T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

LEİBNİTZ TİPLİ SAYILAR İLE BAZI ÖZEL TOPLAMLAR ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Deniz KAYA

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞUBAT 2022

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

LEİBNİTZ TİPLİ SAYILAR İLE BAZI ÖZEL TOPLAMLAR ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Deniz KAYA

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞUBAT 2022

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LEİBNİTZ TİPLİ SAYILAR İLE BAZI ÖZEL TOPLAMLAR ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Deniz KAYA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 21/02/2022 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK (Danışman)
Prof. Dr. Mustafa ALKAN
Dr. Öğr. Üyesi Neslihan KILAR

ÖZET

LEİBNİTZ TİPLİ SAYILAR İLE BAZI ÖZEL TOPLAMLAR ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Deniz KAYA

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK

Şubat 2022; 29 sayfa

Bu tezde, Leibnitz sayıları ve Leibnitz tipli sayıları ile fonksiyonların bazı özel toplamlar arasındaki ilişkiler çalışılmıştır. Üreteç fonksiyonları ve bu fonksiyonların fonksiyonel denklemleri yardımıyla Leibnitz tipli sayıların ve polinomların bazı özellikleri verilmiştir. Benzer şekilde, üreteç fonksiyonları teknikleri kullanılarak, Bernstein polinomları, Stirling sayıları, Catalan sayıları, Bernoulli sayıları ve polinomları, Euler sayıları ve polinomları, Genocchi sayıları ve polinomları arasındaki bağıntılar incelenmiştir. Ayrıca, üreteç fonksiyonları yardımıyla, Leibnitz tipli sayılar ve polinomlar ile bazı özel toplamlar, bağıntılar ve formüller verilmiştir. Bu tezde elde edilen sonuçlar hem matematik hem de diğer bilim dallarında kullanılabilir niteliktedirler.

ANAHTAR KELİMELER: Bernoulli sayıları ve polinomları, Bernstein polinomları, Beta fonksiyonları, Catalan sayıları, Euler sayıları ve polinomları, Genocchi sayıları ve polinomları, Leibnitz sayıları ve polinomları, Stirling sayıları.

JÜRİ: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK
Prof. Dr. Mustafa ALKAN
Dr. Öğr. Üyesi Neslihan KILAR

ABSTRACT

RELATIONS BETWEEN LEIBNITZ TYPE NUMBERS AND SOME SPECIAL SUMS

Deniz KAYA

MSc Thesis in MATHEMATICS
Supervisor: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK
February 2022; 29 pages

In this thesis, the relations among the Leibnitz numbers and Leibnitz type numbers and some of their special sums are studied. With the help of generating functions and their functional equations, some properties of Leibnitz type numbers and polynomials are given. Similarly, relations among the Bernstein polynomials, the Stirling numbers, the Catalan numbers, the Bernoulli numbers and polynomials, the Euler numbers and polynomials, the Genocchi numbers and polynomials are investigated using generating functions techniques. In addition, with the aid of generating functions, the Leibnitz type numbers and polynomials and some special sums, relations and formulas are given. The results obtained in this thesis may be used both in mathematics and in other branches of science.

KEYWORDS: Bernoulli numbers and polynomials, Bernstein polynomials, Beta functions, Catalan numbers, Euler numbers and polynomials, Genocchi numbers and polynomials, Leibnitz numbers and polynomials, Stirling numbers.

COMMITTEE: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK
Prof. Dr. Mustafa ALKAN
Asst. Prof. Dr. Neslihan KILAR

ÖNSÖZ

Bu tezde Leibnitz tipli sayılar ve bazı özel toplamlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Bu ilişkileri daha iyi anlamak için her özel sayı ve polinom ailelerine detaylı şekilde yer verilmiştir. Bernoulli sayıları ve polinomları, Bernstein sayı ve polinomları, Stirling sayıları gibi daha birçok özel sayı ve polinom ailelerinin temel özellikleri verilmiş ve birbirleriyle olan ilişkileri incelenmiştir. Leibnitz tipli sayıların temel özellikleri ele alınmış ve kat sayıları Leibnitz sayıları olan Leibnitz polinomları verilmiştir. Bernstein baz fonksiyonları ve Bernoulli sayıları kullanılarak genelleştirilmiş Leibnitz sayıları verilmiştir. Bunlara ek olarak Leibnitz sayıları için rekürans bağıntıları ve bazı özel sonuçlar elde edilmiştir.

Üreteç fonksiyonları, son dönemlerde matematik, matematiksel fizik, olasılık ve istatistik gibi birçok alanda uygulama alanlanına sahiptir. Bu tezde, Leibnitz tipli sayı ve polinom aileleri, üreteç fonksiyonları, bazı özel sayı ve polinom ailelerini içeren tanımlar, teoremler, örnekler verilmiştir. Bu tezdeki sonuçlar aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

Bu tez, beş bölümde oluşmaktadır. Bunlar sırasıyla Giriş, Kaynak Taraması, Materyal ve Metot, Bulgular ve Tartışma, Sonuçlar bölümü ile bitmektedir. Bölümün sonunda kaynak listesi ve ayrıca kısa özgeçmişim bulunmaktadır.

Giriş bölümünde, Leibnitz tipli sayılar ve bu sayılarla ilgili olan bazı sayı ve polinomlar ve Gottfried Wilhelm hakkında bazı bilgiler verilmiştir.

Kaynak taraması bölümünde, Beta fonksiyonları, Bernoulli sayı ve polinomları, Euler sayı ve polinomları, Genocchi sayıları ve polinomları, birinci tür Stirling sayıları, ikinci tür Stirling sayıları, Catalan sayıları, Leibnitz sayıları ve polinomları, Bernstein baz fonksiyonları, iki değişkenli Leibnitz polinomları gibi önemli olan sayı ve polinom ailelerinin tanımı, özellikleri ve ilgili teoeremleri verilmiştir.

Materyal ve Metot bölümde, Leibnitz tipli sayı ve polinomların bazı temel özellikleri, bazı sayı ve polinom aileleri yardımıyla, genelleştirlmiş Leibnitz tipli sayılar ve bunların bazı temel özellikleri, Leibnitz tipli sayıların ilişkili olduğu sonlu toplamlar ve binom katsayılarını içeren bazı sonlu toplamlar verilmiştir.

Bulgular ve Tartışma bölümünde, bazı özel sayı ailelerinin üreteç fonksiyonları ve bazı temel özellikleri kullanılarak, Catalan sayıları, Bernoulli sayıları, Euler sayıları, Genocchi sayıları, birinci tür Stirling sayıları, ikinci tür Stirling sayıları ve Leibnitz sayıları arasındaki ilişkiler ve Leibnitz sayıları için rekürans bağıntısı verilmiştir.

Bu tez çalışması süresince bilgisi ile bana her zaman lider olan ve yol gösteren sayın danışmanım Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK'e teşekkür ederim ve saygılarımı sunarım. Çalışma sürecimde desteğini esirgemeyen Dr. Öğr. Üyesi Neslihan KILAR'a saygı ve teşekkürlerimi borç bilirim. Her zaman yanımda olan annem Raziye KAYA' ya ve kardeşim Ezgi KAYA' ya teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Leibnitz Tipli Sayılar İle Bazı Özel Toplamlar Arasındaki İlişkiler" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

21/02/2022

Deniz KAYA

SİMGELER

Simgeler:

$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$B(\alpha, \beta)$	: Beta fonksiyonları
B_n	: Bernoulli sayıları
$B_n(x)$	: Bernoulli polinomları
E_n	: Euler sayıları
$E_n(x)$	: Euler polinomları
G_n	: Genocchi sayıları
$G_n(x)$	: Genocchi polinomları
$S_1(n, k)$	: Birinci tür Stirling sayıları
$S_2(n, k)$	: İkinci tür Stirling sayıları
C_n	: Catalan sayıları
$\boldsymbol{l}\,(n, k)$	: Leibnitz sayıları
$L_n(t)$	: Leibnitz polinomları
$B_k^n(x; a, b)$	: Bernstein baz fonksiyonları
$L(n, k; a, b)$	: İki değişkenli Leibnitz polinomları

