \tau\right)\right) = \mathcal{CU}\left(\left(X, \tau, =\right)\right) = \left(\mathcal{CU}\left(X, \tau, =\right), \subseteq\right) = \left(\mathcal{C}\left(X, \tau\right), \subseteq\right) \in \mathbf{Ob}\left(\mathbf{BA}\right)$$

dir. Tüm bunlar, her $\mathbf{BA^{op}}$−morfizm $(B, \leq_B) \xrightarrow{h} (C, \leq_C)$ için ve her $\mathbf{Stone}$−morfizm $(X, \tau_X) \xrightarrow{f} (Y, \tau_Y)$ için

$$\mathcal{ST}\Big((B, \leq_B) \xrightarrow{h} (C, \leq_C)\Big) = (\mathcal{PF}(B), \tau_B) \stackrel{\mathcal{PS}(h)}{\longrightarrow} (\mathcal{PF}(C), \tau_C)$$

ve

$$\mathcal{BA}\Big((X, \tau_X) \xrightarrow{f} (Y, \tau_Y)\Big) = (\mathcal{C}(X, \tau_X), \subseteq) \stackrel{\mathcal{CU}(f)}{\longrightarrow} (\mathcal{C}(Y, \tau_Y), \subseteq)$$

ile tanımlı $\mathcal{ST} : \mathbf{BA^{op}} \longrightarrow \mathbf{Stone}$ ve $\mathcal{BA} : \mathbf{Stone} \longrightarrow \mathbf{BA^{op}}$ funktorlarının sırayla $\mathcal{PS}$ ve $\mathcal{CU}$ funktorlarının birer kısıtlaması olduğunu doğrular. Dolayısıyla Önerme 2.13 uyarınca $\mathcal{ST}$ ve $\mathcal{BA}$ funktorları birer denkliktir.

4.5. Genişletilmiş Priestley Dualitesinin Bir Uygulaması

Bu kısımdaki amacımız aslında $\mathbf{Stone}$ kategorisinin bir genişlemesi olan $\mathbf{RStone}$ ile $\mathbf{BA}$ kategorisinin bir genişlemesi olan $\mathbf{JBA}$ nın dual olduklarını göstermektir. Bu denkliğe Halmos-Wright dualitesi denir (Halmos 1962; Wright 1957). Bunun için yine Önerme 2.13 ü kullanacağız.

4.2. Kısımda $\mathbf{JBA}$ kategorisinin $\mathbf{JBDL}$ kategorisinin bir dolu alt kategorisi olduğunu ve $\mathbf{RStone}$ kategorisinin ise $\mathbf{PREL}$ kategorisinin bir dolu altkategorisi olduğunu belirtmiştik. Ayrıca 4.3. Kısımda $\mathcal{PS}^* : \mathbf{JBDL^{op}} \longrightarrow \mathbf{PREL}$ ve $\mathcal{CU}^* : \mathbf{PREL} \longrightarrow \mathbf{JBDL^{op}}$ funktorlarının $id_{\mathbf{PREL}} \approx \mathcal{PS}^* \circ \mathcal{CU}^*$ ve $\mathcal{CU}^* \circ \mathcal{PS}^* \approx id_{\mathbf{JBDL^{op}}}$ koşulunu sağladığını göstermiştik. Her $(B, \leq)$ Boole cebiri için

$$\mathcal{PS}^*((B, \leq)) = (\mathcal{PF}(B), \tau_B, =) = (\mathcal{PF}(B), \tau_B) \in \mathbf{Ob}(\mathbf{RStone})$$

ve her (X, τ) Stone uzayı için

$$\mathcal{CU}^*((X, \tau)) = \mathcal{CU}^*((X, \tau, =)) = (\mathcal{CU}(X, \tau, =), \subseteq) = (\mathcal{C}(X, \tau), \subseteq) \in \mathbf{Ob}(\mathbf{JBA^{op}})$$