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Gottfried Wilhelm (von) Leibnitz 1646-1716 tarihleri arasında yaşamış yalnızca matematikçi değil aynı zamanda filozof, bilim adamı ve diplomat olarak bilinen bir Alman bilim adamıdır. Bazı kaynaklarda Leibniz olarak da yazılmaktadır. Leibnitz felsefe bilimine ve matematik teorisine önemli katkılar sağlamıştır. Bunun yanında teoloji, etik, siyaset, hukuk, tarih ve filoloji üzerine eserleri mevcuttur. Ayrıca olasılık teorisi, biyoloji, tıp, jeoloji, psikoloji, dilbilim, bilgisayar bilimleri, fizik bilimi ve mühendisliğe de büyük katkılarda bulunmuştur. Leibnitz'in bir matematikçi olarak en büyük başarısı, Isaac Newton'un bulmuş olduğu diferansiyel ve integral teorisinin ana fikirlerini bağımsız olarak da geliştirmesiydi (Ball 1960). Günümüzde Leibnitz sayıları olarak adlandırılan sayılar Charalambides'in (2002) kitabında verilmiştir. Bu sayıların üreteç fonksiyonları ve bunların ilişkili olduğu hesaplamalı formül ise bu kitabın sayfa 127 de problem 16 da ve sayfa 275 de problem 40 da verilmiştir. 2021 yılında Simsek tarafından bu problemin Bernstein polinomlarının integrali ve üreteç fonksiyonları yardımıyla çözümü verilmiştir. Bu sayılar ve bunların üreteç fonksiyonları analitik sayılar teorisinin önde gelen konuları arasına girdiği bilinmektedir. Şimdiye kadar nadiren ele alınan bu sayılar, Simsek (2021) tarafından hem üreteç fonksiyonu ve bu fonksiyonların fonksiyonel denklemleri ve teknikleri hem de Volkenborn integral yöntemi kullanılarak temel özellikleri incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında Leibnitz tipli sayılar ile bu sayılarla ilişkili olan bazı özel sayı ve polinom ailelerinin temel özellikleri verilmiş ve aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Leibnitz sayılarıyla bağlantılı olan Beta fonksiyonları, Catalan sayıları, Bernoulli sayıları ve polinomları, Genocchi sayıları ve polinomları verilmiş ve birbileri arasındaki ilişki incelenmiş, bu sayı ve polinom ailelerine ait sonlu toplamlar elde edilmiştir. Ayrıca bu özel sayı ve polinom ailelerinin özellikleri ve üreteç fonksiyonları verilmiştir. Birinci tür Stirling sayıları ve ikicinci tür Stirling sayılarının, Bernoulli sayıları ile ilişkisi incelenmiş ve bu ilişkiden doğan rekürans bağıntıları verilmiştir. Bu tezin ana karakteri olan Leibnitz sayıları detaylı ele alınmıştır. Leibnitz polinomları, genelelleştirilmiş Leibnitz sayıları ve polinomlarının değerleri hesaplanmıştır.

Bu tez çalışmasında kullanılan ve elde edilen sonuçların matematik, fizik, matematiksel fizik, olasılık ve istatistik teorisi gibi birçok alanda kullanılma potansiyeli vardır.

2. KAYNAK TARAMASI

Bu bölümde, tez çalışması boyunca kullanılacak olan bazı özel sayı ve polinom ailelerinin üreteç fonksiyonları verilecektir. Ayrıca, bu sayı ve polinom ailelerinin bazı temel özellikleri incelenecektir.

$n, k \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere,

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!k!}, & n \geq k \geq 0 \\ 0, & n < k \end{cases}$$

dir. Ayrıca, bu tez çalışması boyunca

$$0^n := \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ve

$$\frac{1}{0} := \infty$$

olarak ele alınacaktır.

Tanım 2.1. *$B(\alpha, \beta)$ ile gösterilen Beta fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlanır:*

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt = B(\beta, \alpha) \tag{2.1}$$

(Rainville 1960; Srivastava ve Choi 2012). Burada $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ ve $\mathrm{Im}(\beta) > 0$ dır.

Ayrıca, $B(\alpha, \beta)$ ile gösterilen Beta fonksiyonları,

$$\begin{aligned} B(\alpha, \beta) &= \int_a^b (x-a)^{\alpha-1}(b-x)^{\beta-1}dx \\ &= (b-a)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha, \beta) \end{aligned} \tag{2.2}$$

integral formülü yardımıyla da tanımlanır (Srivastava ve Choi 2001).

Tanım 2.2. *$x \in [a, b]$ ve $k = 0, 1, 2, \cdots n$ olmak üzere, $B_k^n(x; a, b)$ ile gösterilen Bernstein baz fonksiyonları $a < b$ için,*

$$B_k^n(x; a, b) = \binom{n}{k}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^k \tag{2.3}$$

dir (Goldman 2002; Simsek 2014a, 2014b, 2014c, 2015a, 2015b).

Tanım 2.3. *$t \in \mathbb{R}$ ve $|t| < 2\pi$ olsun. B_n, Bernoulli sayıları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:*

$$F_{Bs}(t,x) = \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} \tag{2.4}$$

(Abramowitz ve Stegun 1970; Comtet 1974; Srivastava ve Manocha 1984; Srivastava ve Pinter 2004; Luo ve Srivastava 2005; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

Tanım 2.4. *$t \in \mathbb{R}$ ve $|t| < 2\pi$ olsun. $B_n(x)$, Bernoulli polinomları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:*

$$F_{Bp}(t,x) = \frac{t}{e^t - 1} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} \tag{2.5}$$

(Abramowitz ve Stegun 1970; Comtet 1974; Srivastava ve Choi 2012).

(2.5) bağıntısında özel olarak $x = 0$ alınırsa,

$$B_n(0) = B_n$$

elde edilir.

(2.4) bağıntısında verilen üreteç fonksiyonu kullanılarak, $B_0 = 1$ ve $n > 1$ olmak üzere, Bernoulli sayıları aşağıdaki reküans bağıntısı ile hesaplanır:

$$B_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_j \tag{2.6}$$

(Abramowitz ve Stegun 1970; Comtet 1974; Srivastava ve Choi 2012).

(2.4) ve (2.5) bağıntıları kullanılarak, Bernoulli sayılarını ve Bernoulli polinomlarını içeren aşağıdaki sonlu toplam elde edilir:

$$B_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j B_{n-j} \tag{2.7}$$

(Abramowitz ve Stegun 1970; Comtet 1974; Srivastava ve Choi 2012).

(2.6) denkleminde verilen reküans bağıntısı kullanılarak, Bernoulli sayılarının aldığı bazı değerler aşağıdaki Çizelge 2.1 ile sunulmuştur:

Çizelge 2.1. B_n için bazı sayısal değerler

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$

Burada, $n \geq 1$ olmak üzere,

$$B_{2n+1} = 0$$

olarak bulunur.

(2.7) de verilen formül yardımıyla, Bernoulli polinomlarının aldığı bazı değerler aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\begin{aligned}
B_0(x) &= 1, \\
B_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\
B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}, \\
B_3(x) &= x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2}, \\
B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, \\
B_5(x) &= x^5 - \frac{5x^4}{2} + \frac{5x^3}{3} - \frac{x}{6}, \\
B_6(x) &= x^6 - 3x^5 + \frac{5x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{42}, \\
B_7(x) &= x^7 - \frac{7x^6}{2} + \frac{7x^5}{2} - \frac{7x^3}{6} + \frac{x}{6}, \\
B_8(x) &= x^8 - 4x^7 + \frac{14x^6}{3} - \frac{7x^4}{3} + \frac{2x^2}{3} - \frac{1}{30}, \\
B_9(x) &= x^9 - \frac{9x^8}{2} + 6x^7 - \frac{21x^5}{5} + 2x^3 - \frac{3x}{10}, \\
B_{10}(x) &= x^{10} - 5x^9 + \frac{15x^8}{2} - 7x^6 + 5x^4 - \frac{3x^2}{2} + \frac{5}{66}.
\end{aligned}$$

Tanım 2.5. *$|t| < \pi$ olsun. E_n, Euler sayıları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:*

$$F_{Es}(t) = \frac{2}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!} \tag{2.8}$$

(Abramowitz ve Stegun 1970; Comtet 1974; Srivastava ve Choi 2012).