dir. Elbette ki $(\mathcal{C}(X, \tau), \subseteq)$ ikilisi bir Boole cebiri belirtir ve burada her $U \in \mathcal{C}(X, \tau)$ için $U' = X \setminus U$ ile tanımlıdır. Dolayısıyla her $(B, \leq_B) \xrightarrow{u} (C, \leq_C) \in \mathbf{Mor}(\mathbf{JBA^{op}})$ için

$$\mathcal{ST}^*\Big((B, \leq_B) \xrightarrow{u} (C, \leq_C)\Big) = (\mathcal{PF}(B), \tau_B) \stackrel{\mathcal{PS}^*(u)}{\longrightarrow} (\mathcal{PF}(C), \tau_C)$$

eşitliği ve her $(X, \tau_X) \xrightarrow{f} (Y, \tau_Y) \in \mathbf{Mor}(\mathbf{RStone})$ için

$$\mathcal{BA}^*\Big((X, \tau_X) \xrightarrow{f} (Y, \tau_Y)\Big) = (\mathcal{C}(X, \tau_X), \subseteq) \stackrel{\mathcal{CU}^*(f)}{\longrightarrow} (\mathcal{C}(Y, \tau_Y), \subseteq)$$

eşitliği ile verilen $\mathcal{ST}^* : \mathbf{JBA^{op}} \longrightarrow \mathbf{RStone}$ ve $\mathcal{BA}^* : \mathbf{RStone} \longrightarrow \mathbf{JBA^{op}}$ funktorları birer denkliktir.

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında Priestley dualitesi olarak adlandırdığımız 4.1. Kısımda; objeleri Priestley uzayları ve morfizmleri sürekli ve sıra-korur fonksiyonlar olan $\mathbf{PRS}$ kategorisi ile, objeleri sınırlı ve dağılımlı örgüler ve morfizmleri örgü homomorfizmleri olan $\mathbf{BDL}$ kategorisinin dual olarak denk oldukları gösterilmiştir. Bu sonuçla birlikte sınırlı ve dağılımlı örgülere tamamen farklı bir bakış açısı kazandırılmış ve topolojik yapılar üzerinden incelenebilmesi mümkün kılınmıştır. Bu bağlamda sınırlı ve dağılımlı örgüler üzerine hazırlanmış ve hazırlanacak olan çalışmalara katkı sağlanması hedeflenmiştir. Ardından 4.3. Kısımda objeleri yine Priestley uzayları fakat morfizmleri Priestley bağıntıları olan $\mathbf{PREL}$ kategorisi ile, objeleri sınırlı, dağılımlı örgüler ve morfizmleri bitişme koruyan fonksiyonlar olan $\mathbf{JBDL}$ kategorisinin dual olarak denk oldukları gösterilmiş ve Priestley dualitesinin bir genişlemesi elde edilmiştir. Ayrıca 4.4. ve 4.5. Kısımlarında Priestley Dualitesi ve Genişletilmiş Priestley Dualitesi'nin önemli birer uygulaması olarak "Stone Dualitesi" denilen (Erne 2004; Stone 1936) $\mathbf{BA}$ ile $\mathbf{Stone}$ kategorilerinin ve "Halmos-Wright Dualitesi" denilen (Halmos 1962;Wright 1957) $\mathbf{JBA}$ ile $\mathbf{RStone}$ kategorilerinin dual olarak denk oldukları sonucuna varıldı. Gelecek çalışmalarda bu gibi örnekler çoğaltılabilir.

6. KAYNAKLAR

Abramsky, S. and Jung, A. 1994. Domain Theory, Handbook of logic in computer science. Oxford University Press.

Adamek, J., Herrlich, H. and Strecker, G. E. 1990. Abstract and concrete categories: The Joy of Cat. John Wiley & Sons.

Adams, M. E. and Priestley, H. A. 1987. De Morgan Algebras are universal. Discrete Math., 66, 1-13.

Awodey, S. 2010. Category Theory. Oxford University press, second edition.

Bezhanishvili, G. and Jansana, R. 2008. Duality for distributive and implicative semilattices. Preprints of University of Barcelona Research Group in Non-Classical Logics.