Tanım 2.6. *$t \in \mathbb{R}$ ve $|t| < \pi$ olsun. $E_n(x)$, Euler polinomları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:*

$$F_{Ep}(t, x) = \frac{2}{e^t + 1} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!} \tag{2.9}$$

(Abramowitz ve Stegun 1970; Comtet 1974; Milne-Thomson 1933; Norlund 1924; Srivastava ve Manocha 1984; Srivastava ve Pinter 2004; Luo ve Srivastava 2005; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

(2.9) bağıntısında özel olarak $x = 0$ alınırsa,

$$E_n(0) = E_n$$

elde edilir.

(2.4) ve (2.8) bağıntılarında verilen üreteç fonksiyonları kullanılarak,

$$\frac{2t}{e^{2t} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Buradan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{(2t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{t^n}{n!}$$

bulunur. O halde,

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n B_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_j E_{n-j} \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$'nin katsayıları karşılaştırılırsa, Bernoulli sayıları ve Euler sayıları arasındaki iyi bilinen ilişki aşağıdaki şekilde verilir:

$$B_n = 2^{-n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_j E_{n-j} \tag{2.10}$$

(Srivastava ve Choi 2012).

(2.8) bağıntısında verilen üreteç fonksiyonu kullanılarak, $E_0 = 1$ ve $n \geq 1$ olmak üzere, Euler sayıları aşağıdaki rekürans bağıntısı ile hesaplanır:

$$E_n = -\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} E_j \tag{2.11}$$

(Erdelyi 1953; Srivastava ve Choi 2012).

(2.8) ve (2.9) bağıntıları kullanılarak, Euler sayılarını ve Euler polinomlarını içeren aşağıdaki sonlu toplam elde edilir:

$$E_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j E_{n-j} \tag{2.12}$$

(Abramowitz ve Stegun 1970; Comtet 1974; Srivastava ve Choi 2012).

(2.11) denkleminde verilen rekürans bağıntısı kullanılarak, Euler sayılarının aldığı bazı değerler aşağıdaki Çizelge 2.2 ile sunulmuştur:

Çizelge 2.2. E_n için bazı sayısal değerler

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E_n	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{17}{8}$	0	$-\frac{31}{2}$	0

Burada, $n \geq 1$ olmak üzere,

$$E_{2n} = 0$$

olarak bulunur.

(2.12) bağıntısı kullanılarak, Euler polinomlarının aldığı bazı değerler aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\begin{aligned}
E_0(x) &= 1, \\
E_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\
E_2(x) &= x^2 - x, \\
E_3(x) &= x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{4}, \\
E_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x, \\
E_5(x) &= x^5 - \frac{5x^4}{2} + \frac{5x^2}{2} - \frac{1}{2}, \\
E_6(x) &= x^6 - 3x^5 + 5x^3 - 3x, \\
E_7(x) &= x^7 - \frac{7x^6}{2} + \frac{35x^4}{4} - \frac{21x^2}{2} + \frac{17}{8}, \\
E_8(x) &= x^8 - 4x^7 + 14x^5 - 28x^3 + 17x, \\
E_9(x) &= x^9 - \frac{9x^8}{2} + 21x^6 - 63x^4 + \frac{153x^2}{2} - \frac{31}{2}, \\
E_{10}(x) &= x^{10} - 5x^9 + 30x^7 - 126x^5 + 255x^3 - 155x.
\end{aligned}$$

Tanım 2.7. *$t \in \mathbb{R}$ ve $|t| < \pi$ olsun. G_n, Genocchi sayıları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:*

$$\frac{2t}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{t^n}{n!} \tag{2.13}$$

(Abramowitz ve Stegun 1970; Comtet 1974; Srivastava ve Choi 2012).

Tanım 2.8. *$t \in \mathbb{R}$ ve $|t| < \pi$ olsun. $G_n(x)$, Genocchi polinomları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:*

$$\frac{2t}{e^t + 1} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x) \frac{t^n}{n!} \tag{2.14}$$

(Abramowitz ve Stegun 1970; Comtet 1974; Horadam. 1991; Milne-Thomson 1933; Norlund 1924; Srivastava ve Choi 2012; Zou 2017).

(2.14) bağıntısında özel olarak $x = 0$ alınırsa,

$$G_n(0) = G_n$$

elde edilir.

(2.8) ve (2.13) bağıntılarında verilen üreteç fonksiyonları kullanılarak, $n \geq 1$ için, Euler sayıları ve Genocchi sayıları arasındaki iyi bilinen ilişki aşağıdaki gibi verilir:

$$E_{n-1} = \frac{1}{n} G_n \tag{2.15}$$

(Srivastava ve Choi 2012).

(2.13) bağıntısında verilen üreteç fonksiyonu kullanılarak, $G_0 = 0$, $G_1 = 1$ ve $n > 1$ olmak üzere, Genocchi sayıları aşağıdaki rekürans bağıntısı ile hesaplanır:

$$G_n = -\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} G_j \tag{2.16}$$

(Srivastava ve Choi 2012).

(2.13) ve (2.14) bağıntıları kullanılarak, Genocchi sayılarını ve Genocchi polinomlarını içeren aşağıdaki sonlu toplam elde edilir:

$$G_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} G_j x^{n-j} \tag{2.17}$$

(Abramowitz ve Stegun 1970; Comtet 1974; Horadam 1991; Srivastava ve Choi 2012; Zou 2017).

(2.16) denkleminde verilen rekürans bağıntısı kullanılarak, Genocchi sayılarının aldığı bazı değerler aşağıdaki Çizelge 2.3 ile sunulmuştur:

Çizelge 2.3. G_n için bazı sayısal değerler

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
G_n	0	1	-1	0	1	0	-3	0	17	0	-155

Burada, $n \geq 1$ olmak üzere,

$$G_{2n+1} = 0$$

olarak bulunur.

(2.17) bağıntısı kullanılarak, Genocchi polinomlarının aldığı bazı değerler aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\begin{aligned}
G_0(x) &= 0,\\
G_1(x) &= 1,\\
G_2(x) &= 2x-1,\\
G_3(x) &= 3x^2-3x,\\
G_4(x) &= 4x^3-6x^2+1,\\
G_5(x) &= 5x^4-10x^3+5x,\\
G_6(x) &= 6x^5-15x^4+15x^2-3,\\
G_7(x) &= 7x^6-21x^5+35x^3-21x,\\
G_8(x) &= 8x^7-28x^6+70x^4-84x^2 17,\\
G_9(x) &= 9x^8-36x^7+126x^5-252x^4+153x,\\
G_{10}(x) &= 10x^9-45x^8+210x^6-630x^4+765x^2-155.
\end{aligned}$$

Tanım 2.9. *$n,k\in\mathbb{N}_0$ olmak üzere, $S_1(n,k)$, birinci tür Stirling sayıları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:*

$$\frac{(\log(1+t))^k}{k!}=\sum_{n=0}^{\infty}S_1(n,k)\frac{t^n}{n!} \tag{2.18}$$

(Riordan 1958; Graham vd. 1994; Srivastava ve Choi 2012).

$S_1(0,0)=1$, $n>0$ için $S_1(n,0)=0$ ve $k>n$ için $S_1(n,k)=0$ olmak üzere, birinci tür Stirling sayıları için aşağıdaki reküirans bağıntısı ile hesaplanır:

$$S_1(n+1,k)=S_1(n,k-1)-nS_1(n,k) \tag{2.19}$$

(Graham vd. 1994; Srivastava ve Choi 2012).

(2.4) bağıntısında t yerine $\log(1+t)$ alınırsa,

$$\frac{\log(1+t)}{t}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{(\log(1+t))^n}{n!}$$

elde edilir. Buradan (2.18) bağıntısı kullanılırsa

$$\frac{\log(1+t)}{t}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\sum_{m=0}^{\infty}S_1(m,n)\frac{t^m}{m!}$$

bulunur. O halde $n > m$ için $S_1(m,n) = 0$ olduğundan

$$\frac{\log(1+t)}{t} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{m} B_n S_1(m,n) \frac{t^m}{m!} \tag{2.20}$$

olur. Ayrıca,

$$\log(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} \tag{2.21}$$

açılımı kullanılırsa

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{t^m}{m+1} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{m} B_n S_1(m,n) \frac{t^m}{m!}$$

bağıntısı elde edilir. Yukarıdaki denklemde t^m'nin katsayıları karşılaştırılırsa, Bernoulli sayıları ve birinci tür Stirling sayıları arasındaki iyi bilinen ilişki aşağıdaki şekilde verilir:

$$\frac{m!\,(-1)^m}{m+1} = \sum_{n=0}^{m} B_n S_1(m,n)$$

(Charalambides 2005; Srivastava ve Choi 2012; Kim ve Kim 2013; Simsek 2021).

(2.19) denkleminde verilen rekürans bağıntısı kullanılarak, birinci tür Stirling sayılarının aldığı bazı değerler aşağıdaki Çizelge 2.4 ile sunulmuştur:

Çizelge 2.4. $S_1(n,k)$ için bazı değerler

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	-1	1	0	0	0	0	0
3	0	2	-3	1	0	0	0	0
4	0	-6	11	-6	1	0	0	0
5	0	24	-50	35	-10	1	0	0
6	0	-120	274	-225	85	-15	1	0
7	0	720	-1764	1624	-735	175	-21	1

Tanım 2.10. *$n, k \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, $S_2(n,k)$, ikinci tür Stirling sayıları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:*

$$F_s(t,k) = \frac{(e^t-1)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} S_2(n,k) \frac{t^n}{n!} \tag{2.22}$$

(Graham vd. 1994; Srivastava ve Choi 2012).

(2.22) bağıntısında verilen üreteç fonksiyonu kullanılarak, ikinci tür Stirling sayıları için aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$S_2(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}j^n \tag{2.23}$$

(Graham vd. 1994; Srivastava ve Choi 2012).

$S_2(0,0)=1$, $n>0$ için $S_2(n,0)=0$ ve $k>n$ için $S_2(n,k)=0$ olmak üzere, ikinci tür Stirling sayıları için aşağıdaki rekürans bağıntısı ile hesaplanır:

$$S_2(n,k) = kS_2(n-1,k) + S_2(n-1,k-1)$$

(Graham vd. 1994; Srivastava ve Choi 2012).

(2.4) ve (2.22) bağıntılarında verilen üreteç fonksiyonu kullanılarak,

$$\frac{t}{e^t-1} = \frac{\log(1+(e^t-1))}{e^t-1}$$

elde edilir. (2.21) denklemi ve yukarıdaki eşitlik yardımıyla,

$$\frac{t}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(e^t-1)^n}{n+1}$$

bulunur. Buradan (2.4) ve (2.22) bağıntıları kullanılırsa, aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$\sum_{m=0}^{\infty}B_m\frac{t^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{n+1}\sum_{m=0}^{\infty}S_2(m,n)\frac{t^m}{m!}.$$

O halde $n>m$ için $S_2(m,n)=0$ olduğundan

$$\sum_{m=0}^{\infty}B_m\frac{t^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\frac{n!}{n+1}S_2(m,n)\frac{t^m}{m!}$$

bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^m}{m!}$'nin katsayıları karşılaştırılırsa, Bernoulli sayıları ile ikinci tür Stirling sayıları arasındaki çok iyi bilinen ilişki aşağıdaki şekilde verilir:

$$B_m = \sum_{n=0}^{m}(-1)^n\frac{n!}{n+1}S_2(m,n) \tag{2.24}$$

(Boyadzhiev 2012; Charalambides 2002; Srivastava ve Choi 2012).

(2.23) bağıntısı kullanılarak, ikinci tür Stirling sayılarının aldığı bazı değerler aşağıdaki Çizelge 2.5 ile sunulmuştur:

Çizelge 2.5. $S_2(n,k)$ için bazı sayısal değerler

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0	0	0
4	0	1	7	6	1	0	0	0
5	0	1	15	25	10	1	0	0
6	0	1	31	90	65	15	1	0
7	0	1	63	301	350	140	21	1

Tanım 2.11. *$0 < |t| \leq \frac{1}{4}$ ve $C_0 = 1$ olmak üzere, Catalan sayıları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:*

$$\frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n \tag{2.25}$$

(Koshy 2009; Simsek 2015b).

(2.25) bağıntısında verilen üreteç fonksiyonu kullanılarak, $n \geq 0$ olmak üzere, Catalan sayıları aşağıdaki bağıntı ile hesaplanır:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \tag{2.26}$$

(Koshy 2009; Simsek 2015b).

Ayrıca, $n \geq 1$ ve $C_0 = 1$ olmak üzere, Catalan sayıları aşağıdaki bağıntı yardımıyla da hesaplanır:

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

(Koshy 2009; Simsek 2015b).

$n \geq 0$ ve $C_0 = 1$ olmak üzere, Catalan sayıları aşağıdaki rekürans bağıntısı ile hesaplanır:

$$C_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2} C_n$$

(Koshy 2009; Simsek 2015b).

(2.26) denkleminde verilen bağıntı kullanılarak, Catalan sayılarının aldığı bazı değerler aşağıdaki Çizelge 2.6 ile sunulmuştur:

Çizelge 2.6. C_n için bazı sayısal değerler

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

Tanım 2.12. *$\boldsymbol{l}\,(n,k)$ ile gösterilen Leibnitz sayıları aşağıdaki şekilde tanımlanır:*

$$\boldsymbol{l}\,(n,k)=\frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}} \tag{2.27}$$

(Charalambides 2002).

$k=0,1,\ldots,n$ ve $n\in\mathbb{N}_0$ olmak üzere, Leibnitz sayıları

$$\boldsymbol{l}\,(n,k)=\sum_{v=0}^{k}\frac{(-1)^{k-v}}{n-v+1}\binom{k}{v} \tag{2.28}$$

sonlu toplam yardımıyla da tanımlanır (Charalambides 2002).

(2.27) bağıntısı kullanılarak, Leibnitz sayıları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır

$$F_l(t,u)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\boldsymbol{l}\,(n,k)\,t^k u^n=\frac{\log(1-u)+\log(1-ut)}{(1-u)(1-tu)-1} \tag{2.29}$$

(Charalambides 2002).

Tanım 2.13. *$L(t)$ ile gösterilen Leibnitz polinomları aşağıdaki ş ekilde tanımlanır:*

$$L_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\boldsymbol{l}\,(n,k)\,t^k \tag{2.30}$$

(Simsek 2021). Yani $L_n(t)$ polinomlarının katsayıları, derecesi n olan Leibnitz sayılarıdır.

Ayrıca, (2.29) denklemi yardımıyla, $L_n(t)$ polinomları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$F_l(t,u)=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(t)u^n \tag{2.31}$$

(Simsek 2021).

Özel olarak, (2.30) bağıntısında $t = 0$ ve $t = 1$ alınırsa,

$$L_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{l}\,(n,k) \tag{2.32}$$

ve

$$L_n(0) = \boldsymbol{l}\,(n,0) = \frac{1}{1+n} \tag{2.33}$$

elde edilir (Simsek 2021).