Bezhanishvili, G. and Jansana, R. 2011. Priestley style duality for distributive meet-semilattices. Studia Logica 98, no. 1-2, 83-122.

Birkhoff, G. 1948. Lattice theory. CP. 25. American Mathematical Society, revised edition.

Boole, G. 1854. An investigation of the laws of thought: on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities. Dover Publications.

Clark, D. M. and Davey, B. A. 1998. Natural Dualities fort the Working Algebraist, Cambride University Press.

Cignoli, R., Lafalce, S. and Petrovich, A. 1991. Remarks on Priestley duality for distributive lattices. Order 8, 299-315.

Cornish, W. H. and Fowler, P. R. 1977. Coproducts of de Morgan algebras. Bull. Austral. Math. Soc. 16, 1-13.

Davey, B. A. and Priestley, H. A. 1990. Introduction to lattices and order. Cambridge university press.

Demirci, M. 2013. $(\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2)$-Complete partially ordered sets and their representations by $\mathcal{Q}$-Spaces. Applied Categorical Structures, 21.6, 703-723.

Erne, M. 2004. General Stone duality. Topology and its Applications 137, 125-158.

Eisenberg, M. 1971. Axiomatic theory of sets and classes. Holt, Rinehart and Winston, Inc.

Farley, J.D. 1996. Priestley duality for order-preserving maps into distributive lattices. Order 13 no. 1, 65-98.

Gehrke, M. 2009. Stone duality and the recognisable languages over an algebra. In CALCO, A. Kurz, M. Lenisa, and A. Tarlecki, Eds. Lecture Notes in Computer Science, vol. 5728. Springer, 236-250

Gehrke, M. 2016. Stone duality, topological algebra, and recognition. Journal of Pure and Applied Algebra, Volume 220, 2711-2747

Gierz, G., Hofmann, K. H., Keimel, K., Lawson, J.D., Mislove, M. and Scott, D.S. 1980. A Compendium of Continuous Lattices. Springer Verlag.

Grätzer, G. 2003. General lattice theory. Birkhäuser, 2nd edition.

Halmos, P. R. 1955. Algebraic Logic I. Monadic boolean algebras, Compositio Mathematica, tome 12, 217-249.

Halmos, P. R. 1962. Algebraic Logic. Chelsea Publ. Co., New York, 271.

Halmos, P. R. 1963. Lectures on Boolean algebras. Van Nostrand Reinhold Company.

Hansoul, G. and Poussart, C. 2008. Priestley Duality for Distributive Semilattices. Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol. 77, 104-119.

Johnstone, P.T. 1986. Stone Spaces. Cambridge University Press, Cambridge, MA.

Lane, S.M. 1971. Categories for the working mathematician. SPRINGER VERLAG, 6 edition.

Martinez, N.G. 1988. The Priestley Duality for Wajsberg Algebras. Studia Logica 49, 31-46.

Pratt, V.R. 1995. The Stone gamut: A coordinatization of mathematics. Logic in Comp. Sci. (IEEE Computer Society), 444-454.

Priestley, H.A. 1970. Representation of distributive lattices by means of ordered Stone spaces. Bull. London Math. Soc., (2), 186-190.

Priestley, H.A. 1972. Ordered topological spaces and the representation of distributive lattices. Proc. London Math. Soc., 24(3), 507-530.

Russell, B. 1903. The Principles of Mathematics. Cambridge University Press.

Sambin, G. and Vaccaro, V. 1988. Topology and duality in modal logic. Annals of Pure and Applied Logic, 37, 249-296

Stone, M.H. 1936. The theory of representations for Boolean algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 40, 37-111.

Willard, S. 1970. General Topology. Addison-Wesley publishing company.

Wright, F.B. 1957. Some remarks on Boolean duality. Portugal. Math. 16, 109-117.

ÖZGEÇMİŞ

KENAN AYKUR

kenan0765@outlook.com

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2017-2020	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ABD, Antalya
Lisans 2013-2017	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Satranç Eğitmeni 2017-2018	Altınyaka Koleji Ortaokulu Konyaaltı, Antalya