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, üreteç fonksiyonları ile bunların bazı fonksiyonel denklemleri kullanılarak, Leibnitz tipli sayı ve polinomların bazı temel özellikleri incelenecektir. Bu sayılar ve polinomları ile Bernoulli sayıları, Euler sayıları, Stirling sayıları ve özel sonlu toplamlar arasındaki ilişkileri içeren bazı formüller verilecektir

3.1. Leibnitz Sayılarının Temel Özellikleri

Charalambides'in kitabında [p. 127, Exercise 16] yer alan problem aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$k = 0, 1, \ldots, n$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun.

$$\boldsymbol{l}(n,0) = \frac{1}{n+1}$$

olmak üzere, Leibnitz sayıları için rekürans bağıntısı aşağıdaki şekilde verilir:

$$\boldsymbol{l}\,(n,k) = \frac{k}{n+1}\boldsymbol{l}(n-1,k-1). \tag{3.1}$$

Bu rekürans bağıntısı Charalambides (2002) tarafından verilmiştir. Bu rekürans bağıntısının ispatı için (2.28) bağıntısı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{l}(n-1,k-1) &= \sum_{v=0}^{k-1} \frac{(-1)^{k-v-1}}{n-v}\binom{k-1}{v} \\
&= \frac{(-1)^{k-1}}{n}\binom{k-1}{0} + \frac{(-1)^{k-2}}{n-1}\binom{k-1}{1} + \frac{(-1)^{k-3}}{n-2}\binom{k-1}{2} \\
&\quad + \cdots + \frac{-1}{n-k}\binom{k-1}{k-2} + \frac{1}{n-k+1}\binom{k-1}{k-1} \\
&= \frac{(-1)^{k-1}}{n} + \frac{(-1)^{k-2}}{n-1}(k-1) + \frac{(-1)^{k-3}}{n-2}\binom{k-1}{2} \\
&\quad + \cdots + \frac{-1}{n-k}(k-1) + \frac{1}{n-k+1}
\end{aligned}$$

eld edilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\boldsymbol{l}(n,0) = \frac{1}{n+1}$$

olmak üzere

$$\frac{n+1}{k}\boldsymbol{l}\,(n,k) = \boldsymbol{l}(n-1,k-1)$$

olarak bulunur. O halde elde edilen bu son bağıntıdan, istenilen rekürans bağıntısı bulunur.

(3.1) ya da (2.27) bağıntısı kullanılarak, $\boldsymbol{l}\,(n,k)$, Leibnitz sayılarının aldığı bazı değerler aşağıdaki Çizelge 3.7 ile sunulmuştur:

Çizelge 3.7. $\boldsymbol{l}\,(n,k)$ için bazı sayısal değerler

$n\backslash k$	0	1	2	3	4
0	1	∞	∞	∞	∞
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	∞	∞	∞
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	∞	∞
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	∞
4	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$

(2.30) ve (2.27) bağıntısı kullanılarak, $L_n\,(t)$ polinomlarının aldığı bazı değerler aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$
\begin{aligned}
L_0\,(t) &= 1, \\
L_1\,(t) &= \frac{1}{2}+\frac{t}{2}, \\
L_2\,(t) &= \frac{1}{3}+\frac{t}{6}+\frac{t^2}{3}, \\
L_3\,(t) &= \frac{1}{4}+\frac{t}{12}+\frac{t^2}{12}+\frac{t^3}{4}, \\
L_4\,(t) &= \frac{1}{5}+\frac{t}{20}+\frac{t^2}{30}+\frac{t^3}{20}+\frac{t^4}{5}, \\
L_5\,(t) &= \frac{1}{6}+\frac{t}{30}+\frac{t^2}{60}+\frac{t^3}{60}+\frac{t^4}{30}+\frac{t^5}{6}, \\
L_6\,(t) &= \frac{1}{7}+\frac{t}{42}+\frac{t^2}{105}+\frac{t^3}{140}+\frac{t^4}{105}+\frac{t^5}{42}+\frac{t^6}{7}, \\
L_7\,(t) &= \frac{1}{8}+\frac{t}{56}+\frac{t^2}{168}+\frac{t^3}{280}+\frac{t^4}{280}+\frac{t^5}{168} \\
&\quad +\frac{t^6}{56}+\frac{t^7}{8}, \\
L_8\,(t) &= \frac{1}{9}+\frac{t}{72}+\frac{t^2}{252}+\frac{t^3}{504}+\frac{t^4}{630}+\frac{t^5}{504}+\frac{t^6}{252} \\
&\quad +\frac{t^7}{72}+\frac{t^8}{9},
\end{aligned}
$$

ve

$$\begin{aligned} L_9(t) &= \frac{1}{10}+\frac{t}{90}+\frac{t^2}{360}+\frac{t^3}{840}+\frac{t^4}{1260}+\frac{t^5}{1260}+\frac{t^6}{840} \\ &\quad +\frac{t^7}{360}+\frac{t^8}{90}+\frac{t^9}{10}, \\ L_{10}(t) &= \frac{1}{11}+\frac{t}{110}+\frac{t^2}{495}+\frac{t^3}{1320}+\frac{t^4}{2310}+\frac{t^5}{2772}+\frac{t^6}{2310} \\ &\quad +\frac{t^7}{1320}+\frac{t^8}{495}+\frac{t^9}{110}+\frac{t^{10}}{11}. \end{aligned}$$

Not 3.14. *$Ln(t)$ polinomları için verilen yukarıdaki listede yer alan polinomlardan da görülebileceği gibi $t=0$ alındığında*

$$L_n(0)=\frac{1}{n+1} \tag{3.2}$$

olarak bulunur. Diğer yandan; yukarıdaki listede yer alan polinomların katsayılarının paydalarında yer alan sayılar ile herhangi bir özel sayı dizisi arasında ilişki var mıdır? sorusu akla gelmektedir. Örneğin; $L_{10}(t)$ polinomunun katsayılarının paydalarında yer alan

$$\{11,110,495,1320,2310,2772,2310,1320,495,110,11\} \tag{3.3}$$

sayıları herhangi bir özel sayı dizisi ile ilişkili midir? Bu problem, bu tez kapsamında araştırılmamıştır ancak ileride çalışılması planlanmaktadır.

Teorem 3.15. *$n\in\mathbb{N}_0$ olmak üzere,*

$$\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{l}(n,k)\,t^k=\frac{1}{t+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n-k+1}\left(\frac{t}{t+1}\right)^k\left(1+t^{n-k+1}\right) \tag{3.4}$$

dir (Simsek 2021).

İspat (2.21) ve (2.29) bağıntıları kullanılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{l}(n,k)\,t^k u^n=\frac{1}{t+1}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n-k+1}\left(\frac{t}{t+1}\right)^k\left(1+t^{n-k+1}\right)u^n$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde u^n'nin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır (Simsek 2021). □

Özel olarak (3.4) denkleminde $t=1$ alınırsa,

$$\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{l}(n,k)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k+1)\,2^k}$$

elde edilir. Bu sonuç Leibnitz sayıları için bir sonlu toplamdır (Simsek 2021).

Teorem 3.16. $n \in \mathbb{N}_0$ *olmak üzere,*

$$\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{l}\left(n,k\right)t^{k} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{v=0}^{j}\left(-1\right)^{j}\frac{\left(t^{n-j}+t^{n+1}\right)}{j!\left(1+t\right)^{n-j+1}}B_{v}S_{1}\left(j,v\right) \tag{3.5}$$

dir (Simsek 2021).

İspat (2.29) bağıntısında verilen üreteç fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılır:

$$F_{l}(t,u) = \frac{1}{1+t-ut}\left(\frac{\log(1-u)}{-u}+\frac{t\log(1-ut)}{-ut}\right). \tag{3.6}$$

O halde (2.20), (2.29) ve (3.6) bağıntıları yardımıyla,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\boldsymbol{l}\left(n,k\right)t^{k}u^{n} &= \frac{1}{1+t-ut}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{n}\frac{\left(-1\right)^{n}}{n!}B_{v}S_{1}\left(n,v\right)u^{n}\\ &+ \frac{t}{1+t-ut}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{n}\left(-1\right)^{n}\frac{B_{v}S_{1}\left(n,v\right)u^{n}}{n!}t^{n}\end{aligned} \tag{3.7}$$

elde edilir. Buradan,

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^{2}+\cdots x^{n}, \quad |x|<1$$

geometrik serisi ve (3.7) kullanılarak,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\boldsymbol{l}\left(n,k\right)t^{k}u^{n} &= \frac{1}{1+t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n}}{\left(1+t\right)^{n}}u^{n}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{n}\frac{\left(-1\right)^{n}}{n!}B_{v}S_{1}\left(n,v\right)u^{n}\\ &+\frac{t}{1+t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n}}{\left(1+t\right)^{n}}u^{n}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{n}\left(-1\right)^{n}\frac{B_{v}S_{1}\left(n,v\right)u^{n}}{n!}t^{n}.\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki bağıntıda Cauchy çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\boldsymbol{l}\left(n,k\right)t^{k}u^{n} &= \frac{1}{1+t}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\sum_{v=0}^{j}\frac{\left(-1\right)^{j}}{j!}\frac{t^{n-j}}{\left(1+t\right)^{n-j}}B_{v}S_{1}\left(j,v\right)u^{n}\\ &+\frac{t}{1+t}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\sum_{v=0}^{j}\frac{\left(-1\right)^{j}t^{n}}{\left(1+t\right)^{n-j}}\frac{B_{v}S_{1}\left(j,v\right)}{n!}u^{n}.\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki denklemde u^{n}'nin katsayıları karşılaştırılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{k=0}^{n}\boldsymbol{l}\left(n,k\right)t^{k} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{v=0}^{j}\frac{\left(-1\right)^{j}B_{v}S_{1}\left(j,v\right)}{j!\left(1+t\right)^{n-j+1}}\left(t^{n-j}+t^{n+1}\right).$$

olarak bulunur. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur (Simsek 2021). $\square$

Önerme 3.17. $n \in \mathbb{N}_0$ *olmak üzere,*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{(n+1)\binom{n}{k}} = \frac{1}{1+t} \sum_{j=0}^{n} \frac{1+t^{j+1}}{j+1} \left(\frac{t}{1+t}\right)^{n-j} \tag{3.8}$$

dir (Simsek 2021).

İspat (2.27) bağıntısında verilen

$$\boldsymbol{l}(n,k) = \frac{1}{(n+1)\dbinom{n}{k}}$$

ve (3.4) bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{(n+1)\dbinom{n}{k}} &= \frac{1}{t+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n-k+1} \left(\frac{t}{t+1}\right)^k \left(1+t^{n-k+1}\right) \\ &= \frac{1}{t+1} \left(\frac{\left(1+t^{n+1}\right)}{n+1} + \frac{t\left(1+t^n\right)}{n\left(t+1\right)} + \cdots + \left(\frac{t}{t+1}\right)^n (1+t)\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{(n+1)\dbinom{n}{k}} = \frac{1}{1+t} \sum_{j=0}^{n} \frac{1+t^{j+1}}{j+1} \left(\frac{t}{1+t}\right)^{n-j}$$

bulunur. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur (Simsek 2021). □

Özel olarak (3.8) denkleminde $t = 1$ alınırsa,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}} = \sum_{j=0}^{n} \frac{2^{j-n}}{j+1} \tag{3.9}$$

sonlu toplamı elde edilir (Simsek 2021).

3.2. Genelleştirilmiş Leibnitz Tipli Sayıların Temel Özellikleri

Bu bölümde, gama ve beta fonksiyonları, integral formülleri, Stirling sayıları, Bernoulli sayıları, Euler sayıları, Genocchi sayıları ve Bernstein polinomları yardımıyla, genelleştirlmiş Leibnitz tipli sayıların ve bunların bazı temel özellikleri verilecektir. Leibnitz tipli sayıların ilişkili olduğu sonlu toplamlar ve binom katsayılarını içeren bazı ilginç sonlu toplamlar da elde edilmiştir.

(2.2) ve (2.3) bağıntıları kullanılarak, aşağıdaki bağıntı elde edilmiştir:

$$\int_{a}^{b} B_k^n(x;a,b)dx = \sum_{j=0}^{k}\sum_{v=0}^{n-k}(-1)^{n-j-v}\binom{k}{j}\binom{n-k}{v}\left(\frac{a^{k-j}b^{n+j-k+1}-a^{n-v+1}b^{v}}{n+j-k-v+1}\right)$$

(Simsek 2014).

Bu bağıntı yardımıyla genelleştirilmiş Leibnitz tipli sayılar aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Tanım 3.18. *a ve b negatif olmayan reel parametreler ve $a < b$ olsun. $\mathcal{L}(n,k;a,b)$ ile gösterilen genelleştirilmiş Leibnitz sayıları aşağıdaki gibi tanımlanır:*

$$\mathcal{L}(n,k;a,b) = \sum_{j=0}^{k}\sum_{v=0}^{n-k}(-1)^{n-j-v}\binom{k}{j}\binom{n-k}{v}\frac{a^{k-j}b^{n+j-k+1}-a^{n-v+1}b^{v}}{n+j-k-v+1} \tag{3.10}$$

(Simsek 2021).

Özel olarak (3.10) denkleminde $a = 0$ ve $b = 1$ alınırsa (2.28) denkleminde verilen bağıntıya indirgenir. Yani,

$$\mathcal{L}(n,k;0,1) = \boldsymbol{l}\,(n,k)$$

elde edilir. Ayrıca, yukarıda elde edilen bu bağıntı ile (2.27) bağıntısı birleştirilirse

$$\frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}} = \sum_{v=0}^{n-k}(-1)^{n-k-v}\binom{n-k}{v}\frac{1}{n-v+1} \tag{3.11}$$

bulunur (Simsek 2021).

$k = 1$ ve $n = 1,2,3,4$ sayıları için $\mathcal{L}\,(n,k;a,b)$ genelleştirilmiş Leibnitz sayılarının aldığı bazı değerler aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(0,1;a,b) &= 0, \\
\mathcal{L}(1,1;a,b) &= a^2-ab+\frac{1}{2}\left(-a^2+b^2\right), \\
\mathcal{L}(2,1;a,b) &= a^2b-ab^2+\frac{1}{2}\left(-a^3+ab^2\right) \\
&\quad +\frac{1}{3}\left(a^3-b^3\right)+\frac{1}{2}\left(-a^2b+b^3\right), \\
\mathcal{L}(3,1;a,b) &= -a^3b+a^2b^2+\frac{1}{3}\left(a^4-ab^3\right)+\frac{1}{4}\left(-a^4+b^4\right) \\
&\quad -\frac{2}{3}\left(-a^3b+b^4\right)+\frac{1}{2}\left(-a^2b^2+b^4\right), \\
\mathcal{L}(4,1;a,b) &= a^4b+a^3b^2+a^2b^3-2ab^4-b^5+\frac{1}{4}\left(-a^5+ab^4\right) \\
&\quad +\frac{3}{2}\left(-a^3b2+ab^4\right)+\frac{1}{5}\left(a^5-b^5\right)+\frac{3}{4}\left(-a^4b+b^5\right) \\
&\quad +\frac{1}{2}\left(-a^2b^3+b^5\right).
\end{aligned}
$$

$k=2$ ve $n=1,2,3,4$ sayıları için $\mathcal{L}(n,k;a,b)$ genelleştirilmiş Leibnitz sayılarının aldığı bazı değerler aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(0,2;a,b) &= 0, \\
\mathcal{L}(1,2;a,b) &= 0, \\
\mathcal{L}(2,2;a,b) &= a^2b-ab^2+\frac{1}{3}\left(-a^3+b^3\right), \\
\mathcal{L}(3,2;a,b) &= a^2b^2-ab^3+\frac{1}{2}\left(a^4+a^2b^2\right)+\frac{2}{3}\left(-a^4+ab^3\right) \\
&\quad +\frac{1}{4}\left(a^4-b^4\right)+\frac{1}{3}\left(-a^3b+b^4\right), \\
\mathcal{L}(4,2;a,b) &= a^4b-ab^4+\frac{1}{3}\left(-a^5+a^2b^3\right)+\frac{1}{2}\left(a^5-ab^4\right) \\
&\quad +\frac{4}{3}\left(-a^4b+ab^4\right)+\frac{1}{2}\left(a^4b-b^5\right)+\frac{1}{5}\left(-a^5+b^5\right) \\
&\quad +\frac{1}{3}\left(-a^3b^2+b^5\right).
\end{aligned}
$$

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, iyi bilinen bazı özel sayı ailelerinin üreteç fonksiyonları ve bazı temel özellikleri kullanılarak, Catalan sayıları, Bernoulli sayıları, Euler sayıları, Genocchi sayıları, birinci tür Stirling sayıları, ikinci tür Stirling sayıları ve Leibnitz sayıları arasındaki ilişkiler verilecektir. Ayrıca, Leibnitz sayıları için rekürans bağıntısı verilecektir.

Teorem 4.19. $n \in \mathbb{N}_0$ *olmak üzere,*

$$\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{l}(n,k)\, t^k = \sum_{j=0}^{n}\sum_{v=0}^{j}\sum_{s=0}^{v} (-1)^j \binom{v}{s} \frac{2^{-v}\left(t^{n-j}+t^{n+1}\right)}{j!\,(1+t)^{n-j+1}} B_s E_{v-s} S_1(j,v) \tag{4.1}$$

dir.

İspat (2.10) denkleminde verilen

$$B_n = 2^{-n} \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} B_n E_{n-s}$$

bağıntısı ve (3.5) denklemi kullanılarak,

$$\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{l}(n,k)\, t^k = \sum_{j=0}^{n}\sum_{v=0}^{j}\sum_{s=0}^{v} \binom{v}{s} \frac{(-1)^j\, 2^{-v}\left(t^{n-j}+t^{n+1}\right)}{j!\,(1+t)^{n-j+1}} B_s E_{v-s} S_1(j,v)$$

elde edilir. Buradan verilen teoremin sonucu elde edilir. □

Özel olarak (4.1) bağıntısında $t = 1$ alınırsa, Leibnitz sayılarını içeren aşağıdaki sonlu toplam elde edilir:

Teorem 4.20. $n \in \mathbb{N}_0$ *olmak üzere,*

$$\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{l}(n,k) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{v=0}^{j}\sum_{s=0}^{v} \binom{v}{s} \frac{(-1)^j\, 2^{j-v-n}}{j!} B_s E_{v-s} S_1(j,v) \tag{4.2}$$

dir.

(4.2) ve (2.15) bağıntıları kullanılarak, Leibnitz sayılarını içeren sonlu toplam ile Bernoulli sayıları, Genocchi sayıları ve birinci tür Stirling sayıları arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilir:

Teorem 4.21. $n \in \mathbb{N}_0$ *olmak üzere,*

$$\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{l}(n,k) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{v=0}^{j}\sum_{s=0}^{v} (-1)^j \binom{v}{s} \frac{2^{j-v-n}}{j!\,(v-s+1)} B_s G_{v-s+1} S_1(j,v)$$

dir.

Teorem 4.22. $n \in \mathbb{N}_0$ *olmak üzere,*

$$\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{l}(n,k)\, t^k = \sum_{j=0}^{n}\sum_{v=0}^{j}\sum_{m=0}^{v} (-1)^{j+m} \frac{\left(t^{n-j}+t^{n+1}\right) m!}{j!\,(1+t)^{n-j+1}\,(m+1)} S_2(v,m)\, S_1(j,v) \tag{4.3}$$

dir.

İspat (2.24) bağıntısı (3.5) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{l}(n,k)\, t^k &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{v=0}^{j}\sum_{m=0}^{v} (-1)^{j+m} \frac{\left(t^{n-j}+t^{n+1}\right)}{j!\,(1+t)^{n-j+1}} \\ &\quad \times \frac{m!}{m+1} S_2(v,m)\, S_1(j,v)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan verilen teoremin sonucu elde edilir. □

Teorem 4.3 bağıntısı (2.30) denklemi ile birleştirilirse, aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir:

$$L_n(t) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{v=0}^{j}\sum_{m=0}^{v} (-1)^{j+m} \frac{\left(t^{n-j}+t^{n+1}\right) m!}{j!\,(1+t)^{n-j+1}\,(m+1)} S_2(v,m)\, S_1(j,v)\,.$$

Özel olarak (4.3) bağıntısında $t = 1$ alınırsa, Leibnitz sayılarının içeren aşağıdaki sonlu toplam elde edilir:

Önerme 4.23. $n \in \mathbb{N}_0$ *olmak üzere,*

$$\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{l}(n,k) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{v=0}^{j}\sum_{m=0}^{v} (-1)^{j+m} \frac{2^{j-n} m!}{j!\,(m+1)} S_2(v,m)\, S_1(j,v) \tag{4.4}$$

dir.

Ayrıca, (4.4) ve (2.27) bağıntıları yardımıyla, aşağıdaki sonlu toplam elde edilir:

Önerme 4.24. $n \in \mathbb{N}_0$ *olmak üzere,*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{v=0}^{j}\sum_{m=0}^{v} (-1)^{j+m} \frac{2^{j-n} m!}{j!\,(m+1)} S_2(v,m)\, S_1(j,v) \tag{4.5}$$

dir.

Teorem 4.25. $n \in \mathbb{N}$ *olmak üzere,*

$$\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{l}(n,k) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{l}(n-1,k) = \frac{1}{n+1} \tag{4.6}$$

dir (Simsek 2021).

İspat (2.29) bağıntısında verilen üreteç fonksiyonunda $t = 1$ alınırsa, aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$F_l(1,u) = \frac{1}{1-\frac{u}{2}}\left(\frac{\log(1-u)}{-u}\right).$$

Bu fonksiyonel denklem yardımıyla,

$$\left(1-\frac{u}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\boldsymbol{l}\,(n,k)\,u^n = \frac{\log(1-u)}{-u}$$

olarak yazılır. Yukarıdaki bağıntının sağ tarafında (2.21) denklemi kullanılırsa,

$$\left(1-\frac{u}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\boldsymbol{l}\,(n,k)\,u^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n+1}$$

bulunur. Buradan,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\boldsymbol{l}\,(n,k)\,u^n - \frac{u}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\boldsymbol{l}\,(n,k)\,u^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n+1}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\boldsymbol{l}\,(n,k)\,u^n - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\boldsymbol{l}\,(n-1,k)\,u^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^n}{n+1}$$

bulunur. Elde edilen bu denklemin u^n'nin katsayıları karşılaştırılırsa, $n \geq 1$ için,

$$\sum_{k=0}^{n}\boldsymbol{l}\,(n,k) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\boldsymbol{l}\,(n-1,k) = \frac{1}{n+1}$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur. □

Teorem 4.26. $n \in \mathbb{N}_0$ *olmak üzere,*

$$\boldsymbol{l}(2n,n) = \frac{1}{(2n+1)(n+1)C_n} \tag{4.7}$$

dir.

İspat (2.27) bağıntısında $n = 2n$ ve $k = n$ alınırsa,

$$\boldsymbol{l}\,(2n,n) = \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

olur. Elde edilen bu son denklem ile (2.26) bağıntısı birleştirilirse, Leibnitz sayıları ve Catalan sayıları arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde verilir:

$$\boldsymbol{l}(2n,n)=\frac{1}{(2n+1)(n+1)C_n}.$$

Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur. □

Teorem 4.27. $n \in \mathbb{N}_0$ *olmak üzere,*

$$\frac{1}{(2n+1)(n+1)}=\sum_{v=0}^{n}(-1)^{n-v}\binom{n}{v}\frac{C_n}{2n-v+1} \tag{4.8}$$

dir (Simsek 2018c).

İspat (3.11) bağıntısında $n=2n$ ve $k=n$ alınırsa,

$$\frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}=\sum_{v=0}^{n}(-1)^{n-v}\binom{n}{v}\frac{1}{2n-v+1}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklem ile (2.26) bağıntısı birleştirilirse, Catalan sayılarını içeren ve iyi bilinen sonlu toplam aşağıdaki şekilde verilir:

$$\frac{1}{(2n+1)(n+1)}=\sum_{v=0}^{n}(-1)^{n-v}\binom{n}{v}\frac{C_n}{2n-v+1}.$$

Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur. □

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, Leibnitz tipli sayılar ve polinomlar ile bunların ilişkili olduğu bazı özel sonlu toplamlar çalışılmıştır. Leibnitz tipli sayıların ve polinomların üreteç fonksiyonları ve bunların bazı temel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, Catalan sayıları, Bernoulli sayıları ve polinomları, Euler sayıları ve polinomları, Genocchi sayıları ve polinomları, birinci tür Stirling sayıları, ikinci tür Stirling sayıları, Bernstein polinomları gibi bazı özel sayı ve polinom ailelerinin üreteç fonksiyonları ve bunların sağladığı fonsiyonel denklemlerin temel özellikleri verilmiştir. Bunlara ek olarak, Leibnitz tipli sayılar, Bernoulli sayıları, Euler sayıları, Genocchi sayıları, birinci ve ikinci tür Stirling sayılarını ve bazı özel toplamları içeren yeni formüller, bağıntılar özdeşlikler verilmiştir.

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçların bazıları aşağıdaki gibi özetlenmiştir:

Leibnitz tipli sayılar, Bernoulli sayıları, Euler sayıları ve birinci tür Stirling sayılarını içeren bağıntılar Teorem 4.19 ve Teorem 4.20 ile ifade edilmiştir.

Leibnitz tipli sayılar, Bernoulli sayıları, Genocchi sayıları ve birinci tür Stirling sayılarını içeren bağıntı Teorem 4.21 ile ifade edilmiştir.

Leibnitz tipli sayılar, birinci tür Stirling sayıları ve ikinci tür Stirling sayılarını içeren bağıntı Teorem 4.22 ile ifade edilmiştir.

Leibnitz tipli sayılar ve Catalan sayılarını içeren bağıntılar Teorem 4.26 ve Teorem 4.27 ile ifade edilmiştir.

Sonuç olarak, bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar analiz ve fonksiyonlar teorisi, sayılar teorisi, istatistik ve olasılık teorisi gibi birçok alanda kullanılabilir.

6. KAYNAKLAR

Abramowitz, M. and Stegun, I. A. 1970. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. Dover Publication, New York.

Ball, W. W. R. 1960. A Short Account of the History of Mathematics. Dover Publications, Inc. New York, 458 p.

Bernstein, S. N. 1912. *Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. Communications of the Kharkov Mathematical Society*, 3: 1–7.

Boyadzhiev, K. N. 2012. *Close encounters with the Stirling Numbers of the second kind. Math. Mag.*, 85: 252–266.

Charalambides, C. A. 2002. Enumerative Combinatorics. Chapman & Hall /CRC, Boca Raton, London New York.

Charalambides, C. A. 2005. Combinatorial Methods in Discrete Distributions. Wiley-Interscience.

Comtet, L. 1974. Advanced Combinatorics. D. Reidel Publication Company, Dordrecht-Holland, Boston- U.S.A.

Goldman, R. 2002. Pyramid Algorithms: A Dynamic Programming Approach to Curves and Surfaces for Geometric Modeling. Morgan Kaufmann Publishers, R. Academic Press, SanDiego.

Graham, R. L., Knuth, D. E. and Patashnik, O. 1994. Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science. 2nd ed. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts.

Horadam, A. F. 1991. Genocchi Polynomials, G. E. Bergum et ai. (eds.) Applications of Fibonacci Numbers Volume 4. 145-166, Kluwer Academic Publishers.

Jordan, C. 1950. Calculus of Finite Differences. Chelsea Publishing Company, New York, (Second Edition).

Koshy, T. 2009. Catalan Numbers with Applications. New York, NY, USA: Oxford University Press.

Kucukoglu, I., Simsek, B. and Simsek, Y. 2019. *An approach to negative hypergeometric distribution by generating function for special numbers and polynomials. Turk. J. Math.*, 43: 2337–2353.

Kucukoglu, I. and Simsek, Y. 2019. *On a family of special numbers and polynomials associated with Apostol- type numbers and poynomials and combinatorial numbers. Appl. Anal. Discrete Math.*, 13: 478–494.

Milne-Thomson, L. M. 1933. The Calculus of Finite Differences. Macmillan and Co., Limited St. Martin's Street, London.

Norlund, N. E. 1924. Vorlesungen Uber Differenzenrechnung. Springer-Verlag 315 Berlin Heidelberg.

Rainville, E. D. 1960. Special Functions. The Macmillan Company, New York.

Riordan, J. 1958. An Introduction to Combinatorial Analysis. JohnWiley Sons Inc., New York.

Simsek, Y. 2011. *Construction a new generating function of Bernstein type polynomials. Appl. Math. Comput.*, 218 (3): 1072–1076.

Simsek, Y. 2013a. *Unification of the Bernstein-type polynomials and their applications. Bound. Value Probl.,* 2013 (56): Doi: 10.1186/1687-2770-2013-56.

Simsek, Y. 2013b. *Functional equations from generating functions: a novel approach to deriving identities for the Bernstein basis functions. Fixed Point Theory Appl.* 2013 (80): 1–13.

Simsek, Y. 2014a. *Deriving novel formulas and identities for the Bernstein basis functions and their generating functions. Lecture Notes in Computer Science Springer-Verlag, Berlin,* 8177: 471–490.

Simsek, Y. 2014b. *Generating functions for the Bernstein type polynomials: a new approach to deriving identities and applications for these polynomials. Hacet. J. Math. Stat.*, 43 (1): 1–14.

Simsek, Y. 2014c. *A new class of polynomials associated with Bernstein and beta polynomials. Math. Methods Appl. Sci.*, 37: 676–685.

Simsek, Y. 2015a. *Beta-type polynomials and their generating functions. Appl. Math. Comput.*, 254: 172–182.

Simsek, Y. 2015b. *Analysis of the Bernstein basis functions: an approach to combinatorial sums involving binomial coefficients and Catalan numbers. Math. Meth. Appl. Sci*. 38 (14): 3007–3021.

Simsek, Y. 2018a. *New families of special numbers for computing negative order Euler numbers and related numbers and polynomials. Appl. Anal. Discrete Math.*, 12: 1–35, https://doi.org/10.2298/AADM1801001S.

Simsek, Y. 2018b. *Combinatorial identities and sums for special numbers and polynomials. Filomat,* 32 (20): 6869–6877.

Simsek, Y. 2018c. *Combinatorial sums and binomial identities associated with the Beta-type polynomials. Hacet. J. Math. Stat.,* 47 (5): 1144–1155.

Simsek, Y. 2021. *Construction of generalization Leibnitz type numbers and their properties. Adv. Stud. Contemp. Math.*, 31 (3): 311–323.

Srivastava, H. M. and Choi, J. 2001. Series Associated with the Zeta and Related Functions. Kluwer Acedemic Publishers, Dordrecht, Boston and London.

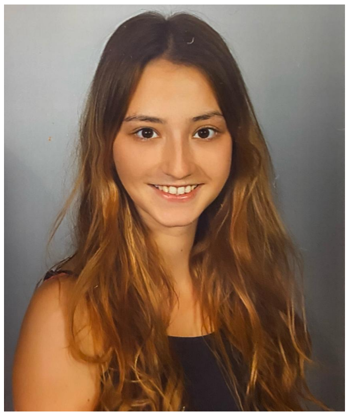
Weisstein, E. W. Leibniz Harmonic Triangle, From MathWorld-A Wolfram Web Resource, https://mathworld.wolfram.com/LeibnizHarmonicTriangle.html, Erişim Tarihi: 20.01.2022.

Weisstein, E. W. Pronic Number, From MathWorld-A Wolfram Web Resource, https://mathworld.wolfram.com/PronicNumber.html, Erişim Tarihi: 20.01.2022.

Zhao, F.-Z. and Wuyungaowa. 2010. Some identities for Leibniz numbers. *Ars Combinatoria*, 97.

Zou, Q. 2017. *Identities on Genocchi polynomials and Genocchi numbers concerning binomial coefficients, Int. J. Anal. Appl.*, 14 (2): 140–146.

ÖZGEÇMİŞ



DENİZ KAYA

d.kaya.0764@gmail.com

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2019-2022	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans 2013-2017	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya