AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

Müşerref GÖNÜLAÇAR

MATEMATİĞİN TEMELLERİ TARTIŞMASINDA BİÇİMSELCİ VE SEZGİCİ YAKLAŞIMLAR ÜZERİNE BİR SORUŞTURMA

Felsefe Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Antalya, 2022

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

Müşerref GÖNÜLAÇAR

MATEMATİĞİN TEMELLERİ TARTIŞMASINDA BİÇİMSELCİ VE SEZGİCİ YAKLAŞIMLAR ÜZERİNE BİR SORUŞTURMA

<u>Danışman</u>
Dr. Öğr. Üyesi Ali Bilge ÖZTÜRK

Felsefe Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Antalya, 2022

Akdeniz Üniversitesi

Sosyal Bilimler Enstitüsü Müdürlüğüne,

Müşerref GÖNÜLAÇAR' ın bu çalışması, jürimiz tarafından Felsefe Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Hasan ASLAN
Üye (Danışmanı)	: Dr. Öğr. Üyesi Ali Bilge ÖZTÜRK
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Kemal ÇİNÇİN

Tez Başlığı:	Matematiğin Temelleri Tartışmasında Biçimselci ve Sezgici Yaklaşımlar Üzerine Bir Soruşturma

Onay: Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

Tez Savunma Tarihi : 28/06/2022

Mezuniyet Tarihi : 21/07/2022

(İmza)

Müdür

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Matematiğin Temelleri Tartışmasında Biçimselci ve Sezgici Yaklaşımlar Üzerine Bir Soruşturma" adlı bu çalışmanın, akademik kural ve etik değerlere uygun bir biçimde tarafımca yazıldığını, yararlandığım bütün eserlerin kaynakçada gösterildiğini ve çalışma içerisinde bu eserlere atıf yapıldığını belirtir; bunu şerefimle doğrularım.

……/……/ 2022

İmza

Müşerref GÖNÜLAÇAR

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

TEZ ÇALIŞMASI ORİJİNALLİK RAPORU BEYAN BELGESİ

Öğrenci Bilgileri	
Adı-Soyadı	Müşerref GÖNÜLAÇAR
Öğrenci Numarası	20195231006
Anabilim Dalı	Felsefe
Programı	Yüksek Lisans
Danışman Öğretim Üyesi Bilgileri:	
Unvanı, Adı-Soyadı	Dr. Öğr. Üyesi Ali Bilge ÖZTÜRK
Yüksek Lisans Tez Başlığı	Matematiğin Temelleri Tartışmasında Biçimselci ve Sezgici Yaklaşımlar Üzerine Bir Soruşturma
Turnitin Bilgileri	
Ödev Numarası	10424584
Rapor Tarihi	19/07/2022
Benzerlik Oranı	Alıntılar hariç: %9 Alıntılar dahil: %12

SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE,

Yukarıda bilgileri bulunan öğrenciye ait tez çalışmasının a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana Bölümler ve d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 71 sayfalık kısmına ilişkin olarak Turnitin adlı intihal tespit programından Sosyal Bilimler Enstitüsü Tez Çalışması Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esaslarında belirlenen filtrelemeler uygulanarak yukarıdaki detayları verilen ve ekte sunulan rapor alınmıştır.
Danışman tarafından uygun olan seçenek işaretlenmelidir:
(x) Benzerlik oranları belirlenen limitleri aşmıyor ise:
Yukarıda yer alan beyanın ve ekte sunulan Tez Çalışması Orijinallik Raporunun doğruluğunu onaylarım.
( ) Benzerlik oranları belirlenen limitleri aşıyor, ancak tez/dönem projesi danışmanı intihal yapılmadığı kanısında ise:
Yukarıda yer alan beyanın ve ekte sunulan Tez Çalışması Orijinallik Raporunun doğruluğunu onaylar ve Uygulama Esaslarında öngörülen yüzdelik sınırlarının aşılmasına karşın, aşağıda belirtilen gerekçe ile intihal yapılmadığı kanısında olduğumu beyan ederim.

Gerekçe:

Benzerlik taraması yukarıda verilen ölçütlere uygun olarak tarafımca yapılmıştır. İlgili tezin orijinallik raporunun uygun olduğunu beyan ederim.

Danışman Öğretim Üyesi
Unvanı, Adı-Soyadı

İmza

İ Ç İ N D E K İ L E R

ŞEKİLLER LİSTESİ

TABLOLAR LİSTESİ

KISALTMALAR

Alm.	Almanca
ABD	Amerika Birleşik Devletleri
Fr.	Fransızca
İb.	İbranice
İng.	İngilizce
İt.	İtalyanca
Lat.	Latince
T.	Türkçe
Vb.	Ve benzeri

ÖZET

19. yüzyıla kadar matematikte etkili olan uygulamalı matematik eğilimine karşı 19. yüzyılın sonlarına doğru soyut(pür) matematik eğilimi güç kazanmıştır. Yine 19. yüzyılın sonlarından itibaren matematik dünyası matematiğin temel kavram ve ilkelerini belirsizlikten kurtaracak, çelişkilerden temizleyecek ve gelecekte ortaya çıkabilecek olası felsefi tartışmaları ve bilim içi tartışmaları önleyecek sağlam bir temel bulma gerekliliği hissetmiştir. Bu gereklilik matematik camiasında hararetli tartışmalar ortaya çıkarmıştır. Söz konu tartışmaların yol açtığı sonuçlardan biri, matematik camiasının felsefeyle etkileşiminin artması şeklindeyken diğer bir sonucu da bu etkileşimin sonucunda matematikte birtakım değişiklikler teklif eden çeşitli felsefi yaklaşımların geliştirilmesi olmuştur. Özelikle 20. yüzyılın başında bu yaklaşımlardan mantıksalcılık, biçimselcilik ve sezgicilik matematik dünyasında önemli taraftarlar toplamış ve ciddi bir matematik felsefesi literatürünün oluşmasına neden olmuştur.

Okuduğunuz yüksek lisans tezi öncelikle 18 ve 19. yüzyılda gerçekleşen ve matematiğin temelleri sorununun büyümesine neden olan önemli gelişmeleri tartışıp ardından biçimselci ve sezgici matematik felsefelerinin matematiğin temelleri sorununa dair yaklaşımlarını açık kılacak şekilde yapılandırmıştır.

Matematiğin temelleri tartışması sürerken arka planda David Hilbert ile L.E.J. Brouwer'in tartışmaları dönemin siyasi atmosferinden etkilenmiştir. Siyasi bir krize dönüşen bu tartışmanın matematiğin temelleri tartışmasına doğrudan etkisi ayrıca ortaya konulacaktır.

Anahtar Kelimeler: Matematik Felsefesi, David Hilbert, Biçimselcilik, LuitzenEgbertusJan Brouwer, Sezgicilik, Mantıksalçılık

SUMMARY

DISCUSSION ON THE FUNDAMENTALS OF MATHEMATICS ON FORMALIST AND INTUITIVE APPROACHES AN INVESTIGATION

Against the applied mathematics tendency, which was effective in mathematics until the 19th century, the abstract (pure) mathematics tendency gained strength towards the end of the 19th century. Again, since the end of the 19th century, the world of mathematics felt the need to find a solid foundation that would save the basic concepts and principles of mathematics from uncertainty, clear them from contradictions, and prevent possible philosophical discussions and intra-scientific debates that may arise in the future. This requirement has generated heated debate in the mathematical community. One of the results of these discussions, was the increase in the intrection of the mathematical community with philosophy and another results was the development of various philosophical approaches that offer a number of changes in mathematics as a result of this interection. Especially at the beginning of the 20th century, logicism, formalism and intuitionism, among these approaches, gathered important supporters in the world of mathematics and led to the formation of a serious literature on philosophy of mathematics

Your master's thesis first discussed the important developments that took place in the 18th and 19th centuries and that led to the growth of the problem of the foundations of mathematics, and then structured it in a way that makes clear the approaches of formalist and intuitionist philosophies of mathematics to the problem of foundations of mathematics.

While the debate on the foundations of mathematics continued, the debates of David Hilbert and L.E.J. Brouwer in the background were influenced by the political atmosphere of the period. The direct impact of this debate, which has turned into a political crisis, on the debate on the foundations of mathematics will also be revealed.

Keywords: Philosophy of Mathematics, David Hilbert, Formalism, Luitzen Egbertus Jan Brouwer, Intuition, Logicism

TEŞEKKÜR

Tezi oluştururken bütün safhalarında desteklerini benden esirgemeyen çok canım danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Ali Bilge ÖZTÜRK'e, kapısını her çaldığımda güleryüzle beni karşılayan saygı değer hocam Prof. Dr. Hasan ASLAN'a, savunma jürisinde değerli yorumları ve eleştirileri için Dr. Öğr. Üyesi Kemal ÇİNÇİN'e, enerjiisi ile ve her zaman öğrencilerinin yanındaki duruşuyla Dr. Öğr. Üyesi Ekin KAYNAK ILTAR'a, sıkıştığımda telefon görüşmeleri seferberliği ilan eden felsefe bölümünün bölüm sekreteri nadide Fatoş NAS'a, o yorucu geçen tez çalışmalarında madden ve maneviyen beni hiç yalnız bırakmayan sevgili ailem ve özellikle de okumayı çok istediği halde okula gönderilmeyen canım annem Kevser ERİN GÖNÜLAÇAR'a, pandemi ve pandemi sonrası kapalı alan fobisi edindiğim gerçeğiyle dersleri takip edebilmem ve sonrasında tezi yazabilmem için evini açan kız kardeşim Meral GÖNÜLAÇAR'a, sevgi ve iyiliğini hiç esirgemeden tezi yazmam konusunda motivasyonumu artıran Ali GÜZEL'e ve arkadaşlarıma teşekkürlerimi borç bilirim. Bu çalışmanın oluşturacağı değer yukarıda adı geçen isimlerin özverileri sayesindedir. Tüm kusurlar ve hatalar şahsıma aittir.

ÖNSÖZ

Küçükken hayatın kendisinin bir harikalar diyarı olduğunu düşünürdüm. Bunu benden önce Lewis Carroll yani asıl adıyla Charles Lutwidge Dodgson düşünmüş olmalı ki *Alice Harikalar Diyarı* adıyla yazdığı kitap ile kaos ve olağanüstülüğü bir arada verip küçük bir kızın evreni anlama çabasını kelimelerle, mantıkla ve oyunlar derinleştirerek bizi onun serüvenine davet etmişti. İnsanın evreni anlama çabasının da Alice'in yaşadığı serüvenden pek de farksız olmadığını düşünmekteyim. Bu arayış ve derinleşmenin hem kendisi hem de sonucu olan felsefe ve matematik hem farklı kulvarlarda hem de birlikte birçok yeni kapıyı açarak hayatın hem kendisi hem katalizörü olmuştur. Birçok filozofun matematik bilmesinin birçok matematikçinin de felsefe ile doğrudan ilişkisin olması bu arayış ve derinleşmenin sonuçlarıdır. Öyle ki ilk filozoflardan başlayarak Thales, Platon, Aristoteles Orta Çağ'a gelindiğinde Descartes, Kant, Leibniz, daha modern zamanlara gelindiğinde Frege, Russell matematiğin felsefesiz, felsefenin de matematiksiz olamayacağını savunarak çalışmalarını bu doğrultuda geliştirmişlerdir. Bu iş birliğinin ürettiği sorulardan olan 'Matematiğin doğası nedir? ' ya da 'Matematiğin temeli nedir? ' sorularını soruşturmak yine hem matematikçiler hem de felsefecilerin ilgi alanına girerek bugün matematik felsefesi denilen bir disiplinin oluşmasına neden olmuştur.

Tezin amacı 'Matematiğin temelleri ve doğası nedir? ' sorusuna yanıt arayışındaki kuramları soruşturmak ve bu soruşturmalardan iki büyük yaklaşım olan biçimselci ve sezgici yaklaşımların felsefi, mantıksal ve matematiksel bir soruşturmasını sunmaktır. Tezin konusu ve kapsamı üç maddede özetlenebilir:

1. Matematik tarihinin soyut ve uygulamalı matematik tarihi açısından ayrımı ve bu ayrımın matematiğin temelleriyle ilişkisi
2. Matematik temelleri tartışmasında ana yaklaşımlardan biçimselcilik ve sezgicilik yaklaşımları
3. Dönemin Birinci Dünya Savaşı siyasi atmosferi altında gelişen bu tartışmaların o dönem matematik dünyasına etkileri şeklindedir.

Bu tez çalışması konusu itibariyle hem felsefi hem matematiksel hem de biyografik temelde bir çalışmayı gerektirmektedir. Bu tez bu yönüyle özgün ve gelecek çalışmalar için öncü bir soruşturma ihtiva etmektedir. Bu çalışmayla birlikte matematik felsefesi alanında ve matematiğin temelleri tartışması bağlamında yeni bir başvuru kaynağı oluşturulması amaçlanmaktadır.

GİRİŞ

Bugün hem dünyada hem de Türkiye de matematik felsefesi çalışmaları niceliksel olarak artmaktadır. Bu alanın ele aldığı konular gün geçtikçe daha fazla ilgi toplamaktadır. Bunun pek çok nedeni vardır. Bunlardan bazıları şu şekilde sıralanabilir; Öncelikle matematiksel nesnelerin varlığının ve matematiksel bilginin nasıl mümkün olduğu sorusunun hala doyurucu bir yanıta ulaşmaması matematik felsefesini canlı tutarken bunun yanında insanın matematikle ilişkisinin felsefe dışında tarih, psikoloji, sosyoloji ve eğitim gibi bilimlerle doğrudan ilişkisinin olması da matematik felsefesini değerli kılmaktadır. Ayrıca dijitalleşen dünyanın matematikle ilişkisinin yoğunlaşması uygulamalı matematiğin sahasının genişlemesine neden olurken Euclides-dışı geometrilerle birden fazla matematiğin olabilirliği gerçeği de soyut matematiğin sahasının genişlemesine neden olmuştur. Uygulamalı matematikte yeni matematiksel modellere artan talep ve soyut matematikte matematiksel kesinliğin tartışmalı hale gelmesi matematik felsefesi tartışmalarını güdüleyen başlıca unsurlardandır.

Matematik felsefesi çalışmaları gerek çeşitli bilim felsefesi sorunlarına çözümler geliştirebilmek için gerekse bilim tarihindeki çeşitli gelişmeler hakkında daha geniş bir kavrayış geliştirebilmek için de önemli katkılar sağlamaktadır. Çünkü matematik ayrıştırılamaz şekilde bilimin merkezindedir. Hatta Willard Van Orman Quine'ın da belirttiği gibi "[b]ütün bilimler belirli bir derecede bağlantılıdır; hiçbir şey olmasa dahi, genel bir mantığı ve matematiğin belirli bir kısmını paylaşırlar" (Quine, 1981, s.71).

Okuduğunuz bu çalışma da bir matematik felsefesi çalışmasıdır. Bu alanın en temel sorunlarından biri olan matematiğin temelleri sorununa odaklanmaktadır. Çalışmanın temel sorusu 20.yüzyılın başında matematiğin temelleri tartışmalarını hararetlendiren unsurların neler olduğudur. Çalışmanın ana iddiası söz konusu unsurların başında dönemin politik ortamının gelmesidir. Dolayısıyla bu çalışmanın iddiasına göre tarih boyu nesnel bilginin başat örneği olan matematik dahi siyasal gelişmelerden ve tarihsel dönemlere dair konjonktürlerden etkilenebilmektedir. Böylece sıkça varsayılanın aksine ünlü matematiğin temelleri tartışması saf bir matematik içi tartışma olarak değerlendirilmemelidir.

İşaret edilen bu önemli noktayı görebilmek için öncelikle matematiğin temelleri tartışmasının ne olduğu ve nasıl ortaya çıktığı belirginleştirilmelidir. Bu amaçla sıradaki bölümde matematiğin temelleri tartışmasının ortaya çıkmasına neden olan 18. ve 19. yüzyıldaki gelişmeler açık kılınacaktır.

BİRİNCİ BÖLÜM

19. YÜZYILDA MATEMATİK FELSEFESİNİN TEMEL PROBLEMİ

1.1. Uygulamalı Matematiğin Temel Problemi

İnsanoğlunun dünyayla tanışması ve ardından da hayatını kolaylaştırma çabası onun matematikle bütünleşmesine neden olmuştur. Bu bütünleşme evreni anlama ve anladığın şeyi işe yarar hale getirme çabasıyla birleşince matematiğin hem uygulamalı hem de soyut alanında gelişmelere sebep olmuştur.

Uygulamalı matematiği tanımlamadan once matematiğin en sade haliyle bir tanımını yapmak gerekir. Matematik, en basit tanımla matematiksel nesneleri soruşturan bilimdir. Ancak matematik, matematiksel nesnelere dair (nicelik[1] ve uzay ile ilgili) sembolizmi de içerir (Davis, Hersh, & Marchisotto, 2015, s. 6).

Matematik için daha iyi bir tanım aramak gerekirse, matematik; kuşku götürmezlik, yalnışsızlık ve anlaşılırlık bakımından en üst düzeyde düşünsel ürünlerden oluşan bir bilgi alanı, bir disiplin, bir soyutlama ve bir düşünce biçimidir. Bu kavramların kullanımı üç önemli öbek oluşturur. Bunlar mantıksallık, biçimsellik ve simgeselliktir. Bu kavramların kullanımıyla oluşan matematik tanımı ise "Mantıksal(logical), biçimsel(formal) ve simgesel(symbolic) bir sistem olarak akıl yürütmeye dayalı bir oyundur" şeklinde olur (Güney Z. , 2016, s. 55).

Uygulamalı matematik ise matematiksel yöntemlerin farklı alanlarda uygulanmasıdır. Uygulamalı matematiğin alanlarından birkaçını şu şekilde sıralayabiliriz; Tıp, biyoloji, fizik, mühendislik, finans, işletme, bilgisayar bilimi, endüstri vb. dir. Görsel oluşturmak adına uygulamalı matematik için, matematik bilimi ve uzmanlık biliminin kesişim kümesi olduğu söyleyenebilir. Matematik, uygulama alanı olarak seçtiği bu alanlar sayesinde yöntem ve tekniklerini geliştirmeye devam eden bir bilim dalıdır.

1.1.1. Uygulamalı Matematiğin Tarihi

Devam etmeden önce uygulamalı matematiğin tarihini kısaca anlamak yararlı olacaktır. Çünkü matematik en azından 19. yüzyıla kadar ağırlıklı olarak uygulamalı bir bilim olarak devam etmiştir. Diğer bir değişle matematik yapmanın temel motivasyonu içinde yaşadığımız

---

[1]Nicelik kavramından *aritmetik* ve uzay bilimleri kavramından da *geometri* kastedilmektedir (Davis, Hersh, & Marchisotto, 2015, s. 6).

dünyayı anlamaya ve insanoğlunun karşılaştığı pratik sorunları çözmeye katkı sağlamaktır. Böylece uygulamalı matematiğin tarihini anlamak en azından 19. yüzyıla kadar devam eden matematik tarihini anlamak açısından önemlidir.

Matematiğin izini yaklaşık MÖ 3000'li yıllardan itibaren Mezopotamya ve Eski Mısır'da bulabiliriz. O dönem insanları matematiğin alt dallarından olan aritmetik, cebir ve geometriyi keşfetmiş ve kullanmışlardır. Matematiğin bu alt dallarını vergi, ticaret, doğayı anlama ve astronomide kullanıp matematiği uygulama sahasına dönüştürmüşlerdir. Aynı zamanda uygulamalı matematiğinde başlangıcı kabul edeceğimiz bu tarih Mezopotamya ve Eski Mısır'da bulunan papirüslerde de görülebileceği gibi matematiği pratik yaşam sorunlarını daha hızlı ve ekonomik olarak çözme ve kolaylaştırmanın bir yolu olarak gördükleri anlamına gelmektedir.

Miletli Thales'in (MÖ 624-546) batı geleneğindeki ilk filozof olduğu kadar ilk bilim insanı olma onuruna da sahip olduğu söylenir (Kline, 1985, s.53). Thales ile ilgili aktarılan pek çok biyografik veri matematiği dünyayı anlamaya katkı sağlayacak bir uygulamalı bilim olarak gördüğünü göstermektedir. Örneğin, Thales'in Mısır'daki piramitlerin yüksekliğini geometrik ilkeler kullanarak ölçtüğü söylenmektedir (Kline, 1972, s.28). Thales'in bu ölçüm için kullandığı ilkeler bugün geometrik oranlar[2] ilkesininin ispatı olarak geçer ve "Thales teoremi" olarak bilinir. Yine Thales'in astronomik olaylara ciddi merakı olduğu sıkça söylenmekte ve bu bağlamda MÖ 585 yılında gerçekleşen bir güneş tutulmasını öngördüğü ileri sürülmektedir (Kline,1972, s. 28). Böylece Thales geometrik ilkeleri dünyaya ve evrendeki olaylara uygulamaya çalışmıştır.

Thales'in bilimsel bilginin doğuşuna neden olan sorularının pratik ihtiyaçlara evrilen felsefesine dayanarak, tümevarımsal bir akıl yürütmeyle bu soruların başka sorunların da çözümünde kullanılabileceğini keşfetmiş olması, matematik ve felsefenin kesiştiği bir durum olduğu kadar matematik felsefesinin başlangıcı sayılır. İnsanlık tarihinin bir dönüm noktası sayılacak olan bu başlangıç tezimizinde konusu olan matematik felsefesinin ve hatta matematikte temel bulma problemininde kökeni olmaktadır. Bundan dolayı hem matematiğin hem de uygulamalı matematik ve günümüzde daha bir ayrımı netleşen soyut matematiğinde ilk filozofu olarak Thales gösterilebilir.

MÖ 6. yüzyılda matematik ilgisi Mezopotamya ve Eski Mısırda görüldüğü gibi Antik Grekler'de de görülmektedir. Pisagorcuların, Millet Okulu filozoflarının ve Atina Okulu

---

[2] Geometrik oranlardan kasıt; Oran-orantıdır. Bu oran-orantıdan da anlaşılması gereken alan ve uzunlukların orantılanmasıdır. Çünkü henüz cebir söz konusu değildir.

filozoflarının kozmolojilerinde ve dünyadaki olgulara dair açıklamalarında matematiğe önemli bir görev verdikleri görülmektedir. Pisagorcular matematiksel bilgiyi yönteme dayalı olarak tümdengelimli akıl yürütme ile geliştirmenin yanında matematiksel bilginin kanıtlarla da kesinliğinin geliştirilmesinde önemli rol oyanmışlarıdır. Eski Roma'da matematiğe verilen bu önem ölçme, yapı mühendisliği, makine mühendisliği ve güzel sanatlar gibi uygulama alanlarında kullanılmıştır.

MÖ 3. yüzyıla gelindiğinde Büyük İskender'in fetihleriyle beraber Helenistik kültürünün geliştiğini ve bu kültürün kendi coğrafyasının dışına taşarak merkezini Mısır'ın İskenderiye şehrine taşıdığı görülmektedir. Bu durum aynı zamanda İskenderiye şehrini dünyanın ticaret merkezi haline getirmiştir. İskenderiye şehrinin bu yükselişi Ptolemy hanedanlığı döneminde daha da artarak bir entellektüel merkez haline gelmiştir. İskenderiye şehri önce Müze dedikleri bilim okuluna sonra da kendi döneminin büyük kütüphanesine ev sahipliği yaparak bilimsel kültürün önünü açmıştır. Dönemin en büyük okullarından birine sahip olan İskenderiye şehri, aynı zamanda kendi adıyla anılan İskenderiye okulu bünyesinde birçok filozof yetişmiştir. İskenderiye okulunun bize kazandırdığı uygulamalı matematik alanında da çalışmaları olan filozoflardan bazıları şöyledir; Euclides, Eratosthenes, Apollonius, Aristarkus[3] ve Claudius Ptolemy gibi filozoflardır. Matematik ve dünya tarihine büyük katkıları olan bu filozoflardan Euclides (Öklid), Eratosthenes, Apollonius ve Claudius Ptolemy'nin uygulamalı matematik alanında önemli çalışmalarından dolayı özellikle anılması gerekmektedir.

MÖ 330-275 yılları arasında yaşayan Euclides'in matematiğe katkıları devrim niteliğindedir. Bu devrim, 2000 yıllık bir süreç boyunca hem matematiğe hem de matematiğin uygulama alanı bulduğu diğer alanlara öncülük etmiştir. 2000 yıllık bu süreç sonunda bir anlamda uygulamalı matematiğin yanında soyut matematiğe de ihtiyacın duyulmasının zemini olan *paraleller postulatı*na da zemin hazırlayan Euclides, kendi zamanının en önemli matematiksel teoremlerini derleyerek *Öğeler* adlı 13 ciltlik bir kitap yazmıştır. Euclides bu yapıtında öncelikle bir başlangıç noktası belirleyerek nesnelerin doğasıyla ilgili ispatsız kabul edilen kesin olduğunu düşündüğü ifadelerle başlamıştır. Bu ifadelere *aksiyom* ya da *postulat* diyerek onlardan çıkan mantıksal sonuçları ortaya çıkarmıştır. Ayrıca birbirinden bağımsız keşiflerin tamamını, önceki postulatlar, tanımlar ve aksiyomlar kümesine dayalı bir tümdengelim sistemi içinde birleştirmiştir. Bunu yaparken postulatların daha iyi anlaşılabilmesi adına bütün matematik nesnelerinin tanımlarını da vererek matematiğin kesinliği ve

---

[3] Güneş etrafında dünyanın döndüğünü söyleyen ilk kişidir.

süphesizliğini pekiştirmiştir. Euclides'in *Öğeler* yapıtındaki *postulat* ve *aksiyom*ları şu şekildedir.

Aksiyomlar (İlksavlar):

"**1.** Bir şeye eşit olan başka şeyler birbirlerine eşittirler.

2. Eğer eşit miktarlara eşit miktarlar eklenirse, elde edilen bütünler de yani toplamlarda eşittir.

3. Eğer eşit miktarlardan eşit miktarlar çıkarılırsa, kalanlar da birbirlerine eşittir.

4. Birbirleriyle çakışan şeyler, birbirlerine eşittir.

5. Bütün, parçadan büyüktür" (Kökcü, 2017, s. 3), (Barker, 2017, s. 41).

Postulatlar:

1. Bir noktadan bir başka noktaya iki nokta birleştirilerek düz bir doğru parçası çizilebilir.

2. Bir tane doğru parçası üzerinde sonlu bir düz doğru parçası her iki yöne doğru sınırsız olarak uzatmak mümkündür.

3. Verili bir düz doğru parçadan, bir yarıçap ve bir uç noktasını merkez alarak bir çember tanımlamak mümkündür.

4. Bütün dik açılar birbirine eşittir.

5. Eğer iki doğru ile kesişen yani onları kesen bir doğru çizilirse, iki doğrunun birbirine bakan tarafında yer alan ve onları kesen doğrunun bir tarafında kalan iki açının toplamı iki dik açıdan küçükse yani azsa bu iki doğru açıların toplamının iki dik açıdan az olduğu tarafta uzatılmaya devam ederlerse kaçınılmaz olarak birbirleriyle ilerde bir noktada kesişirler (Hofstadter, 2011, s. 154).

Euclides'in paralellik postulatı olarak bilinen 5. postulatı matematik tarihinin en ünlü ve tartışmalı ifadelerinden biri olmuştur. Bu konuda rahatsızlık duyan başta geometriciler, içeriğinin matematiksel gerçekliğini değil, sadece olması gerektiği gibi kısa, basit ve açık olmadığını eleştirmişlerdir. Bunun yanında bazı matematikçiler Euclides'in ilk 28 teorem boyunca 5. postulatı kullanmadığını, 29. teoremden sonra kullandığını ancak 31. önermeye gelindiğinde yine kullanmadığını ve bu yüzden Euclides'in bile bunu kullanmaktan kaçındığını eleştirerek bu teoremin sorunlu olduğunu ifade etmişlerdir. Macaristanlı matematikçi Jonas Bolyai ise bu karışıklık için 1832'de parelellik aksiyomu dışında ilk dört aksiyomla [4] oluşturulan teoremlerin bir geometri oluşturmak için yeterli olduğunu düşünerek paralellik postulatını çıkarmıştır. Bolyai'ye göre ilk dört aksiyom mutlak geometri için yeterli olmasına rağmen 5. Postulatının formal ispat olmadan bir varsayım olarak ifade edilmesi gerektiğini en

[4] Bu ilk dört aksiyomun paralellik postulatı ya da herhangi bir alternatifi olmaksızın oluşturduğu aksiyomatik sistem geometrisine mutlak geometri denir.

başından beri fark eden Euclides'in önemi 19. yüzyılın sonlarına doğru daha çok anlaşılır olmuştur. Bu paralellik postulatı sorgulamalarının sonucunun zaman içerisinde soyut matematiğe giden yolu açtığını ve bugün Euclides-dışı[5] geometrilerinin de keşfedilmesine zemin hazırladığı görülmektedir. Euclides-dışı geometriler başka bir başlık altında daha derinlemesine incelenecektir. Ancak şimdilik uygulamalı matematiğin tarihine devam edilecektir.

MÖ 276 -194 yılları arasıda yaşayan Eratosthenes, çok yönlü bir bilgin olarak coğrafya, felsefe, tarih, astronomi, matematik ve edebiyat alanlarında birçok eser vermiştir. Onu daha çok coğrafya ve matematik alanındaki çalışmalarıyla ele almak yerinde olacaktır. Eratosthenes bazı parçaları kayıp olan üç ciltlik *Geopraphica*'sında dünyanın yuvarlak olduğu iddialarını soruşturmanın yanında çeşitli kara parçalarının konumlarını da tanımlamaktadır. Matematiksel temelde coğrafi çalışmalara yer veren ilk bilimsel kitap olan *Geopraphica* aynı zamanda boylam ve enlemler yardımıyla dünyanın yerleşim alanlarını haritalandıran ilk doğru harita olarakta geçmektedir (Burton, 2018, s. 183). Eratosthenes aynı zamanda dünyanın çevresini hesaplamak için geliştirdiği pratik yöntem ile hem dünya tarihinde hem de matematik tarihinde ciddi dönüşümleri başlatmıştır. Güneş ışınlarının güneş saatinin ibresiyle oluşturduğu açıdan yola çıkarak aynı meridyen üzerinde olduğunu düşündüğü Aswan şehri ve İskenderiye şehirleri arasındaki açıylada ilişkilendirip çemberin merkezi ve yayı arasındaki ilişikiyi de dikkate alarak dünyanın çevresini hesaplamıştır. Hesaplamadaki küçük hatalara ve iki şehrin aynı meridyen üzerinde olmamasına rağmen benzerlik ilişkisini yakalaması matematiğin uygulamaya dönüşmesi açısından iyi bir örnek teşkil etmektedir (Burton, 2018, s. 183-187).

MÖ 240-190 yılları arasında yaşayan Apollonius, 'Konikler' çalışmasıyla tanınır. Kendinden önceki çalışmaları derleyerek yazdığı 8 kitap ve 389 önermeden oluşan çalışmasında özellikle dikkat çekici olan 'Konik kesitler' olarak adlandırılan parabol, hiperbol ve elips gibi daha önceden bilinen üç eğri üzerinde başarılı bir çalışma ortaya koymasıdır. Apollonius'un başarısı, herhangi bir koniden kesişen düzlemin oluşturan doğruyla birleşimindeki eğim açısını değiştirerek bu üç eğriyi elde edilebildiğini göstermiş olmasıdır. Apollonius ayrıca optik ve gezegen geometrisi üzerinde de çalışmalar ortaya koymuştur. Mars gezegeninin yörüngesindeki asimetriden yola çıkarak dairesel bir yörüngesinin olmadığını iddia etmiştir (Burton, 2018, s.206-208). Ayrıca Phthagoras'ın göğün hareketlerini dairesel

---

[5]Euclides-dışı kavramını daha sonrasında bir başlık altında çalışacağız. Basit anlamda Euclides ve Euclides-dışı geometriler olarak düşünülebilir.

hareket kombinasyonlarına indirgemek için, bir dış çember ya da merkezleri diğer çemberlerin çevresi üzerine düşen küçük çemberler modelini inşa etmiştir.

MS. 2. Yüzyıl da yaşayan Claudius Ptolemy ya da diğer bir adıyla da bilinen Batlumyus yazdığı *Almagest* yani *Matematiksel Sistem* (*İng. Syntaxis Mathematica*) kitabından sonra Euclides'in geometri için yaptığının bir benzerini astronomi için yaparak Nicolaus Copernicus'un *Göksel Kürelerin Devinimleri Üzerine* (*İng. De Revolutionibus Orbıum Coelestium*) (1543) eserine kadar astronomide en önemli otorite olarak devam eder. Ptolemy'e kadar dünya etrafında eş merkezli çemberler içinde sallanan gezegenlerin olduğu evrenin sabit ve hareketsiz merkeziydi. Ayrıca Phthagoras'ın öngördüğü güneşin ve gezegenlerin hareketinin dairesel olması göğün hareketini açıklamak için kulanılan o dönemin başka bir astronomi bilgisiydi.

Ptolemy dünyaya, gezegenlere ve hareketlerine dair kendinden önceki bilgileri derleyerek eş merkezli olmayan güneş hareketi kavramı önerisini geliştirdi. Bu savını pekiştirmek adına da *Ekuant* yani *dengeleme noktası* kavramını geliştirmişti. Ptolemy *ekuant*ı, yörünge hareketinin hızını açıklamak için dünyaya eşit uzaklıkta ve merkezin diğer tarafına yerleştirmiştir. Kendi döneminde karmaşık görünen Ptolemy'nin *ekuant* ve *güneş hareketi* kavramı bir nebzede olsa Antik Yunan düşüncesindeki *dünyanın evrenin merkezi olduğu, sabit ve hareketsiz* olduğu inancını kırmıştı. Ancak asıl sarsıntıyı yaklaşık 1500 yıl sonra evrenin merkezinin *Güneş Merkezli* olduğu iddiasındaki Nicolaus Copernicus yapacaktı.

MS 4. yüzyıldan MS 15. yüzyıla kadar uzun bir süre dünya tarihi ve matematik tarihinde yeni bir gelişme görülmemektir. Özellikle "Karanlık Çağ" olarak adlandırılan MS 11. yüzyıla kadar uzanan bu dönemde Hristiyanlığın dogmatizmi, vebalar ve savaşlar yeni bir şeyin üretimine pek de izin vermemiştir. Karanlık çağ rönesans ve reform hareketleriyle son bulmuştur.

1473-1543 yılları arasında yaşayan astronom ve matematikçi Nikolas Kopernik (Nicolaus Copernicus), *Göksel Kürelerin Devinimleri Üzerine* (*İng. De Revolutionibus Orbıum Coelestium*) eserinde güneş sisteminin tarifini yaparak, güneşin merkezde olduğu gezegenlerin sabit yörüngeler üzerinde hareket ettiğini kabul eden *gün merkezcilik yasası*nı savunmuştur. 17. yüzyılda Alman gök bilimci, matematikçi ve astrolog Johannes Kepler 1609 yılında Nikolas Kopernik'in güneş sisteminin içinden Phthagoras'ın ideal çemberini çıkarıp yerine *eliptik* yörüngeleri koyarak güneş sisteminin son halini almasını sağlamıştır (Burton, 2018, s. 188-189). İtalyan astronom, fizikçi, filozof ve matematik Galileo Galilei, teleskopu gökyüzünü incelemek için yeniden tasarlayarak Kopernik'in *Güneş Merkezli Teori'*sine (*İng. Heliocentric*

Theory) kanıt niteliğinde bulgular bulup bunları ilk defa yayınlayarak hem ilgiyi hem de tepkileri üzerine çekmiştir. Tüm astronomik hareketlerin merkezinde dünyanın olduğu Aristotelesçi bakış ile Ptolemy tarafından geliştirilen dünyanın hala merkezde olduğu ancak bir dengeleme noktasına yani *Ekuant'a* sahip olduğu görüşü Galileo'nun kanıtlarından sonra artık geri döndürülemez şekilde sarsılmıştır. Dünyanın hareket etmesinin bilgisi kilise otoritesini zedeleyeceğinden kilise Galileo'yu engisizyon mahkemesine yollayıp matematiğin bir şeytan sanatı olduğunu ve matematikçilerin de gerçek dinin düşmanları olduğu propagandasını yaymıştır. Seçilen yeni Papa 1623'te Galileo'ya kendini yeniden savunabilmesi için ona bir şans verir. Galileo, 1630'da tamamladığı *Diologo Sopra Due Massimi Sistemi del Mondo (İng. Dialogue Concerning the Two Chief World System)* eseri yoğun tartışma ve baskı sonucunda 1632'de yayınlanır. Galileo, daha geniş kitlelere ulaşmak için *Latince* yerine *İtalyanca* yazdığı eserde teknik bir değerlendirme ya da matematiksel işlemlerden çok dialog tarzında konuşmalardan oluşan bir tartışma biçimini kullanmıştır. *Dialogue*'nin yayınlanmasının ardından hem kilisede hemde bilim dünyasında düşmanlarının onunla ilgili eleştirileri arttı. 70 yaşında emre itaat etme sözünü tutmadığına dair itirafı üzerine tasarlanan bir yargılama türüyle davası yeniden görülen Galileo'nun her şeye rağmen "Yine de hareket ediyor" şeklinde mırıldandığı söylenir (Burton, 2018, s. 337-344).

İyi matematikçiler yetiştiren Galileo, matematiğin bilimsel açıklamaların aracı olduğunu belirtip, bunu ilk kez uygulamaya koyan Pisagorcuların yolundan giderek matematik tarihinde önemli bir yere sahip olmuştur. Galileo, Kopernik'in *Heliocentric Theory'*ni açıklarken matematiği hem teori hem de uygulama bazında ortaya koyarak matematiği çok güçlü bir yere koymuştur. Ayrıca "Doğa matematik diliyle yazılmıştır" sözüyle doğanın matematikselleşmeye uygun olduğunu, yani diğer bilim dallarının kendini ifade etmek için matematik dilini kullanmalarının önemini vurgulamıştır. Evrenin doğrudan gözlem ve matematiksel mantığın birleşimi aracılığıyla anlaşılabiliyor olması matematik dilinin bilimsel açıklamaların aracı olması fikrini doğruladığından bu durum uygulamalı matematiğin güçlenmesini sağlanmıştır (Burton, 2018, s. 345).

17. yüzyılda tarih sahnesine Johannes Kepler çıktığında Nicolaus Copernicus'un anlattıklarının üzerinden yaklaşık 50 yıl geçmiştir. Kepler'in doğanın matematiksel basitliğine olan inancı onu Nicolaus Copernicus'un yolundan götürüp Tycho Brahe ile yollarının kesişmesine neden olur. Astronomi gözleminin öncüsü sayılan Tycho Brahe matematiksel açıdan zayıf ancak muhteşem bir gözlemciydi. Brahe'nin ölümünden sonra Kepler'e bıraktığı miras benzersiz bir doğruluğa sahip astronomik gözlemlerdi. Kepler elindeki bu bilgilerle

matematiğin uygulama alanı bulduğu matematiksel astronomide büyük bir ilerleme sağlayarak gezegen mekaniğinin ilk doğru ilkelerinin belirlendiği üç yasayı oluşturarak, kendisinden sonra gelecek İsaac Newton için öncül olmuştur.

Kepler Yasası olarak bilinen üç yasa şöyledir;

1. “Gezegenler, odaklarında birinde Güneş’in bulunduğu elips yörüngede hareket eder.
2. Her gezegen aynı tarzda olmayan yörüngeleri etrafında hareket ederler şöyle ki; gezegenler yörüngeleri etrafında eşit zaman aralıklarında eşit alanlar tarar.
3. Herhangi iki gezegenin Güneş’in etrafındaki yörüngesini tamamlamak için gerekli zamanların karesi, Güneş’ten ortalama uzaklıkların küpleri ile orantılıdır” (Burton, 2018, s. 357-360).

17. yüzyıl da matematiğe katkısı olan filozof ve matematikçi Rene Descartes’in erken yaşlarda tanıştığı matematik, onun kesinlik arayışında önemli bir yer tutmuştur. 1637 yılında yayınladığı *Discours de la Methode pour bien conduiresa Raison et chercher la Verite dans ses Sciences (İng. Discours on the Method of Rightly Conducting the Reason in the Search for Truth in the Sciences)* kitabı ve beraberinde yayınladığı bilimsel ekler olan *La Dioptrique, Les Metegeorges ve La Geometri* ile bu kesinlik arayışını sürdürmüştür. Descartes’in matematiksel kesinlikten kastı; matematiğin gerçekliği kabul edilmiş en basit elemanlarla başlaması ve sonra bir önermeden diğerine tümdengelim süreciyle ilerlemesiydi. Descartes’in düşüncelerinin başlangıç noktasını oluşturan, şüphe duyulmayan en basit fikirleri ve ilkeleri keşfetmesi o çok etkilendiği matematiksel akıl yürütmelerin özellikleriyle de birleşince bugün herkes tarafından bilenen meşhur önermesi “Düşünüyorum, öyleyse varım”[6](*Fr. Je pense, donc je suis*)[7] de ortaya çıkar.

Descartes’in eseri olan *Discours*’un üç eki de *La Dioptrique, Les Metegeorges ve La Geometri* bilimsel gerçekleri keşfetme metodlarının gerçek göstergesidir. Uygulamalı matematik alanına örnek teşkil edecek bu çalışmalar kısaca şöyledir;

* *La Dioptrique* (*İng. Dioptrics*) kırılma yasaları dahil olmak üzere, doğa ve ışığın özelliklerini, insan gözünün anatomisini ve yeni icad edilen teleskoplara uygun lenslerin şekillerini içermektedir.

* *Les Metegeorges* (*İng. Meteorology*) kar kristallerin nasıl oluştuğundan, yağmur damlalarının büyüklüğünden, gök gürültüsü ve şimşeğin nedenlerinden ve gökkuşağının nasıl oluştuğundan bahsetmektedir.

---

[6]Varolmak şüphe duyulmayan en basit fikirdir. Düşünsel süreçle yani mantıksal akıl yürütmelerle şüphe duyulmayan en basit fikir olan ‘varolmanın’ kendisine ulaşmış olmak bu tavrı belirler.
[7] İlk olarak Fransızca yazılan bu ifade daha çok Latince olan “Cogite ergo sum” diye bilinir.

* Descartes'in *La Geometri* (*İng. Geometry*) çalışması matematiğe ve geometriye önemli bir katkı olarak cebir ve geometrinin birleşimi olan analitik geometriyi geliştirmiştir (Burton, 2018, s. 363-367).

1642-1727 yılları arasında yaşayan Isaac Newton, İngiltere'nin önce Büyük Veba ve hemen ardından Büyük Londra Yangınını yaşadığı yıllarda *evde kal*'arak[8] optik, astronomi ve soyut matematik alanında adını tarih sahnesine yazdıracak buluşlar yapmıştır. Soyut matematik alanında onun değişimler (*ing. Fluxions*) olarak adlandırdığı ancak bugün diferansiyel hesap olarak bilinen matematiksel yönteme dair çalışmalar ortaya koymuştur.

Newton'un hareket yasası onun uygulamalı matematik çalışmalarında önemli bir yer tutar. Newton *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (*İng. The Mathematical Principles of Natural Philosophy*) kitabında kütle, eylemsizlik, ivme ve merkezcil kuvvet gibi kavramları tanıtıp üç ünlü "Hareket yasaları veya Aksiyomları" ve ardından da 143 önermeyi ortaya koyarak çalışmasını tamamlar. Üç ünlü yasa şöyledir;

> 1. "Her cisim, dıştan uygulanan kuvvet tarafından durumu değiştirilmeye zorlanmadıkça, durağanlık durumuna veya düz bir doğru üzerindeki hareketine aynı şekilde devam eder.
> 2. Hareket değişimi [İvmenin değişim oranı] dıştan uygulanan kuvvet ile orantılıdır ve kuvvetin uyguladığı düz bir doğru doğrultusunda yer alır.
> 3. Her eylem için her zaman zıt ve eşit bir tepki vardır. İlk iki yasanın zeminini Galileo hazırlamış olsa da üçüncü yasanın tamamı Newton'un kendisine aittir" (Burton, 2018, s. 391).

18. yüzyıla gelindiğinde yavaş yavaş uygulamalı matematiğe olan ilginin azalmasına neden olan birtakım gelişmeler yaşanmıştır. Bu gelişmeler matematiğin soyut bir bilim olduğuna dair kanının da aynı zamanda önünü açmıştır. Gottfried Wilhelm Leibniz'in çalışmalarına bu eksenli bakılabilir.

1646-1716 yılları arasında yaşayan Gottfried Wilhelm Leibniz "Disputatio Arithmetica de Complexionibus" çalışmasıyla uzman olduktan sonra çalışmasını daha da genişletilerek *Ara Combinatoria* olarak 1666 da yeniden basar. Leibniz, kitapta mantıksal çıkarımlar yapmak için permütasyon ve kombinasyon teorileri geliştirmiştir. Leibniz, bilimsel tüm kavramların "insan düşüncelerinin temel alfabesinden" gelen kombinasyonlarla şekillendiği varsayımını baz alarak matematiğe benzeyen yeni bir muhakeme dilinin (*characteristicauniversalis- evrensel karakter)* oluşumuna dair fikir geliştirmiştir. Ayırca bilimsel dilde ifade edilen tüm problemler için bir tür otomatik çözüm yöntemi sağlayan muhakeme hesabının tasarlanabileceğini

---

[8] *Evde- kal*: 2020- 2021 yıllarında Covid pandemisiyle zorunlu evde kalmanın 2022 yılında da süren etkilerine dikkat çekmek için italik olarak yazılmıştır.

önermiştir. Leibnez'in evrensel karakter ve tüm problemler için otomatik muhakeme hesabının tasarlanması düşüncesi, David Hilbert ve diğer biçimselcilerin savunduğu matematikteki tüm problemlerin çözümü için geliştirilmek istenen biçimsel bir dil kurma düşüncesinin ilk mimarı olduğunu göstermektedir (Burton, 2018, s. 410).

Leibniz'in çalışmaları uygulamalı matematik dışında soyut matematiğe dair gelişmeler içermektedir. Matematik tarihinde Leibnez'in dışında matematikçilerin ilgisinin uygulamalı matematikten çok soyut matematiğe kaydığı birkaç önemli olay gerçekleşmiştir. 18. yüzyılda paralellik postulatlarını ispatlama çabalarıyla başlayıp 19. yüzyılda paralellik postulatlarını ispatlama çalışmaları sonucunda Euclides-dışı geometrilerin ortaya çıkışıyla ve George Cantor'un küme kuramıyla devam eden bu süreç matematikçilerin ilgisinin ağırlıklı olarak soyut matematiğe kaydığının göstergesi niteliğindedir.

Bu gelişmeler soyut matematiğin yükselişi başlığı altında derinlemesine analiz edilecektir.

1.2. Soyut Matematiğin Yükselişi

18.yüzyılda paralellik postulatını ispatlama çabaları ardından Euclides-dışı geometriler ve daha sonrasında da Georg Cantor'un küme kuramı soyut matematiğin gitgide ivme kazanmasına sebep olmuştur. Soyut matematiğin yükselişi başlığı altında ilk olarak paralellik postulatını ispatlama çabalarınına değinilecektir. Sonrasında da ayrı başlıklar altında Euclides-dışı geometriler ve Cantor'un küme kuramını değinilecektir.

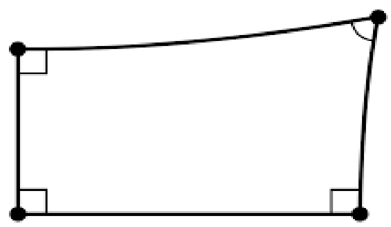
1.2.1. Paralellik Postulatını İspatlama Çabaları

Matematikçiler 18.yüzyılda farklı bilim dallarıyla sentezlenen uygulamalı matematiğe daha az ilgi göstermişlerdir. Onun yerine matematiğin daha çok zihinsel bir süreç ve bir haz olduğu fikrini benimsemeye başlamışlardır. Buna binaen de Euclides'ten beri gelen aksiyom ve postulatlardan beşincisi olan *paralellik postulatı* ile ilgilenmeye başlamışlardır. Euclides paralellik postulatını oluşturduğunda hem kendi döneminde hem de sonraki dönemlerde üzerine çok konuşulmuş ve ispatlanmaya çalışılmıştır. Paralellik postulatı üzerine önce filozofların 18. yüzyıla kadarki düşüncelerine göz atılacaktır. Ardındanda matematikçilerin 18. yüzyıldaki ispatlama çalışmalarına geçilecektir.

Öğeler'i yazarken Euclides eserini apaçık görülen fiziksel deneyimler üzerine şekillendirmişti. Ancak bu apaçık görünen fiziksel deneyimlere rağmen bir tane postulat diğerlerine göre, kısalık ve açıklık açısından farklılık göstermekteydi. Bu postulat “Eğer bir düz çizgi, diğer iki düz çizgiyi keserse, öyle ki bir kenardaki iki iç açının toplamı iki dik açıdan küçükse, şu hâlde iki düz çizgi yeterince uzatıldığında, bu açıların olduğu ilk çizginin aynı kenarında kesişirler” şeklindedir (Barker, 2017, s. 38). Paralellik postulatı olarak da bilinen bu postulat; beşinci postulattır. Bu ifade hem karmaşık hem de kuşkuya açıktı. Antik Yunan bilginleri bazı eğrilerin birbirlerine giderek yaklaşabilmelerine rağmen kesişmediklerinin farkındalardı[9]. Ancak paralellik postulatı Antik Yunan bilginlerinin bu düşüncesinin ötesinde bir aksiyomdur. Bunun dışında paralellik postulatına alternatif olarak birçok aksiyom türetilmiştir. Aşağıda bu aksiyomlardan bazılarını türeten matematikçiler ve çalışmaları ortaya konulacaktır.

Yeni Platonculardan olan Yunan filozof ve matematikçi Proclus (MS 412- 485), Platon akademisinin başında da bir dönem bulunmuştur. Proclus, paralellik postulatı için önermenin postulatlar arasından çıkarılması gerektiğini savunmuştur. Çünkü teorem olsa bile sorunsal olmaktan çıkmadığını, ispatının pek çok tanıma ve teoreme ihtiyaç duyduğunu belirtmiştir.

İslam dünyası alimlerinden astronom, matematikçi ve optik bilimci İbni Heysem (965 - 1039) 5. Postulatın yerine “kesişen iki çizgiden biri diğerine ya da onun aynısı olan bir başkasına paralel olamaz” postulatıyla ispatlamayı yeğlemiştir (Kökcü, 2017, s. 4). Bu ifadenin Heysem’in kendisinden sonra gelecek Playfair aksiyomuna benzerliği ise şaşırtıcıdır. Heysem’in 5. Postulatı ispatlama çabasında geliştirdiği üç dik açılı dörtgen için kullandığı dörtgen aşağıda şekil 1.1 de mevcuttur.



Şekil 1.1: İbni Heysem’in 5.postulatı ispatlama çabalarında geliştirdiği üç dik açılı dörtgen
Kaynak: Kökcü, 2017, s.4

Heysem üç dik açıya sahip dörgeninde dördüncü açısının 90º> ya da 90º<olduğu durumları soruşturup ve akabinde de bunların mümkün olamayacağını düşünerek 5. Postulatı kabul etmiştir. Bu dörtgenin de Saccheri’nin (1667-1733) geliştirdiği Saccheri dörtgeni olarak bilinen dörtgene benzerliği de ayrıca önemlidir (Kökcü, 2017, s.4).

[9]Euclides’in 5. Postulatına bu fikir zemin hazırlandığını düşünmekteyiz. Zira kesişmeyen ve 90º büyük olan açının olduğu taraflarda bu doğrular kesişmezler.

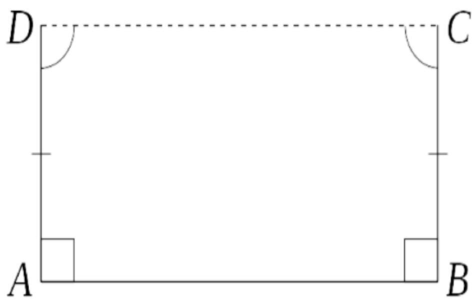
İngiliz din adamı ve matematikçi olan John Wallis (1616-1703) de paralellik postulatı yerine daha makul bir aksiyom önermiştir. Bu “Her üçgen için rastgele büyüklükte bir benzer üçgen vardır” şeklindeki bir varsayımdır (Burton, 2018, s. 566).

Iskoçyalı bilim adamı ve matematikçi John Playfair (1748-1819) paralellik postulatının ispatı için kendi adıyla anılan bir aksiyom geliştirmiştir. “Playfair aksiyomu” olarak da bilinen bu aksiyom Proclus tarafından beşinci yüzyılda ortaya atılmıştır. Ancak postulat kimliğiyle yaygınlık kazanması John Playfair’le başlamıştır. Playfair, postulatın şu ifadeyle yer değiştirmesini önermiştir. “Bir doğruya o doğrunun dışındaki bir noktadan geçen sadece bir paralel doğru çizilebilir” (Aslan, 2013, s. 66). Bu ifade aynı zamanda Euclides geometrisine uyan bir ifadedir. Kesişen doğrular hakkında bir iddia olan paralellik postulatı ile paralel doğrular hakkında bir iddia olan Playfair’in aksiyomu birbirine denk ifadeler olduğundan bir anlamda da Playfair’in aksiyomu paralellik postulatını gerektirdiğinden paralellik postulatı üzerindeki belirsizliği bir nebze de olsa aralamıştır. Ancak yine de pek tatmin edici değildir. Proclus bu ispatların ilkinin Ptolemy’ye ait olduğunu savunmuştur. Ptolemy’nin “Bir çizginin dışındaki bir noktadan o çizgiye yalnızca bir paralel çizgi vardır” önermesini farkında olmaksızın varsayımladığı anlaşılmaktadır (Yıldırım, 2018, s. 34-35).

Euclides’in beşinci postulatına(paralellik) yönelik ilk araştırmalar diğer aksiyomlardan bu varsayımın mantıksal şekilde türetilmesine yönelik çalışmalardır. Çünkü bu sayede beşinci postulat teorem haline gelecektir. Ancak bu çabalar sonuçsuz kalmıştır. Doğrudan ispatlamaya çalışmaları sonuçsuz kaldığında dolayı Giovanni Girolama Saacheri (1667-1733), Johann Heinrich Lambert (1728-1777) ve Adrien Marie Legendre (1752-1833) dolaylı yoldan ispatlama çalışmasına girişmişlerdir. Dolaylı ispatlama yaklaşımında beşinci postulat reddedilerek çelişki türetilmeye çalışılmıştır.

Dolaylı ispatlama yaklaşımında *Olmayana Ergi Yöntemi* ya da *Reduction-ad-absurdum* (kısaca RAA) adı verilen yöntem kullanılmaktadır. Burada ispatı istenen önermenin, yanlış sayılması halinde, bir çelişkiye yol açıp açmadığına bakılmaktadır. Eğer çelişki varsa ispata konu olan önerme yanlış değil, doğru olarak kabul edilmektedir. Eğer çelişki yoksa da önerme yanlıştır ve reddedilmektedir. Olmayana ergi yöntemi mantığın iki temel ilkesi *çelişmezlik* ve *üçüncü seçeceğin olanaksızlığı ilkesi*’ne dayanmaktadır.

1667-1733 yılları arasında yaşayan İtalyan cizvit rahip, skolastik filozof ve matematikçi Giovanni Girolama Saacheri tümdengelim yöntemi ve *olmayan ergi yöntemini* kullanarak Euclides’in paralellik aksiyomunun yanlışlığı varsayımını kanıtlamaya çalışmıştır. Girolama Saacheri’nin bir çelişkiye ulaşmayı düşündüğü bu çalışması sonraki zamanlarda matematik açısından farkında olmadığı çok daha fazla şeyin önünü açacaktır. Saacheri'nin dolaylı ispatlama yöntemi girişimi bir sonraki başlığımızın da konusu olan ve üzerinde detaylıca konuşacağımız Euclid-dışı geometrilerin önünü açacaktır. Aşağıda Giovanni Girolama Saacheri'nin 'Saccheri Dörtgen'i olarak bilinen ispatı ile ilgili dörtgen ve olası diğer hipotezler ile ilgili durumu şekil 1.2 ve şekil 1. 3'te ki görsellerle açıklanacaktır.



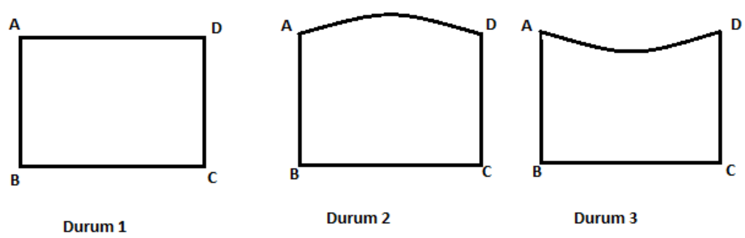
Şekil 1.1: Saccheri dörtgeni
Kaynak: Yıldırım, 2018, s.36

Saccheri, A ve B dik acılarına sahip yani s(Â)= 90º ve s(B)=90º ve AD uzunluğu BC uzunluğuna eşit yani IADI=IBCI olan bir ABCD dörtgeniyle çalışmıştır. Euclides geometrisinde AD kenarının BC kenarına paralel olduğu yani [AD] // [BC] olduğu ve bunun sonucunda da A açısı ve B açısının dik açı olması sağlanmıştır. Ancak Saccheri beşinci postulatı reddettiği için Euclides geometrisinin vardığı tek sonuç yerine üç tane yeni hipoteze ulaşmıştır. Saccheri'nin vardığı üç seçenek şöyledir:

I. Tavan açıları dik açıdır. Yani C ve D açılarının her ikisi de dik açılardır. (Bu sonuç Euclides geometrisinde zaten var olan bir sonuçtur.)

II. Tavan açıları geniş açılardır. Yani C ve D açılarının her ikisi de geniş açılardır. (Euclides geometrisinde böyle bir şey mümkün değildir.)

III. Tavan açıları dar açılardır. Yani bunların her ikisi dar açılardır. (Euclides geometrisinde böyle bir şey mümkün değildir.)



Şekil 1. 2: Saacheri'nin 5. Postulatı reddettiği durumda ulaştığı üç hipotez
Kaynak: Kökcü, 2017, s.4

2. ve 3. hipotezlerin sonuçları Euclides geometrisine göre ve Saccheri'ye göre de sezgiye açık değildi. Saccheri doğru olan 1. hipotezi ispatlamak isteyip 2.ve 3. hipotezin de yanlış olduğunu göstermeye çalışmıştır. 2. hipotezin çelişkiye götürdüğünü göstermeyi başarmış ve onun çelişkili olduğunu şöyle açıklamıştır; Tavan açıları yani C ve D açıları geniş olsaydı, dörtgenin iç açı toplamı 360 dereceden fazla olurdu, bu ise daha önce ispatlanmış olan 'Dörtgenin iç açılar toplamı 360 derecedir." teoremiyle çelişkiye düşmek anlamına gelmektedir. 3.seçeneğe dair ise Saccheri bütün ispatlama çabalarına rağmen çelişki elde edememiştir. 3.seçenek için ise "Dar açı hipotezinin kesinlikle yanlış olduğunu biliyorum; çünkü böyle bir düşünce doğrusal çizginin doğasına aykırıdır" demiştir. (Yıldırım, 2018, s. 37).

Saccheri paralellik postulatını ispatlama çabalarının sonucunda 2. ve 3. hipotezlerin sonuçlarını da yanlış kabul edip "çelişki" olduğunu ilan ederek Euclides'in beşinci postulatının teorem olduğunu *olmayan ergi yöntemini* kullanarak kabul etmiştir (Davis, Hersh, & Marchisotto, 2015, s. 244), (Yıldırım, 2018, s. 36).

1728-1777 yılları arasında yaşayan Alman fizikçi, matematikçi ve gökbilimci Johann Heinrich Lambert'te paralellik postulatını ispatlama çabasına girenler arasındadır. Lambert sistemde mutlak bir uzunluk biriminin mevcudiyetinin ispatlanabileceğini bulmaya çalışarak işe koyulmuştur. Büyük çaba harcamasına rağmen mutlak uzunluk birimi mevcut olamayacağından, geniş açı hipotezine dayanarak, paralellik postulatının bir teorem olarak ondan ispatlanamayacağı gibi çelişkili bir sonuç bulmuştur (Davis, Hersh, & Marchisotto, 2015, s. 244).

1752-1833 yılları arasında yaşayan Fransız matematikçi Adrien Marie Legendre'te paralellik postulatını ispatlamak için *olmayana-ergi* yöntemini kullanmıştır. Bu doğrultuda üçgeninin iç açılar toplamına ilişkin üç hipotezi incelemiştir. Hipotezler şöyledir;

1. İç açılarının toplamı iki dik açının toplamına eşittir. (Euclides geometrisinde bu mümkündür.)
2. İç açılarının toplamı iki dik açının toplamından büyüktür. (Euclides geometrisinde bu mümkün değildir.)
3. İç açılarının toplamı iki dik açının toplamından küçüktür. (Euclides geometrisinde bu mümkün değildir.)

Legendre, birinci hipotezi doğru kabul etmiştir. İkinci hipotezin yanlışlığına bir doğrunun sonsuzluğunu üstü örtük varsayımıyla ulaşmıştır. Ancak üçüncü hipotezin ise yanlışlığını ispatlayamamıştır (Davis, Hersh, & Marchisotto, 2015, s. 244).

İtalyan matematikçi Giovanni Girolama Saacheri, Alman matematikçi Johann Heinrich Lambert ve Fransız matematikçi Adrien Marie Legendre'nin dolaylı ispatlama yaklaşımı olarak *Olmayana Ergi Yöntemi*ni kullanarak Euclides'in paralellik postulatını ispatlama çabaları sanıldığı gibi pek de sonuçsuz kalmamıştır. Bu matematikçiler sayesinde ilerleyen zamanlarda, başka matematikçiler Euclides geometrisinin yanına iki tane yeni Euclides-dışı geometrinin konulmasını sağlayacaklardı. Ayrıca bu matematikçiler Euclides'in kendisi gibi buldukları geometrilere kendi adlarını vermişlerdir. Lobachevsky geometrisi (hiperbolik geometri) ve Riemann geometrisi (eliptik geometri) olarak bilinen bu yeni geometriler bir sonraki alt başlıklar olarak detaylı bir şekilde ele alınacaktır.

1.2.2. Euclides-dışı Geometriler

1800'lerin başında 5. postulatla ilgili çıkmaz büyürken matematikçiler çareyi bu postulatın diğer aksiyomlardan gerçekten bağımsız olup olmadığını aramada bulmuşlardır. Bu arayış matematikçileri Euclides'e eş değer bir geometri geliştirmenin daha iyi olacağı sonucuna varmıştır. Belki de bu sayede paraleller hakkında karşıt bir aksiyom kabul etmek artık mümkün olacaktır. Bu doğrultuda eş zamanlı olarak dünyanın üç farklı yerinde üç matematikçi Albert Einstein'ın deyimiyle "Bir aksiyoma meydan okudular". Birbirlerinden habersiz biçimde, Almanya'dan Carl Friedrich Gauss, Macaristan'dan Jânos Bolyai ve Rusya'dan Nikolay Lobachevsky 2000 yıllık bir gerçeği reddedip "Playfair aksiyomu" biçiminde 5. postulatı ele alarak üç olasılık oluşturmuşlardır. Bu üç olasılık şu şekildedir:

1. Bir noktanın dışındaki bir çizgiye yalnızca bir paralel çizilebilir (Bu olasılık zaten Euclides'in savunduğu bir durumdur).
2. Bir noktanın dışındaki bir çizgiye hiçbir paralel çizilemez (Bu olasılık ise sonsuz bir doğru varsayıldığında geçersiz hale gelmektedir).
3. Bir noktanın dışındaki bir çizgiye birden fazla paralel çizilebilir (Bu olasılık ise bir çelişkiye ulaşmadığından "Verili bir çizginin (bir doğruda olabilir), üzerinde olmayan bir noktadan o çizgiye daima çizilebilecek birden fazla paralelin varlığı çizilebilmektedir" ile mantık dışı görünen bir aksiyom oluşturmuştur). Bu aksiyom sayesinde aynı zamanda diğer bütün aksiyomların varlığı korunmuş olmaktadır (Barker, 2017, s. 64).

Üç matematikçinin de vardıkları sonuç 'Euclides geometrisinin mantıksal olarak tutarlı olan tek geometri olmadığı' şeklindedir. Bu sonuç 3. hipotezle tutarlı bir geometrinin kurulabileceği düşüncesinide geliştirmiştir. Matematikçiler bu konuda yoğun bir çabaya girişmişlerdir. Üç matematikçinin bir aksiyoma meydan okuma girişiminin ayrıca heyacan verici yanı fiziksel dünyayı tanımlamak için tek doğru sistemin olmadığını göstermesidir" (Barker, 2017, s. 64).

1777 ile 1855 yılları arasında yaşayan, Alman matematikçi, astronom ve istatistikçi Johann Carl Friedrich Gauss, zihnin dünyayı tek bir taraflı görmeye zorladığı düşüncesine şüpheyle yaklaşmıştır. Bu şüpheleri uzayın geometrisinin ne olduğuyla ilgili deneysel bir veriye sahip olunmadığı gerçekliğiyle birleşince Gauss, şüphelerinin peşinden gitmenin doğru olduğu düşüncesine varmıştır. Uzay geometrisinin de bilinen dünyadaki fizik kanunları gibi gerçek ölçümlere dayanması gerektiğini savnmuştur. Paraleller teorisi üzerine somut gerçekler olmamasına rağmen Gauss, Euclides-dışı geometri hakkındaki bu düşüncelerini 1831 tarihli bir mektupla Alman-Danimarkalı gökbilimci ve matematikçi Heinrich Christian Schumacher ile paylaşmıştır.

1802 ve 1860 yılları arasında yaşayan Macar matematikçi John Bolyai de 1823'te öncelikle paralellik postulatını ispatlama çabalarına yoğunlaşmıştır. Bolyai'nin bu yoğunlaşması zamanla yepyeni keşiflerde bulunmasını sağlayan bir sürece evrilmiştir. 1831'de John Bolyai'nın babası Wolfgang Bolyai'nin Gauss'la yazışmalarından, oğlunun çalışmalarının Euclides-dışı geometri üzerine çalışmalar yürüten Gauss'un çalışmalarına benzerliği üzerinde hemfikir olduklarıdır. John Bolyai'nin Euclides-dışı geometri üzerine çalışmalarını yayınladığı 24 sayfadan oluşan *Appendix Scientiam Spatii Absolute Veram Exhibens* eseri kendi dönemimin matematikçileri tarafından yeterince değer görmemiştir. Ancak yıllar sonra Euclides-dışı geometrinin kurucuları arasında yine de onun adına yer verilmiştir (Barker, 2017, s. 64).

Bütün bu girişimlerin ötesinde ilk defa Euclides-dışı geometri üzerine kendi sonuçlarını 1826'da sözlü ve 1829'da yazılı olarak açıkça paylaşan kişi, Rus matematikçi Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (1793-1856)'dir. Lobachevsky, adını Euclides-dışı geometrinin yaratıcısı olarak matematik tarihi dünyasına yazdırmıştır.

Nicolai Lobachevsky paralellik postulatı ispatı girişimlerinin sonucu olarak bulduğu bağımsız yeni bir geometri kurma çalışmalarının ilk örneklerini, 1829-1830 tarihlerinde Kazan Üniversite'sinin çıkardığı Kazan Messenger adlı derginin *On Foundations of Geometry* biyografisine dahil edilerek yayınlamıştır. Bu çalışma Euclides-dışı geometrilerinin resmiyet kazandığı ilk çalışma olarak literatüre girmiştir. Daha sonra onu 1835-1838 *New Elements of Geometry with a Complete Theory of Parallels* çalışması, ayrıca 1837'de Moskova University de yayınlanan "Imaginary Geometri" makalesi ve 1840'ta Berlin'de basılan *Paralellik Teorilerinin Geometrik İncelemeleri* (*İng. Geometrische Untersuchungen zor Theorie der*

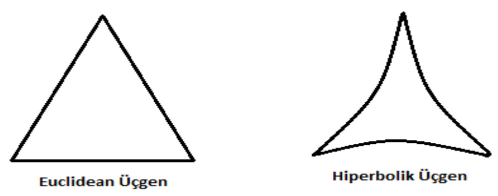
Paralellinien) kitabı izlemiştir. Lobachevsky, ölümünden 1 yıl önce bile kendisinin *Hayali Geometri* dediği *Geometri'yi* yani *Hiperbolik Geoemetri'*yi *(İng. Hyberbolic Geometry)* açıklamaktan vazgeçmemiştir. 1855 yılında Lobaçevski'nin Hiperbolik Geometri'si *Pangeometry or a summary of the Geometric Foundations of a General and Rigorous Theoery of Parallels* başlığıyla bilimsel eser olarak Kazan Üniversite'sinde Rusça ve Fransızca yayınlanmıştır.

1873'te İngiliz matematikçi William Kingdon Clifford Lobachevsky'nin bütün bu çabasının sonucunun bilimsel devrim niteliğinde olduğunu *"Vesalius, Gallen için ne ise; Copernicus, Ptolemy için ne ise; Lobachevsky, Euclides için odur"* sözleriyle ortaya koymuştur (Burton, 2018, s. 584-595).

Lobachevsky, oluşturduğu yeni geometride Euclides'in 5. postulatına karşıt bir ifadeyle değiştirerek geri kalan diğer postulatları korumuştur. Lobachevsky "Verilen bir doğruya doğru üzerinde olmayan bir noktadan geçen iki paralel doğru vardır" (Burton, 2018, s. 596) varsayımını kullanarak geri kalan diğer aksiyomları koruyarak teoremini ispatlamıştır. Lobachevsky'nin *Hiperbolik Geoemetrisinde* Euclides'in 5. Postulatı şöyle; "Bir düzlem üzerinde bulunan m doğrusu dışındaki P gibi bir noktadan, m doğrusuyla kesişmeyen birden fazla doğru geçer" geçmektedir (Yıldırım, 2018, s. 39).

Lobachevsky yeni geometrisine önce "Imaginary Geometri" (İmgesel/Hayali Geometri) demiştir ardından da "Pangeometry" adını vermiştir. 1871'de Felix Klein tarafından Lobachevsky'nin geometrisi "Hiperbolik Geometri" olarak matematik literatürüne girer ve günümüzde de bu şekilde bilinmektedir.

Hiperbolik geometri negatif eğimli yüzeylerde daha çok geçerlidir. Örnek teşkil etmesi açısından hiperbolik geometrinin negatif eğimli yüzeylerde oluşturduğu üçgen modeli aşağıda şekil 1.4'te gösterilmiştir. Hiperbolik geometri de üçgenin iç açılar toplamı 180 dereceden küçük olacak şekildedir. Görsel açıdan da daha küçük bir orantıya sahip bir şekil oluşturmaktadır.



Şekil 1.3: **Hiperbolik geometrinin negatif eğimli yüzeylerde oluşturduğu üçgen modeli**
Kaynak: Kökcü, 2017, s.7

1826-1866 yılları arasında yaşayan Alman matematikçi Georg Friedrich Bernhard Riemann da Euclides-dışı geometri olarak başka bir sistem oluşturmuştur. “Elliptic Geometri” diye adlandırdığı bu sistemde Riemann, düzlemin yerine küre, doğru parçasının yerine de daire yayı koymuştur. Bu durumda iki nokta arasındaki en kısa uzaklık yay olmaktadır. Riemannın geometrisinde Euclides’in 5. postulatı için paralel doğrular olmadığından “Doğrular iki noktada birden kesişebilirler şeklinde karşımıza çıkar” Euclides geometrisinde olan “Bir noktadan bir başka noktaya düz bir doğru çizilebilir” (Burton, 2018, s. 600) 1. postulatı, Riemann Geometrisinde “iki farklı nokta en az bir doğru belirler” (Burton, 2018, s. 600) şeklindedir. Ve yine Euclides geometrisinde “Bir tane doğru parçasını her iki yöne de sürekli bir şekilde uzatmak mümkündür” (Barker, 2017, s. 38) olan 2. postulat ise Riemann geometrisinde “Bir doğru sınırsızdır.” şeklindedir (Burton, 2018, s. 600).

Elliptic Geometry’i önemli kılan özelliklerden biri doğruların sonlu olması ancak buna rağmen sınırsız olması ve ikincisi ise uzay kavramına bilinenin dışında yeni bir içerik kazandırmasıdır.

Aşağıda Philip J. Davis, Reuben Hersh, Elena Anne Marchisotto *Tüm Yönleriyle Metematiksel Deneyim* kitabında da kullandıkları gibi Euclides Geometrisi ve Euclides dışı Geometrileri (Lobachevski ve Riemann Geometrileri) daha iyi karşılaştırmamızı sağlayacak bir tablo mevcuttur.

Tablo 1.1: Euclides Geometrisi ve Euclides-dışı Geometrilerin karşılaştırılması

	Euclides	**Lobachevski**	**Riemann**
Farklı iki doğru	en çok bir noktada kesişir	en çok bir noktada kesişir	bir (tekli eliptik) noktada ve iki (çiftli eliptik) noktada kesişir
L doğrusuve L’de yer almayan P noktası verildiğinde, P noktasından geçen ve L doğrusuna paralel olan	sadece tek bir doğru vardır	en az iki doğru vardır	hiçbir doğru yoktur
Doğru	nokta yardımıyla iki parçaya ayrılır	nokta yardımıyla iki parçaya ayrılır	nokta yardımıyla iki parçaya ayrılmaz
Paralel doğrular	eşit uzaklıktadır	asla eşit uzaklıkta değildir	mevcut değildir

	Euclides	Lobachevski	Riemann
Doğru, iki paralel doğrudan biri ile kesişiyorsa	diğeri ile de kesişmelidir	diğeri ile kesişebilir de kesişmeyebilir de	-
Geçerli bir Saccheri hipotezi bir	dik açı hipotezidir	dar açı hipotezidir	geniş açı hipotezidir
Aynı doğruya dik olan iki farklı doğru	paraleldir	paraleldir	Kesişir
Üçgenin içi açılar toplamı	180 dereceye eşittir	180 dereceden küçüktür	180 dereceden büyüktür
Üçgenin alanı	iç açılar toplamından bağımsızdır	iç acılarının toplamın küçüklüğü ile orantılıdır.	iç açılarının toplamının büyüklüğü ile orantılıdır
Tekabül eden açıları eşit olan iki üçgen	benzerdir	eşittir	eşittir

Kaynak: Davis, Hersh ve Marchisotto, 2015, s.246

Tabloyu yorumlarken “doğru” kelimesi yerine “büyük çember” ve nokta kelimesi yerinede “nokta çifti” diyerek küre yüzeyiyle ilgili daha doğru tanımlamalar oluşturmak Euclides-dışı geometrilerde mantıksal tutarlılığı sağlamak açısından önemlidir.

Euclides-dışı geometrilerin gerçekte ne kadar önemli olduğu Johann Carl Friedrich Gauss, John Bolyai ve Nicolai Ivanovitch Lobachevsky gibi kişilerin ölümü sonrasında[10] daha anlaşılır olmuştur.

Matematik camiasında bir sistemin ciddiye alınabilmesi için hem tutarlı hem de doğru olması gerekmektedir. Euclides-dışı geometrilerinde hem tutarlı hem de doğru olması gerekiyordu. Bunun için ilk olarak kolları sıvayan 1868’de İtalyan matematikçi Eugenio Beltrami’dir. Euclides-dışı geometrinin Euclides geometrisi kadar tutarlı olduğunu 5. Postulatı yadsıyarak paralel postulatın diğer postulatlardan bağımsız olduğunu ve bu nedenle de bu postulatın diğer postulatlara dayandırılarak ispat edilemeyeceğini öne sürmüştür. Eğer paralellik postulatı diğer dört postulattan çıkarsana bilir olsaydı Euclides-dışı geometrilerin tutarlılığı mümkün olmayacaktı. Çünkü bu geometrilerde paralel postulat yadsınmakta, diğerleri ise olduğu gibi korunmaktadır. Bu bağlamda bu yeni geometrilerin tutarlı çıkması

[10] Euclides geometrisinin sarsılmazlığını yıkmak oldukça güç olduğundan yaptıkları iş hemen özümsenemedi. Ölümlerinden bir dönem sonra anlaşılır olmuşlardır.

sadece Euclides geometrisinin değil matematiğin de "*mutlak doğruluk*" iddiasını yıkmıştır. Matematiğe dair mutlak doğruluk iddiasının sarsılması matematiksel doğruluğun göreceli olduğu düşüncesini ortaya çıkarmıştır. "Matematiksel doğruluk görecelidir" düşüncesi de "Bir teoremin doğruluğu, dayandığı aksiyom ya da postulatın doğruluğuna bağlıdır" şekline dönüşmüştür. Salt matematikte "postulatlar doğru ise teoremler de doğrudur" ifadesi yeni geometriler içinde geçerlidir.

Euclides-dışı geometrilerin kırdığı bir diğer yargı postulat kavramı ile ilgilidir. Postulat yani aksiyom 'doğruluğu apaçık zorunlu önermeler' demektir. Ancak 5. postulatı ispatlama çabalarında postulatın yerine ona ters düşen farklı postulatlar konulması olgusu postulat kavramını zorunlu önermeden varsayıma düşürmüştür. O halde postulat kavramı için "Euclides postulatları zorunlu, değişmez ve uzaysal ilişkileri saptayan biricik doğruların olmadığı önermelerdir" şeklinde ifade edilebilir (Yıldırım, 2018, s. 41). Kırılmaz sanılan bu yargıların değişmesi tek bir geometrinin temsil ettiği bir uzay yerine faklı uzay kavramlarınında kullanılabileceğini göstermiştir.

Geometrinin daha çok uzay bilimi ile ilgili olması ve uzayın fiziksel olarak ölçülememesinden dolayı Euclides geometrisinin mi yoksa Euclides-dışı geometrilerin mi en üstün en doğru olduğunun belirtilmesi zorluk oluşturmaktadır. Hangisinin daha doğru olduğunun soruşturulması yerine hangisinin uygulama yönünden daha yararlı olduğunu soruşturmak matematiğin gelişimi açısından daha önemlidir. Öyle ki Euclides geometrisi erişilebilir uzay bölgesinde [11] daha avantajlı konumda iken Albert Einstein'in rölativite teorisinde Euclides-dışı geometrilerinden Elliptic Geoemtri'yi kullanması ve psikoloji biliminin ise görsel uzaya ilişkin çalışmalarında ise Hiperbolik geometriyi kullanması en doğru geometriden çok işe yarar geometri düşüncesini önemli kılmaktadır.

Şimdi de soyut matematiğin yani saf(pür) matematiğin yükselişinde önemli olan bir diğer faktöre yani Georg Cantor'un küme kuramına göz atalım.

1.2.3. Georg Cantor'un Küme Kuramı

Alman matematikçi Georg Cantor ya da tam adıyla Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) *kümeler kuramının kurucusu*dur. Ayrıca *sonsuzluk* üzerine yeni söylemler geliştirmiştir. Georg Cantor, ilk araştırmalarını trigonometrik diziler üzerine yapmıştır. İrrasyonel sayıların cebirsel olarak bağımsız teorilerine rağmen trigonometrik dizilerin ortaya

[11] Ulaşılabilir uzay bölgesi kavramından yaşadığımız dünya anlaşılmalıdır.

çıkardığı özgün problemleri araştırma ihtiyacı içine girmiş olması onu, 1874'te küme kuramının doğuşuna götürmüştür. Matematikte antik çağlardan beri tartışmalara sebep olan *Sonsuzluk* kavramına bir tanım getirme ihtiyacı Georg Cantor'a *sonlu ötesi* sayılar (*İng. transfinitenumbers*) kavramınının kapılarını açmıştır. 1895 yılında "Beitrage zor Begrundung der Transfiniten Mengenlehre" adlı makalesi "Sonlu ötesi Sayılar Teorisine Katkılar" adıyla daha sonra Ingilizceye çevrilmiştir. Bu makalede Georg Cantor ilk olarak *küme* (*Alm. magne*) kavramını açıklamıştır.

Cantor küme kavramını şu ifadelerle tanımlamıştır: "Kümeden anlamamız gereken, sezgi ya da düşüncemizin belli ve fark edilebilir nesnelerinin bütün olarak M'de toplanmasıdır. Bu nesnelere M'nin elemanlarıdır adı verilir" (Burton, 2018, s. 678). Cantor'un kendi küme tanımında asıl vurguladığı kısım bir kümenin elemanlarıyla belirlenebileceği vurgusudur. Georg Cantor'un sonsuz kümeler ile ilgili çalışmalarına baktığımızda ise ilk olarak bu konuda Galileo'nun 1632'de yazdığı *İki Büyük Dünya Sistemi Hakkında Diyalog* (*İng. Dialogue Concerningthe Two Chief World Systems*) adlı eserde geçen "Sayılar kadar sayıların kareleri vardır çünkü onların sayıları kadar kökleri vardır" ifadesinin Georg Cantor'a ilham olduğudur (Burton, 2018, s. 678). Burada anlaşılması gereken; sonsuz bir kümenin parçasının, tüm küme kadar çok elemanı olabileceğidir.

Cantor, iki küme olarak doğal sayılar ve tam sayılar arasında birebir eşleme yaparak sonsuz bir kümenin eleman sayısını bulmaya çalışmıştır. Bu iki kümenin bire bir denkliğini sağlayan fonksiyonlar olduğunu ve sanıldığının aksine tam sayıların doğal sayıları kapsamadığını bunun yerine iki kümenin de aynı eleman sayısına sahip sonsuz elemanlı kümeler olduğunu ispatlamıştır. Cantor, bu kümelerin öğe sayısını $\aleph_0$ *(İb. Aleph 0*) alef sıfır ile göstermiştir. $\aleph_0$ en küçük sonsuz kardinal sayısı olarak kabıl edilmiş ve doğal sayılar, tam sayılar ve rasyanel sayıların eleman sayısı olmuştur. Cantor, reel sayılar kümesi için ise doğal sayılar kümesininin eleman sayısı olan alef sayısından en bir fazla elamana sahip olduğunu ve bu elemanların sayılamayacağını yani *sonsuz köşegenleştirme yöntemini* (*İng. Diagonalization*) kullanarak ispatlamıştır. Ayrıca bir kümenin alt kümelerinin kümesinin de eleman sayısının doğal sayıların elaman sayısı ile birebir eşleşemeyeceğini ve $\aleph_0$ olan eleman sayısından da fazla olduğunu ispatlamıştır. Bu durumda doğal sayılar gibi kümeler sayılabilir bir sonsuzu ifade ederken reel sayılar gibi kümeler *sayılamayan bir sonsuz* ifade ederler. Cantor, hiçbir kümenin eleman sayısı bakımından en büyük küme olamayacağını savunurken, Russell bu noktada kendi kendisinin elemanı olmayan kümelerin yani evrensel(E) kümenin bunu kapsamadığını iddia etmiştir. Ancak Cantor evrensel kümenin bu dumdan farklı olduğunu çünkü bu kümenin kendisinin de bir küme olduğunu ve bu yüzden bu kümenin de bir elemanının da kendisi olduğunu ve bu durumun küme olma tanımına aykırı olduğunu ve bundan dolayı da evrensel kümenin olamayacağını ispatlamıştır (Öztürk, 2011, s.40-43).

Sonsuza dair "Tüm bağların üstüne çıkan ama her zaman sonlu kalan" anlayışın aksine Cantor'un *sonsuzu,* "[t]amamlanmış bir bütünün belirli biçimdeki sayılar tarafından matematiksel olarak sabitlenmiştir" (Burton, 2018, s. 680). Yani sonsuz bir kümenin fiziksel bir gerçekliği olmaması rahatsız edici olsa da Gauss'un sonsuza dair "sonsuz bir mecazdır" ifadesinden de anlaşılıyor ki dönemin matematikçilerinin sonsuzluk anlayışı hala bulanıktır. Ancak Cantor sonsuza dair bulanık havayı dağıtırcasına her bir kümeye çoğulluğunu temsil eden bir sayı vermiştir. Cantor'un bu kümeleri ölçme çabası *sayal* sayılar (kardinal *sayılar*) kavramını ortaya atmasını sağlamıştır. *Sayal sayılar* kavramı "Eğer kümeler denklerse iki küme aynı kardinal sayıya ya da aynı kuvvete sahiptir" düşüncesini oluşturmuştur (Russell, 2013) . Cantor'un *sayal sayı* tanımı daha sonrasında Gottlob Frege ve Bertrand Russell tarafından "Bir A kümesinin kardinal sayısı A'ya denk tüm kümelerin kümesidir" (Burton, 2018, s. 681) şeklinde genişletilmiştir.

Cantor'un bu çalışmaları David Hilbert'in kendi felsefesini geliştirmesinde etkili olmuştur.

1.3. Matematiğin Temelleri Tartışmasının Büyümesi

Matematik Euclides'in geometriyi bir aksiyomlar sistemine dayandırmasından dolayı kesin bir bilim olarak kabul edilmesinin yanında diğer bütün bilimler içinde ideal olan bir bilim olmuştur. Ancak Euclides'in paralellik postulatını ispatlamaya girişen Gauss, Bolyai ve Lobachevsky'nin sonuç olarak ulaştığı *hiperbolik geometri* ve Riemann'ın geliştirdiği e*liptik geometri'*nin kendi içinde farklı aksiyom sistemlerine dayanması önce evrenin gerçek geometrisinin ne olduğu tartışmalarını ortaya çıkarmış ardından da matematikte tutarlılık sorununun fitilini yakmıştır. Matematiğin temellerinin altından Euclides geometrisinin kayması birçok filozof ve matematikçiyi kesin bilim olan matematiği temellendirme arayışına sokmuştur (Öztürk, 2011, s. 18-22).

1858 ve 1932 yılları arasında yaşayan İtalyan matematikçi ve glottolog[12] Giuseppe Peano, 1889'da matematiğe kesinlik ve mutlaklık arayışı için matematiği temellendirme adına yola çıkanların başında gelmektedir. Peano, bu temellendirme girişimine katkı sağlayacak

[12]Daha az bilinen dilleri araştırmak için hazırlanmış bir veri tabanı uzmanı

bugün tam sayılar kümesi olarak bilinen ve Peano'nun aksiyomları diye geçen beş aksiyom geliştirmiştir. Bunlar, 4 aksiyom ve 1 yardımcı aksiyomdan oluşmaktadır. Yardımcı aksiyom olarak geçen 5. aksiyom tümevarım ilkesi olarak da bilinmektedir.

1848 ve 1925 yılları arasında yaşayan modern matematiksel mantığın ve analitik felsefenin kurucusu kabul edilen Alman matematikçi Friedrich Ludwig Gottlob Frege'de Peano gibi aynı dönemlerde matematiğe temel arayışındadır. Frege, matematiksel tümevarımın, saf mantığa indirgenip indirgenemeyeceğini merak ederek çalışmalarını bu doğrultuda geliştirmiştir. Öyle ki bu konuda *Aritmetiğin Temelleri* adıyla bir kitap çıkarmıştır. Frege'nin bu konudaki çalışmalarına mantıksalçılık başlığı altında daha sonra değinilecektir.

1854 ve 1912 yılları arasında yaşayan matematikçi, teorik fizikçi ve bilim felsefecisi ayrıca "son evrenselci" olarak tanınan Fransız Matematikçi Jules Henri Poincaré de matematiğe temel arayışı tartışmasına dahil olanlardandır. Henri Poincaré matematiksel tümevarımın mantık ilkelerine indirgenemeyeceğini savunarak Frege'ye karşı çıkarken ayrıca matematiksel tümevarımın analitik akıl yürütmenin de bir parçası olamayacağını savunmuştur.

1872 ve 1970 yılları arasında yaşayan Britanyalı filozof, matematikçi, tarihçi ve toplum bilimci Bertrand Arthur William Russell matematiğe temel bulma arayışında en etkili çıkışları yapanlardandır. Russell ayrıca matematik felsefesi kuramlarından mantıksalçılık felsefesinin başlıca düşünürlerinden sayılmaktadır. Bertrand Russell, matematiksel tümevarımı bir tanım olarak kullanarak tam sayıların tanımını matematiksel tümevarımı mümkün kılacak şekilde kabul etmesi açısından Frege ile benzeşmektedir. Ancak Frege'nin Cantor'un küme kuramına benzer bir argümanı olan V. Aksiyomunu çelişkili bulmasından ve bu çelişkiyi ortaya koyması açısından da ayrışmaktadırlar. Russell Paradoksu olarakta matematik literatüre giren bu çelişki ve Frege' nin V. aksiyomu şöyledir:

V.Aksiyom → Tanımlanabilir bir küme daima bir bütünlük oluşturur.

Russell, 'kendi kendisinin elemanı olmayan kümelerin kümesi'nin de bir bütünlük oluşturup oluşturmadığı üzerine bir tartışma başlatır. Çünkü Russell'a göre bu tarz bir küme çelişkilidir. Çünkü kendi kendisini içirir, ancak ve ancak, eğer o küme kendi kendisini içermez ise.

Russell, ikinci kitabı olan "*Aritmetiğin Temellerinin"* yazım aşamasında olan Frege ile vardığı çelişkiler konusunda da paylaşım içerisine girmiştir. Russell'in bu paylaşımından sonra Frege kitabını Russel'ın yorumunu da ekleyerek basmıştır.[13] Frege'nin matematiğin temelinin

[13] "Frege'nin kitabını baskıdan çekip temel değişiklikler yapması için çok geç olduğundan bir son söz yazmakla yetinmek zorunda kalmış ve Frege, Russell'ın mektubunu 22 Haziran 1902 günü yanıtlamıştır" (Durmaz, 2014, s. 25).

mantıkla sağlandığına ve aritmetiğin bu temelin bir parçası olduğuna dair girişimleri sekteye uğrarken Russell'in Frege'nin sisteminde bulduğu çelişki yüzünden Frege'nin mantıksalclık üzerindeki iddiaları azalmıştır. Russell, kendi bulduğu çelişkiye rağmen matematiğin temelinin hala mantık olduğuna inandığından mantıksalcılık davasını daha sağlam bir şekilde yani çelişkilerden ve paradokslardan arındırmak için *Tipler Kuram*ını geliştirmiştir.

Bu tartışmalar matematiğin temel ilkeleri probleminin daha da artacağını göstermiştir. Bu tartışmaların odağını saf mantığın gelişimi, sonsuzluğun tanımı probleminin derinleşmesi ve bu kavramlar hakkındaki yeni tartışmalar oluşturmuştur. Bu tartışmalar tezimizin de esas konusunu oluşturan *matematik felsefesinin temel arayışında* mantıksalcı, biçimselci ve sezgici diye üç yaklaşıma dönüşmüştür (Gür, 2019, s. 70-72).

İKİNCİ BÖLÜM

MATEMATİK FELSEFESİNİN ANA PROBLEMİNE YÖNELİK BİÇİMSELCİ VE SEZGİCİ YAKLAŞIMLAR

2.1. Matematik Felsefesinde Temel Yaklaşımlar

Russell'in çelilşkilerinden sonra matematiğin temelleri tartışmasını çözmeye yönelik pek çok yaklaşım ortaya çıkmış olsada çeşitli nedenlerle bu yaklaşımlardan mantıksalcılık, biçimselcilik ve sezgicilik diğerlerine göre daha fazla taraftar toplamıştır. Aşağıdaki bölümlerde bu yaklaşımların matematiğin temellerine dair görüşleri kısaca belirginleştirilecektir.

2.1.1. Mantıksalçılık

Aritmetiğin, mantığın bir uzantısı olduğunu savunan *mantıksalçılık* (*İng. Logicism*) ekolü; Gottlob Frege, Bertrand Russell, Gottfried Wilhelm Leibniz, Alfred North Whitehead ve Rudolf Carnap'tan oluşan bir düşünce okuludur. Bu okulun üyeleri matematiğin kesinliğini, mantıksal kurallara borçlu olduğunu ve mantığın kavram ve ilkelerinin, matematiksel doğruları elde etmek için yeterli olduğunu savunmuştur. Aritmetiğin saf mantığa indirgenmesini savunan mantıksalçılar, bu indirgenmeden dolayı oluşabilecek paradoks ve çelişkileri bertaraf etmeyi de ayrıca hedeflemişlerdir.

Peano'nun postulatları ve Frege'nin *sayı* kavramı ve aritmetiği temellendirme girişimleri mantıksalçılık felsefesinin ilk aşamasını oluşturmaktadır.

Frege, aritmetikteki kanıtların yalnızca bilginin her alanında geçerli olan genel yasalara dayalı olarak saf mantığa mı dayandığını, yoksa ampirik gerçeklerden desteğe mi ihtiyaç duyduklarını merak ediyordu. Bu merakına dair yanıtı aritmetiğin kendisi şeklinde olmuştur (Kenny, 2006, s.353). Bu yüzden aritmetiği mantığa indirgemeye çalışmıştır. İlk olarak da matematikçilerin bile tam olarak bir tanımını yapamadığı *sayı* kavramına açıklık kazandırmakla işe başlamıştır. Sayıların, insan zihnindeki fikirler olduğunu iddia eden psikolijzme [14],

[14] "Psikolojizm en geniş anlamıyla mantık ilkelerini, metafiziği, bilgibilimi (epistemoloji), hatta etiği, tüm felsefi kavram ve sorunları psikolojik görüngüler olarak gören ve öznel psikolojik deneyim açısından açıklamaya çalışan felsefi yaklaşımdır" (Türker, 2011).

evrimleştiğini idda eden tarihselciliğe ve fiziksel dünyadaki nesneler olduğunu iddia eden empirisizme karşı sert eleştiriler getirerek, *sayı* kavramına mantıksal bir açıklık kazandırmaya çalışmıştır. Frege'ye göre "Sayı ne dışsal şeylerin bir özelliğidir ne de öznel zihinsel şeylerdir; yani sayının fiziksel olması bakımından değil, nesnel olduğu bakımından "nesnel" olduğunun altının çizilmesi" gerekliliğini savunmuştur (Frege, 2017, s. 89). Frege'nin 'nesnel' kavramının altını çizmesinin nedeni 'nesnel' kavramıyla ilgili bir iddiasının olmasıdır. Bu iddiasını ilk olarak, her bir sayının kendi kendine yeten bir nesne olmasına ve ikinci olarak ise içeriğinin bir kavramla ilgili bir iddia olmasına bağlamaktadır. Bir sayının nesne olduğunu vurgularken Frege, sayının bir ağaç, masa, gibi elle tutulur bir şey olduğunu savunmuyor ya da sayının bir bireye ait herhangi bir şeye ait bir özellik olduğunu da savunmuyor ancak onun öznel herhangi bir şey, herhangi bir zihinsel öğe veya zihinsel öğenin herhangi bir özelliği olduğunu da reddediyor. Bu yüzden Frege, sayıyı Platon gibi üçüncü bir bölgeye koyup kavramları zihinden bağımsız varlıklar olarak görmekte ve sayılar nesnel olmaktadır. Bu yüzden de sayı ifadeleri kavramlar hakkındaki ifadeler olmaktadır (Kenny, 2006, s.355).

Frege'ye göre, "Aslında sayılar soyut düşüncelerdir. Yani doğmayan, ölmeyen, değişmeyen ve bizden bağımsız nesnelerdir. Bu yüzden de aritmetik, *zaman sezgisine* dayalı sentetik *a priori* değil, mantığa dayanan analitik *a priori*'dir" (Gür, 2004, s. 40). Frege ayrıca, Peano'nun postulatlarını mantık ilkelerinden çıkarsama yoluyla temellendirme çalışmalarına da girişmiştir. Bu sayede aritmetiğin mantığa indirgenebileceğini savunmuştur. Frege'nin bu girişimleri mantıksalçılık felsefesi bağlamında iki ilke altında toplanılabilir.

1. "Tüm matematiksel kavramlar, mantığın kavramlarıyla açıklanabilir. Bu ilke bir anlamda tanımlama sorununu açıklar.
2. Matematiğin tüm aksiyom ve teoremleri, mantığın ilkelerinden çıkarılabilir" (Yemenli, 2013, s. 18).

Mantıksalçılık ekolü açısından Russell'in çalışmaları ise ikinci aşamayı oluşturur. Matematik ve mantık disiplinlerinin ilişkisiyle ilgili düşünceleri mantıksalçılık felsefesine dair bakışının özeti niteliğindedir.

> "Matematik ve mantık arasındaki fark gençle yetişkin arasındaki farka benzer: Mantık matematiğin gençliğini, matematik mantığın olgunluk çağını temsil etmektedir. (...) iki disiplin çeşitli yönleriyle öylesine kesişmektedir ki, aralarındaki sıkı ilişki konuyu bilen hiçbir öğrencinin gözünden kaçmayacak kadar açıktır. Özdeşlik savımızın ispatı teknik ayrıntılara inmeyi gerektiren bir sorundur. Mantığa ait olduğu kuşku götürmez öncüllerden başlayıp, dedüktif çıkarımla, matematiğe ait olduğu yadsınamaz sonuçlara ulaştığımızda, iki alan arasında hiçbir noktada kesin bir ayrım yapılamayacağını kolayca görürüz. Ama gene de sözünü ettiğimiz özdeşliği içine sindiremeyenler çıkarsa, onları, Principia Mathematica'nın zincirleme giden tanım ve çıkarımlarının hangi noktasında mantığın bitip matematiğin

başladığını göstermeye çağırırız. Görülecektir ki, verecekleri yanıt keyfi olmaktan ileri geçmeyecektir" (Russell, 1999, s. 93).

Russell'in amacı; tüm matematiği mantığa indirgemeye çalışmaktı. *Principia Mathematica* adlı eserini bu amacı doğrultusunda "Bütün arı matematiğin tamamen mantıksal öncüllerden çıkarılabileceğini ve yalnızca mantıksal terimlerle tanımlanan kavramları kullandığını" yazmıştır (Godwyn & Erwine, 2003, s. 171). Bunun için de Russell önce Frege gibi doğal sayıların küme kavramına indirgenmesine çalışmıştır. Ancak bir süre sonra küme kavramının Frege'nin V. Aksiyomu üzerinden yol açtığı çelişkileri fark ederek Frege ile bu durumu paylaşmıştır. İlk bakışta bulunan bu çelişkiler Russell'in çalışmalarını zorlaştırmakla kalmamış, küme kavramını daha da karmaşık hale getiren yeni aksiyomlarla mantıksalçılığın beklentilerini de zora sokmuştur. Bu zorluğa rağmen Russell, paradokslar sorununa çözüm üretebilmek için *tipler teorisini (türler kuramını)* geliştirmiştir. Bu teori kısaca, kümeler teorisinin konusu olan nesnelerin hiyerarşik bir düzende işlem görmesini öngörmektedir. Kümeler ve nesneler belirli bir sistem içerisinde bulunurken hiyerarşinin en alt basamağında nesneler vardır. Bir üst basamağında birinci dereceden kümeler ve onun üzerinde de başka bir küme veya nesneler grubu vardır. Kümeler teorisinin uygulanmasında işlem gören kümenin tüm elemanlarının aynı tipten olması gerekmektedir. Yani her nesne ya da küme belli bir tipte olmalıdır. Ayrıca bir küme yalnızca daha alt tipteki kümeleri veya nesneleri içerebilir ve hiçbir küme kendi kendini içeremez. Russell'in kümeler ve nesneler arasında kurduğu bu hiyerarşik yapı (*Tipler Kuramı)* paradoksların oluşmasını önlemekle kalmamış, mantıksalçılığın başarısı olarak gösterilen formel mantık ve matematik arasındaki ilişkiyi de kanıtlamaya çalışmıştır (Öztürk, 2011, s. 45), (Sezgin, 2013, s. 56).

Bertrand Russell ve Alfred North Whitehead'in çabalarının ortak ürünü olan *Principia Mathematica* da iki filozof matematiği formalize etmeye ve mantığa oturtmaya çalışmışlardır. Bu kitapta ele aldıkları kendi kendisinin üyesi olan kümeleri dışarıda tutup paradoksların engellenmeye çalışıldığı *tipler teorisi*yle, bir süre sonra paradokslardan kurtulmak adına, küme kuramı karmaşık hale dönüştürülmüş ve sonsuzluk aksiyomu gibi aksiyomlarda eklenmiştir. Daha sonraları sonsuzluk aksiyomunun yarattığı karmaşadan dolayı, Russell "Sonsuzluk aksiyomunu mantıksal terimler ile ifade edilebilen fakat sadece mantık ile iddia edilemeyecek önermelere örnek alabiliriz" (Gür, 2004, s. 41) diyerek sonsuzluk aksiyomu ile ilgili tatminsizliğini ifade etmiştir. Russell sonsuzluk aksiyomuna dair bu son düşüncesi sonraki çalışmalar ile desteklenmiş ve birçok önemli matematiksel aksiyomun birbirinden bağımsız olduğunun önünü açmıştır.

Mantıksalçıların aritmetiği saf mantığa indirgeme uğraşı ile bu indirgemeden doğabilecek paradoks ve çelişkileri bertaraf etme çabası adına yüklemsiz (*İng. non-predicative*) olan bütün kavramları kullanmayı yasaklama önerilerine ve ayrıca “Belli bir kümeye ait eleman, aynı kümenin başka elamanları yoluyla tanımlanamaz" (Gür, 2019, s. 76) şeklindeki kuralla geliştirdikleri *Tipler Kuramı* ve bu yolla olası muhalif paradoksların üstesinden gelme iddiasına rağmen mantıksalçı yöntem bütün matematiksel ilkeleri mantıksal ilkelere indirgemeyi başaramamıştır.

2.1.2. Biçimselcilik ve Öncüleri

Başlıca temsilcileri arasında David Hilbert, John Von Neumann ve Haskell Curry’nin olduğu matematik felsefesinin matematiğe temel bulma arayışlarından olan başka bir yaklaşım da *biçimselcilik*tir. Mantıksalçılar matematiği mantık alanında temellendirmeye çalışmışlardır ancak bu çabaları kümeler teorisinden kaynaklanan paradokslar yüzünden matematiğin tutarlılığına gölge düşürmüştür. Sezgiciler ise matematiğin temelinin klasik matematikte olmadığı görüşündelerdi. Biçimselciler hem mantıksalçıların hem de sezgicilerin matematiğin temeli konusunda yönelttikleri eleştirilere karşı harekete geçerek, matematiğin tutarlılığını güvence altına almayı hedeflemişlerdir.

Biçimselciler, matematiğin soyut bir gerçekliği temsil eden bir önermeler bütünü olmadığını savunarak, matematiksel sistemlere biçimselleştirilmiş sistemler olarak bakmaya çalışmışlardır. Biçimselleştirilmiş bu sistemlerin kullanışlılığını da sistem aksiyomlarının ve dönüştürme kurallarının, önemli deneysel bildirimlerini birbirinden türeterek kullanılabilir olması gerçeğinden almış olmasına bağlamışlardır (Barker, 2017, s. 160).

Mantıksalcıların aksine biçimselciler, matematik gerçekliğinin soyut karşılığı olan önermeler bütünü olmamasını ve bu yüzden matematiğin nesne veya özelliklerin ontolojisine fazla bağlılık getirmediğini savunmaları, matematiği kağıt üzerindeki işaretlerle oynanan bir oyun ya da oyuna dayalı bir sistem gibi düşünmelerine neden olmuştur. Öyle ki biçimselcilerin bu konudaki yaklaşımı *Tüm Yönleriyle Matematiksel Deneyim* kitabında daha iyi bir ifadeyle şöyle geçer; “Matematiği kesin ispatlar bilimi olarak tanımlayan biçimselciler, matematiği aritmetikten başlayarak mantıksal bir çıkarım oyunu olarak görürler” (Davis, Hersh, & Marchisotto, 2015, s. 377).

Matematik felsefesi yaklaşımlarından olan biçimselciliği savunan bazı radikal biçimselciler matematiği sembol değişiminden ibaret görmenin sonucunda anlamı dahi yok saymışlardır. Bazı ılımlı biçimselciler ise sembollerin anlamı olduğunu savunmuşlardır. Bu fikir ayrılıkları, biçimselcilerin kendi içlerindeki farklı bakış açılarından dolayı biçimselciliği oyun biçimselciliği ve terim biçimselciği olarak iki türe ayırmıştır.

Oyun biçimselciliği, matematiği sembollerden oluşan bir tür oyun olarak görmektedir. Ayrıca zor metafizik ve epistemolojik soruları cevaplamakla uğraşmışlardır. Örneğin bu sorular ve verdikleri yanıtlar şöyledir;

“Matematik ne hakkındadır. Hiçbir şey.

Sayılar, kümeler vs. nedir? Bunlar var değiller ya da olmamalılar.

Matematik nasıl bilinir? Matematiksel bilgi nedir? Bu bilgi, oyunun kurallarının veya bu kurallara göre belirlenen hareketlerin bilgisidir” (Gür, 2004, s. 43) gibi sorulara yanıt geliştirmeleri ayrıca matematikle kurdukları bağın metafiziksel bir bağ olduğunu göstermektedir. Bu metafiziksel bağdan dolayı oyun biçimselcileri matematiksel ifadelerin hiçbir anlamı olmadığı görüşü altında toplanmışlardır. Bu görüşü destekleyenler matematikte geçen terimler ve nesneleri, özelliklerini ve ifadelerini seçemeyeceğini savunmanın yanında matematiği, boş sembol dizilerinin sabit kurallara göre dönüştürüldüğü bir hesap olarak görmektedirler. Bu sembol dizilerinin sabit kurallara göre dönüştürülmesini bir tür işaretlerle oynanan ve sembollerden oluşan oyun gibi düşünmektedirler. İlk matematiksel formalistlerden olan Alman matematikçi Carl Johannes Thomae (1841-1921) oyun biçimselciliği taraftarı olarak aritmetiğin boş denilen işaretlere sahip bir oyun olduğunu ve duruma göre atandıklarından başka hiçbir içeriğe sahip olmadıklarını savunarak biçimselci yaklaşımı matematikteki metafizik zorlukların üstesinden gelebileceği bir alan olarak görmüştür (Gür, 2004, s. 43), (Çevik, 2021, s. 77-79).

Terim biçimselciliği ise, matematiksel ifadelerin sayılara değil sembollere atıfta bulunduğunu savunmaktadır. Terim biçimselciliğinde, her matematiksel obje bir isimle ya da terimle anılır. Bunlar *tip* ve *fiş* gibi kavramlarla özdeşleştirilir. Ayrıca terim biçimselciliği matematiğin bir konusu olduğunu ve matematiksel önermelerin ya doğru ya da yanlış olduğunu savunmaktadır. Terim biçimselciliği aşağıdaki sorular gibi sorulara yanıt aramaktadır. Örneğin bu sorular ve yanıtları şöyledir;

“Matematik ne hakkındadır? Sayılar, kümeler, …

Sayılar, kümeler nedir? Bunlar dilsel özelliklerdir.

Matematiğin nasıl bilinebileceği? Matematiksel bilgi nedir? Karekterlerin birbiri ile nasıl ilişkili olduklarının ve bunların matematiksel pratik içinde nasıl manipüle edildiklerinin bilgisidir” (Gür, 2004, s. 43). Şeklindeki sorulara yanıt aranması bu yaklaşımı savunan biçimselcilerin daha ılımlı savunucular olduklarını ve matematikle kurdukları bağın sembolik de olsa bir zemini olduğunu göstermektedir.

İlk matematiksel formalistlerden 1821 ve 1881 yılları arasında yaşayan Alman matematikçi Heinrich Eduard Heine ise terim biçimciliğini savunanlardandır. Eduard Heine göre matematiksel ifadeler sembollerle ilişkilidir. Belirli somut şeylere sayılar adı verildiğinden bunun biçimsel bir konum oluşturduğunu ve böylece sayıların varlığının söz konusu olduğunu kabul ederek bütün diğer terim biçimselciliği savunanlar gibi matematiksel nesnelerin terimsel bir karşılık düzleminde yani sembolik olarak var olduğunu, bunun dışında matematiksel nesnelerin varlıklarının söz konusu olmadıklarını savunmuştur (Gür, 2004, s. 43), (Çevik, 2021, s. 77-79).

1862-1943 yılları arasında yaşayan Alman matematikçi David Hilbert, biçimselciliğin en önemli savunucusudur. Sonlu matematiğin gerçekliğine inanan Hilbert'in amacı tüm matematiğin eksiksiz ve tutarlı bir aksiyomatizasyonunu sağlamaktı. Bunun için de meta-matematiği oluşturmuştur. Bu sayede sonsuzun matematiğini meşrulaştırabileceğini varsaymıştır. Ancak Hilbert'in çabası Gödel'in eksiklik teoremine takılmıştır. David Hilbert kendi adıyla bir alt başlık olarak daha genişçe ele alınacaktır.

1903- 1957 yılları arasında yaşayan Macar- Amerikalı bilgisayar bilimci ve matematikçi John von Neumann, Hilbert'in biçimselcilik programının büyük bir destekçisi olarak başlarda onun yanında tavır göstermiş ve biçimselcilik programını şöyle özetlemiştir;

1. Matematik ve mantıkta kullanılan bütün sembolleri belirlemek
2. Klasik matematikte bu sembollerle elde edilen "anlamlı" diyebileceğimiz bütün teoremleri veya formülleri netleştirmek
3. Klasik matematikte "ispatlanabilir" diye bilinen formülleri inşa edebilecek bir inşa prosedürü sağlamak
4. Klasik matematiğin bu formülleri veya ispatları, aritmetik metotlarının sonlu uygulamalarıyla kontrol etmek" (Gür, 2019, s. 45).

Ancak Gödel'in Eksiklik Teoremleri'yle biçimselciliğe getirdiği ağır eleştirilerinden sonra biçimselcilik ile ilgili düşüncelerinde geri adım atmıştır.

1891-1970 yılları arasında yaşayan Alman filozof Rudolf Carnap, son dönem biçimselcilerden biri olarak matematiği biçimsel aksiyom sistemlerinin incelenmesi olarak kabul etmiştir.

1900-1982 yılları arasında yaşayan Amerikalı mantıkçı ve matematikçi Haskell Brooks Curry matematiği "biçimsel sistemlerin bilimi" olarak tanımlamaktadır. 1951'de yazdığı

Outline of a Formalist Philosophy of Mathematics kitabında biçimselcilik bakış açısı, formel bir sistemin temel önermelerinin doğruluğunu, onların sistemdeki kanıtlanabilirliği sayesinde mümkün olduğu şeklindedir. Bu bakış açısı ilk bakışta terim biçimselciğine yaklaştırsa da Haskell Curry'nin biçimselciliği, terim biçimselcilerden, oyun biçimselcilerden ve Hilbert'in biçimselciliğinden farklıdır. Çünkü Curry'nin biçimselciliği, matematiğin biçimsel yapısıyla ilgili olup sistemiyle ilgili değildir (Zach, 2019).

Mantıksalçı filozof Frege, terim biçimselcilerinden Heine ve oyun biçimselcilerinden Thomae'nin biçimselciliğe bakış açılarını şu üç noktada eleştirirmiştir.

1. "Biçimselciliğin matematiğin uygulanmasını açıklayamayacağını
2. Biçimsel teori ve metateoriyi karıştırdığını
3. Biçimselciğin sonsuz dizi kavramının tutarlı bir açıklamasını veremeyeceğini"

savunmuştur.

Frege'nin, Heine biçimselciliğine yönelik eleştirisi, biçimselciliğin sonsuz sekansları açıklayamayacağı şeklindedir. Ancak 1925 ve 2011 yılları arasında yaşayan İngiliz mantık profesörü Michael Dummett, Heine'nin açıklamasının somut nesnelerle ilgili değil, soyut sembollerle ilgili olduğunu savunarak Frege'ye karşı çıkmıştır. Ayrıca Frege, Thomae'nin biçimselcilikte de oyun ve teori arasında ayrım yapmakta başarız olduğunu savunmuştur (Şener, 2015, s. 74).

1922-1974 yılları arasında yaşayan Macar bilim felsefecisi Imre Lakatos, biçimselcilerin matematik tarihinin olmadığı görüşünü eleştirerek onların matematik tarihi ile matematik felsefesi arasındaki bağları koparttıklarını düşünmektedir.

1952-2020 yılları arasında yaşayan İngiliz kozmolog, teorik fizikçi ve matematikçi John D. Barrowise, biçimselciliğin matematiksel simgeler ile matematikçilerin akılları arasındaki ilişkiyi açıklamakta yetersiz olduğunu savunmuştur. Ayrıca biçimselcilerin matematiğin fiziksel dünyanın işleyişini tanımlamak bakımından ne kadar yararlı olduğunu açıklamada başarısız olduğunu ve biçimselcilerin matematiğin uygulamalı matematik yönünü de yok saydığını savunmuştur.

1906- 1978 yılları arasında yaşayan Avusturyalı- Amerikalı mantıkçı ve matematikçi Kurt Gödel, kendi adıyla anılan yani *Gödel'in Eksiklik Teoremleri* ile biçimselciliğe ağır eleştirilerde bulunmuştur. Bunlar şu şekildedir;

1. Gödel, birinci teoreminde biçimsel sistem olarak ortaya konan tutarlı hiçbir matematiksel teorinin, doğal sayıları barındıran bütün doğruları kapsayacak kadar eksiksiz

olmadığını savunarak aritmetiğin bütün doğrularının Peano aksiyomları veya daha büyük bir aksiyom kümesinden elde edilemeyeceğini,

2. ikinci teoremi yani eksiklik teoreminde ise sistemin güvende olup olmadığını anlayamayacağımızı çünkü bu türden sistemlerin tutarlılık kanıtının sistemin sadece kendi aksiyomları ve kanıtlama kuralları dahilinde verilemeyeceğini göstererek sistemin kendi kendisinin tutarlı olduğunu kanıtlanmasını eleştirmiştir (Öztürk 2011, s. 69-70), (Gür, 2019, s. 46).

Gödel, eksiklik teoremleriyle ulaştığı sonuçlar çok çarpıcıdır. Gödel bu sonuçlarla sadece hiçbir aksiyomatik teorinin aritmetiğin tüm doğrularını yakalayamayacağını ispatlamakla kalmadı aynı zamanda tutarlı hiçbir aritmetik teorisinin tamamlanamayacağını da kanıtlamıştır. Gödel'in ikinci elde ettiği sonuç çok daha önemlidir. Çünkü sağlamlık tutarlılık barındırırken tutarlılık sağlamlık barındırmayabilir (Papineau, 2012, s. 169). Ayrıca Gödel'in eksiklik teoremlerinde, bir teoriye sistematik olarak aksiyomlar eklemek onu daha az güçlü yapmadığı ve onun eksikliğini gidermediği (Tüm sağlam teoriler T için) (T'nin s'yi kanıtlayamadığı bazı doğru s tümceleri vardır) gibi her teorinin kendi kanıtlanamaz gerçeğinin olması onun herhangi bir teoride kanıtlanamayan belirli bir gerçeğin olduğu anlamına da gelmediğini (Öyle bir doğru cümle vardır ki) (tüm sağlam teoriler için T) (T, s'yi kanıtlamaz) göstermektedir. Bunun kolay anlaşılabilmesi için açısından 'Her çocuk kendi annesini sevse bile, tüm çocukların sevdiği belirli bir anne olduğu anlamına gelmez' örneği uygundur (Papineau, 2012, s. 176).

Biçimselciliğin matematiği sayılar alanına dönüştürmesi ve aksiyomların içeriklerinden yalıtılması Gödel'in biçimselciliğe getirdiği başka bir eleştiridir.

Biçimselciğin asıl kurucusu David Hilbert'in biçimselcilik ile ilgili görüşleri bir alt başlıkta derinlemesine ele alınacaktır.

2.1.2.1. David Hilbert Biçimselciliği

Biçimselciğin kurucusu kabul edilen Alman matematikçi David Hilbert (1862-1943) matematiğin hem soyut matematik hem de uygulamalı matematik alanında birçok çalışma yapmıştır. Hilbert'in bu çalışmalarından bazıları şöyledir;

1. 1888 yılında cebirsel sayı teorisiyle büyük ilerleme sağlayacak kanıtlar bulmuştur.

2. 1899'da yayınladığı "Geometrinin Temelleri" kitabında yeni geometri aksiyomlarıyla, iki boyutlu ve üç boyutlu geometriyi tek bir sistemde birleştirmeye çalışmıştır.
3. Albert Einstein'ın daha sonra *genel görelilik kuramını* sağlam bir zemin üzerine koymasını sağlayacak alan çekim denklemlerini Einstein'le beraber oluşturup uygulamalı matematiğe katkıları olmuştur.
4. Uygulamalı matematiğe bir diğer katkısı fizik bilimiyle ilgili olan *Hilbert Space Kuantum Mekaniğini* geliştirmiştir.

Hilbert'in tüm bu çalışmalarının yanında tezimizi asıl ilgilendiren onun mantık ve matematik temelleri konusundaki 1920 yılında oluşturduğu *matematiksel formalizm kuramı*dır.

Hilbert, matematiğin uygulamalı alanlarıyla ilgili çalışmalar ortaya koymuş olsa da matematiği temellendirme amacı için, arayışını uygulamalı matematik alanında değil soyut matematik alanında yapmıştır. Bu arayışının amacını da kendi sözleriyle şöyle ifade etmektedir:

> "Matematiğe bir temel sağlamaya yönelik olarak, tam olarak kanıt kuramı olarak adlandırabileceğim bu yeni yolla önemli bir hedef peşindeyim; çünkü her matematiksel önermeyi somut bir şekilde ortaya koyulabilecek ve açık bir sekilde türetebilecek birer formüle çevirerek, böylece matematiksel tanım ve çıkarımları ve yine de bilimin bütününün tam bir resmini sunacakları şeklde yeniden biçimlendirerek, matematiğin temellerinde dair bütün sorunları, şu an teşkil ettikleri haliyle, bir defada ve tamamen ortadan kaldırmak istiyorum" (Hilbert, 1967b [1927], s. 465).

Hilbert, bu amaçla ilk olarak geometriye yönelerek harekete geçmiştir. Paralellik postulatını ispatlama çabalarından sonra aksiyomlar "temel doğrular" olmaktan çıkmıştı. Hilbert aksiyomları ve aksiyom sistemini "temel doğrular" yerine "kavramlar arasındaki belirli karşılıklı ilişkiler" şeklinde yapılandırmayı hedefliyordu (Öztürk, 2019, s. 49). Bu doğrultuda geometrinin aksiyom ve temelleri sayılan önermeleri ortaya koyarak Euclides'in aksiyomlarını tamamlamaya çalışmıştır. Bu aksiyomlar sistemini oluştururken de şu üç koşulun korunması gerektiğini vurgulamıştır:

1. Aksiyomların seçilen konu için yeterli olması,
2. Aksiyomların çelişki içermemesi,
3. Aksiyomların birbirinden olabildiğince bağımsız olması gerektiğini savunmuştur.

Bu koşulların sağlanmasının garantisi, aksiyomların bütün somut özelliklerinden arındırılmış biçimsel bir tarz olarak aksiyom sistemine yaklaşmasıdır. Bu durum biçimselci aksiyomları örtük bir tanıma sürüklemiştir. Hilbert, geometri aksiyomlarını aritmetiğin aksiyomlarına dayandırdığından ispatlamak içinde aritmetiğin çelişki içermeyen bir sistem olarak alınmasından güç alarak geometrinin çelişki içermediğini ve geometriyi ispatlamanın mümkün olduğunu savunuyordu. Bunun için de geometriyi aksiyomlaştırma hareketini yaptığı gibi aritmetiği de aksiyomlaştırma hareketine girişti. Ancak aritmetiğin sahip olduğu matematik ve mantık ilkelerinin arasındaki paralellik Frege ve Russell'in saf mantık çalışmalarıyla örtüşünce aritmetik aksiyomlarının, biçimselciliğin gerektirdiği ispatları sunamayacağı daha sonrasında anlaşılmıştır (Gür, 2019, s. 73-74).

Hilbert'e göre biçimselci teori, bir dizi sembol ve onları yöneten bir dizi kuraldan yola çıkarak geliştirilmelidir. Kurallardan kasıt sembolleri ve aksiyomları kapsayan belirli başlangıç formülleri ve bu formüllerden doğrulanabilir formüllerin oluşturulabileceği düzenleyici ve açıkça ifade edilmiş çıkarımlardır. Böyle bir durumda yapılan ispatta, bu çıkarım kuralları, aksiyomların uygulanmasının işlem dizisinde yer alan, daha önceki bir formülden çıkarılan sonlu sayıdaki formül diziyle elde edilmektedir. Bu sayede teorinin ispatı gerçekleşmesi sağlanmaktadır. Ayrıca biçimselleştirilmiş muhakeme sayesinde hiçbiri çelişkiye neden olmayacaktır. Bu durum David Hilbert'in ispat kuramı olarakta geçmektedir (Burton, 2018, s. 711). Hilbert ispat teorisi için şöyle bir ifade kullanmıştır: "İspat teorim, insanoğlunun anlayışının en içteki süreçlerinin nitelenmesinden başka bir şey değildir ve düşüncemizin bağlı kalarak gerçekten işlediği kurallar protokolüdür" (Burton, 2018, s. 711).

Hilbert, ispatların ortaya konabileceği alan olarak *meta-matematik* kavramını geliştirmiştir. Bu kavramla matematiğin mantığa indirgenerek değil, simgesel aksiyomatik bir yapıya dönüştürülerek temellendirilebileceğini ve ancak bu şekilde istenen tutarlılığın sağlanabileceğini düşünmüştü. Çünkü klasik matematikte, matematiksel bir çalışmanın tutarlılığı, tutarlılığı varsayılan başka bir dizge modelle yapılıyordu. Bu var olan sorunun yerini değiştirmekten başka bir işe yaramıyordu. Hilbert, bu sıkıntıları içermeyen bir tutarlılık yöntemi geliştirmek isteyerek biçimselciliği iki iddia üzerine kurmuştur:

1. Soyut matematik, anlamdan arındırılmış formel bir sistemde ifade edilebilir.
2. Bu formel sistemin tutarsızlık içermediği matematik yoluyla gösterilebilir.

Hilbert, çelişkilerin kaynağını matematikte değil onun kullanılan dilinde bulmuştu. Aksiyomatik bir sistemin tutarlı olduğunu göstermek içinde belirli bir dil üzerine yoğunlaşarak resmileştirmeye çalışmıştır. Bir aksiyomatik sitemi resmileştirmek içinde o sistem içinde işlemleri ifade edebilen ve gerçekleştirebilen bir dil seçmekle işe başlamıştır. Bu sayede matematiği formülleştirip aksiyomlara teorem elde etmeyi ve tutarlığı sağlamayı hedefliyordu.

Bunun içinde meta-matematik kavramını geliştirmişti. Hilbert başlarda teorem makinesi gibi düşündüğü bu yapı için, aritmetiği saf formüle dönüştürerek buna mantığın dilini de ekleyip bütün matematiği biçimselleştirmeyi hedeflemişti. Matematiği bir tür simge dönüştürme oyununa benzetmeyi hedefleyen Hilbert, matematiğin temellerini *teorem makinesi* ya da *formül oyunu* olarak güvence altına almamızın bize katacağı yararı da şöyle ifade etmiştir:

> "Bu formül oyunu matematik biliminin düşünce içeriğinin tamamını tek tip bir şekilde ifade edebilmemizi sağlar ve aynı zamanda onu tikel önermeler ile olgular arasındaki karşılıklı ilişkileri açık kılacak şekilde geliştirir. (…) doğası gereği bir kuram bazı tartışmaların ortasında sezgilere veya anlamlara geri dönmemize gerek bırakmayacak bir şeydir" (Öztürk, 2019, s. 50-51).

Hilbert, bu sayede aksiyomların kendisinden ve seçilen biçimsel dilden başka bir şey kullanmadan herhangi bir aksiyomatik sistemdeki tüm teoremleri kanıtlayabileceğini düşünmüştü. Hilbert'in hipotezlerin doğruluğunu, üst kurala uygunluğunu bulma çabası yani tutarlılığı ve tamlığı ispatlanan teorileri kategorik bir dizgede gösterme çabası, Gödel'in savunduğu *tamlık teoremi* ve *eksiklik teoremin*e takılmıştır. Gödel'in teoremleri kısaca şöyledir;

1. Tamlık teoremi: Aritmetiğin bütün doğrularının Peano aksiyomları veya daha büyük bir aksiyom kümesinden elde edilemeyeceğini gösterir.
2. Eksiklik teoremi: Sistemin güvende olup olmadığını anlayamayacağımızı yani aritmetiğin tutarlı olamayacağını ve teorem makinesinin her şeyin doğru olduğunu bulabileceği bir makinenin olamayacağını gösterir.

Bu teoremler için Gödel, Yeterince güçlü hiçbir biçimsel dizgenin, her tek doğru önermeyi bir teorem olarak yeniden üretemeceğini savunarak, simgelerin edilgen anlam kazanmasının asgari koşulunu tutarlılık ve bu edilgen anlamların azami gerekçelendirmesi olarak gördüğü eksiksizlikle açıklamıştır. Gödel, her teorem yorumlandığında ve bunlar doğru çıktığı zaman tutarlı, doğru olan ve dizgenin düzgün dizileri olarak ifade edilebilen bütün önermeler teorem olduğu zaman da eksiksiz olarak görülebileceğini savunmuştur (Hofstadter, 2011, s. 167).

Gödel, eksiklik teoreminde vardığı sonuç kısaca aritmetik kadar geniş bir sistem içinde ya da herhangi bir tutarlı aksiyomatik sistem içinde tutarlılığın kanıtlayamayacağı şeklindeydi. Çünkü aksiyomatik sistemi resmileştirmek için, hem seçilen resmi dili sadece kullanmak hem de bu dilin kendi içinde de tutarlılığını ispatlamak imkansızdı. Her ne kadar Gödel eksiklik teorisiyle Hilbert'in tutarlılık arayışını sekteye uğratmış olsa da Hilbert'in kanıt teorisi biraz işe yaramaktaydı. Ancak Hilbert'in umduğu gibi tüm sayı teorisinin tutarlılığını kanıtlamak için kullanılamazdı. Her ne kadar herhangi bir tutarlı sistem içinde tutarlılığın kanıtlanmaması gerçeği doğruluğu veya yanlışlığına kesin olarak karar verilemeyen matematiksel önermelerin ya da bir türlü kanıtlanmayan hipotezlerin varlığını mevcut kılsada bu matematiğin devam ettiğinin bir göstergesidir[15] (Öztürk, 2011, s.71).

Hilbert ve diğer biçimselcilerin bütün gayesi kümeler teorisinden kaynaklanan paradokslara ve sezgicilerin eleştirilerine karşı matematiğin tutarlılığını güvence altına almaya çalışmaktı.

Matematik felsefesinde temel arayışı ve tartışması matematiğin bütünün tek bir aksiyomlar sistemi üzerinden türetilemeyeceğinin açıklanması ile son bulsada biçimselcilik bu sonuçtan dolayı çok sayıda aksiyomlar sistemini kullanılabileceğinin de kapısını da açmıştır. Bunun da anlamı matematikte yeni sistemlerin sürekli doğmasına neden olabileceği gerçeğidir.

Yeni bir başlık ile tezimizin bir diğer karşılaştırma unsuru olan matematik felsefesi kuramlarından sezgicilik (*İng. intuitionism*) ve öncülerini ele alınacaktır.

2.1.3. Sezgicilik ve Öncüleri

Matematiğin mantığa indirgenerek temellendirilmesi mantıksalçılık için birincil önermeydi. Bu doğrultuda ilk olarak sayılardan başlamışlardı. Mantıksalçılardan Frege, bu amaçla *sayı* kavramını küme kavramıyla açıklamaya çalışmıştı. Biçimselcilik ise tutarlılık sorunuyla baş etmeye çalışmıştı. Bu yöndeki çalışmalar doğrultusunda Hilbert'in geliştirdiği ve diğer biçimselci öncülerinde sürdürdüğü, matematiğe ait simgesel bir dizge kimliği verme uğraşı çalışmalarının konusu olmuştu. Sezgicilik ise mantıksal ve biçimsel matematik felsefelerinin aksine daha çok matematiksel nesnelerin ve kuruluşlarının varlık sorununu ön plana çıkarmak için uğraşmıştır. Sezgicilerin matematiksel nesnelerin ve kuruluşlarının varlık durumunu ön plana çıkarmalarının altında matematiği hem insan ruhunun doğal bir etkinliği hem de düşüncenin canlı bir etkinliği olarak görmeleri yatmaktadır. Matematiği düşüncenin canlı bir etkinliği olarak gördüklerinden dolayı sonlu adımda inşa yöntemiyle, matematiğin sezgisel olarak bildiğimiz doğal sayılar üzerine kurulabileceği tezini geliştirmişlerdir. Sezgiciler, sezgisiz akıl yürütmede yeni buluşların ve ispatların olamayacağını da ayrıca savunmuşlardır (Şener, 2015, s. 69).

Sezgiciliği tanımlamak gerekirse; "Kavram ve çıkarımlara somut içerik sağlayan bir sezgiyi matematiğin tek geçerli yöntemi sayan yani sonlu adımda inşa yöntemiyle matematiğin,

---

[15] Matematiğin devam etmesinden kasıt, matematiğe dair her kaosun sonrasında kendi çözümünü oluşturması ve genişlemesi anlaşılmalıdır.

sezgisel olarak bildiğimiz doğal sayılar üzerine kurulabileceğini savunan bir tez" olduğu şeklindedir (Yıldırım 2018, s.97).

Sezgicilik, ilk olarak Hollandalı matematikçi Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966) tarafından tanıtılmıştır. Onun geliştirdiği matematik felsefesi, matematiğin zihnin bir yaratımı olduğu fikrine dayanmaktadır. Sezgicilere göre bir matematiksel ifadenin doğruluğu, ancak onun doğru olduğunu kanıtlayan bir zihinsel yapı aracılığıyla kanıtlanabilir. Öyle ki sezgicilere göre sezgi, matematikçilerin zihinsel yapısında sezgisel iletişimi aynı zihinsel süreçle farklı zihinlerde yaratmanın bir aracı olarak da hizmet etmektedir.

Sezgiciler, matematiği zihinsel bir etkinlik olarak gördükleri için matematiksel kavramlarında sezgisel verilerle inşa edildiğini savunduklarından dolayı sayı ve küme gibi matematiksel nesnelerin zihinde inşa edildiği oranda varlık kimliği kazandığını, matematikteki tanım ve ispatların, sonlu adımda inşa edilebilir nitelikteyseler geçerli sayılabildiklerini savunmuşlardır (Sezgin, 2013, s. 49).

Her ne kadar sezgicilik öncüleri adı altında Jules Henri Poincaré, Luitzen Egbertus Jan Brouwer ve Arend Heyting gibi matematikçilerin adı geçse de erken dönem sezgiciliği Kant ile başlamıştır.

1724- 1804 yıllları arasında yaşayan Immanuel Kant için birçok felsefeci onun felsefede Kopernik devrimini gerçekleştirdiğini savunmuştur. Kant, bilginin zihin ile nesnelerin etkileşimi sonucunda ortaya çıktığını savunur. Kant'ın savunmuş olduğu bilginin zihin ile nesnelerin etkileşimi sürecinden türemesi fikri Platon'dan ve Aristoteles'ten beri süre gelen bilgi felsefesi kuramlarını sarsmıştır. Kant, nesnelerin mekanının bizden bağımsız bir idealar aleminde yahut fiziksel alemde bulunduğu düşüncesine katılmaz, ona göre nesnelerin mekânı zihindir ve bu nesneler zihindeki yargıların içinde kavramla beraber oluşmuştur. Kant'ın zihin merkezli bu felsefesine *İdealist felsefe* denir.

Kant'ın İdealist felsefesinde savunduğu bir diğer husus nesnelerin kendi mahiyetinin bilinemeyeceğidir. Çünkü nesneler ile ilgili bilginin ancak zihnimizde *a priori* olarak bulunan saf zaman ve mekân formlarının içinde sentezlenerek kavrayabileceğimiz şeklindedir. Bu sentezlenmenin bir tür yargı olması Kant'a göre bilginin yalnızca yargıdan meydana geldiği düşüncesini oluşturmuştur. Bu yüzden Kant'a göre yargıdan bağımsız bir kavram veya nesne mümkün değildir.

Kant'ın matematik felsefesine katkısı ise Aristoteles'ten devraldığı deneyciliği, matematiğe uyarlaması şeklinde olmuştur. Kant, bu konudaki görüşlerini *Saf Aklın Eleştirisi* kitabında ele alır. Kant bilgiyi önce *a priori* ve *a posteriori* olarak ikiye ayırmıştır.

A priori bilgi; bu tür önermeler zorunlu ve evrenseldir, doğruluğu ispatlanması için deneye ihtiyacı yoktur. Kısaca deney öncesi bilgidir.

A posteriori bilgi; bu tür önermeler ise doğruluk değerinin anlaşılması için deneysel yöntemlere ihtiyac duyarlar. Kısaca deney sonrası bilgidir.

Kant, bunların yanına analitik ve sentetik bilgi olarak iki kavram daha eklemiştir.

Analitik önermeler: Öznenin yüklemi kapsamasıdır yani içermesidir.

Sentetik Önermeler: Öznenin yüklemi barındırmadığı önermelerdir.

Bütün bu yargı durumlarının kombinasyonlarını aldığımızda dört bilgi türünden oluşmaktadır. Bunlar;

1. Analitik *a priori*
2. Sentetik *a priori*
3. Sentetik *a posteriori*
4. Analitik *a posteriori* şeklindedir.

Kant'a göre matematiksel bilgi için gerekli olan bilgi türü sentetik *a priori* bilgidir. Matematiksel bilgi hem analitik önermelerde olduğu gibi zorunlu ve evrensel olması yani *a priori* olması hem de deneysel bilgilerde olduğu gibi bilgimizi genişletmesinden dolayı yani *sentetik* olmasından dolayı sentetik *a priori* türü bir bilgidir. Tam da bu doğrultuda Kant matematiksel bilgi ve felsefi bilgi karşılaştırmasında felsefenin kavramla ve kavramsal analizle yapıldığını savunurken, matematiğin kavramsal analizin ötesinde bir etkileşime ihtiyaç duyduğunu belirmiştir.

> "Felsefi bilgi kavramlardan yola çıkan aklın bilgisidir. Matematiksel bilgi ise kavramların inşasından yola çıkarak elde edilen bilgidir. Ancak bir kavramı inşa etmek, o kavrama karşılık gelen *a priori* görüsünü açığa çıkarmaktır. O halde kavramın inşası için deneysel olmayan bir görüşe ihtiyaç vardır" (Çevik, 2021, s. 49-55).

Kant matematiksel bilginin kavramların saf görü zeminindeki inşaasıyla erişilen bir bilgi türü olduğunu savunmuştur. Zihinde bir kavramı inşa etmek, o kavramın saf görü temelindeki temsiline ulaşmaktır. Bu bakış açısından dolayı sezgiciliğin ilk temellerinin matematiksel bilgiye yaklaşımından dolayı Kant'la başladığı varsayılmaktadır.

İlk sezgicilerden olan Fransız matematikçi, fizikçi, mühendis ve filozof Jules Henri Poincaré (1854-1912) bir *polymath* [16] tı ve 'son evrenselci' olarak tanınır. Matematiğin kesinliğine ve matematikçilerin bu kesinliğin bir parçası oldukları konusunda sezgiciliğe

[16] Çok yönlü

sarsılmaz bir güven [17] ile bağlı kalarak, kümeler kuramının paradokslarından dolayı mantıksalçılara, ana ilkeler konusunda çıkan tartışmalardan dolayı da biçimselcilere cephe alarak sezgici bir tutum izlemiştir.

Yeni-sezgicilerden biri kabul edilen Hollandalı matematikçi Luitzen Egbertus Jan Brouwer'un (1881-1966) David Hilbert'in biçimselçiliği ile ilgili şu sözleri onun sezgicilik yolculuğunun başlama nedenleriden birini oluşturur. "Matematiğe eşlik eden dil, matematikle ilgisi olmayan ama matematiksel ifadelerle dolu bir dile çekildiğinde paradoksların ortaya çıktığını savunmaktadır" Çünkü Brouwer'e göre matematik, açıkça ortaya konan kelime dağarcığı ve çıkarım kurallarının çok daha ötesinde resmi olarak belirlenmiş herhangi bir dil içinde çalışma meselesi değildir (Bostock, 2009, s. 200). O daha çok zihinsel bir inşadır ve bu inşada yöntemsel açıdan sezgiye dayanmaktadır. Matematiğin sezgiye dayandığı bu zihinsel inşaanın da ilk örneğini de doğal sayılar oluşturmuştur.

Yeni sezgicilerden Arent Heyting'de (1898-1980) L.E.J Brouwer gibi matematiksel nesne ve yapıların varlık sorununu ön plana alarak her nesnenin var kabul edilebilmesinin gereği olarak o nesnenin doğal sayılardan hareketle kurulabilir olduğunu göstermeye çalışmıştır.

Yeni sezgiciler üç tane ilkeyi benimsemişlerdir. Bunlar;

1. Matematiksel ispatlarda inşacı yöntemin kullanılması gerektiğini savunmuşlardır. Ancak bu ilke ile matematikteki birçok ispattan vazgeçilmesi gerektiğini de kabul etmişlerdir.

2. Mantığın matematiğe boyun eğmesi gerektiğini savunmuşlardır.

3. Saf mantığın önermelerinin sonsuz kümelere uygulanamaz olduğunu da savunmuşlardır. Ancak bu ilke üçüncü seçeneğin olanaksızlığı (*Lat. tertium non datur)* ilkesine de karşı çıktıklarını göstermektedir (Gür, 2019, s. 75)

Bu ilkeler doğrultusunda sezgicilik özetlendiğinde şu özellikler ön plana çıkmaktadır;

1. Üçüncü halin olanaksızlığını reddettikleri için çelişkili kanıtlamayı da redederler. Onlar için ya doğrudur ya yanlıştır ya da anlamsızdır.

2. Bütün ispatları yapılandırarak kurmak gerektiğini savunmuşlardır.

3. Sonlu matematiği kabul etmişlerdir.

4. Doğrudan ispatı kabul etmişlerdir.

5. Kanıta dayanırlar.

[17] Poincaré'nin bu sözü "Bir matematikçi sanmaz fakat bilir. İnandırmaya çalışmaz çünkü ispat eder. Güveninizi beklemez belki dikkat etmenizi ister" tam da bu güvenin özeti gibi.

6. Seçim aksiyomunu reddetmişlerdir.

Sezgicilerin sınırlamalarından dolayı mevcut matematiğin tümüyle kapsanamaması ve dışlanan bölümlerinin olması sezgiciliğin taşıdığı bir sakıncadır. Sezgiciliğin değişik durumlara yol açan bir bulanıklık içinde olması yani saydam olmaması sezgicilik yaklaşımının zor bir yaklaşım ya da metafiziksel bir öğreti olduğunu düşünen bakış açılarına neden olmuştur (Şener, 2015, s. 72-74).

2.1.3.1. Luitzen Egbertus Jan Brouwer Sezgiciliği

Luitzen Egbertus Jan Brouwer ya da kısaca L.E.J. Brouwer (1881 -1966), Henri Poincare'yle beraber modern topolojinin yaratıcısı sayılır. L.E.J. Brouwer 20. yüzyılın başlarındaki matematiğin temelleri krizine tepkisiz kalmayarak matematiksel mantık ve felsefeye büyük katkıları olan matematikçidir. Sezgici ve inşasal matematik alanlarının öncüsü sayılan L.E.J. Brouwer 1907 yıllında yayınladığı doktora tezi ile Poincare ve Russell arasında o yıllarda tartışılan matematiğin mantıksal temelleri tartışmasına büyük katkı sunmuştur.

Brouwer matematiğin zihninsel bir inşa süreci olduğuna inanıyordu. Bu inşa sürecinin deneyimin zamansal doğası [18] üzerine düşünüldüğünde bir ilk sezgi ile ortaya çıktığını savunmuştur. Bu temel sezginin daha sonra süresiz olarak tekrarlanabilir olduğunu bu kendi zihinsel matematiksel yapılarımızında doğal sayılar teorisini verdiğini iddia etmiştir. Brouwer sadece doğal sayıların kendisini değil doğal sayılarla ilgili ispatların da yine zihinsel matematiksel inşalar olarak kabul edilmesi gerektiğini öyle ki matematiğin diğer tüm alanları için de bu durumun geçerli olduğunu savunmaktadır. Brouwer, matematiğin zihinsel olmayan bir konuya, fiziksel dünyaya uygulanabileceği ve bu uygulamanın ortaya çıkardığı ihtiyaçlara yanıt olarak gelişebileceği fikrine de pek sıcak bakmamıştır. Gerçek matematiği yalnızca insan zihninin yaratımları[19] olarak görmektedir. Brouwer klasik matematiğin faydalı olsa bile sezgici matematiğe göre daha az matematiksel gerçekliğe sahip olduğunu ve doğru olanın sezgici matematik olduğunu savumaktadır (Bostock, 2009, s. 198).

Brouwer'in sezgicilik tavrıyla ilk inşaacı sayılan Kant'a yakın durduğu görülmektedir. Brouwer, Kant'ın görü temelli yaklaşımını yani sezgiciliğini matematiksel yöntem olarak uygulamıştır. Brouwer, Kant'ın zamansal sezgisinin bir objeyi ardından bir tane daha objeyi

---

[18] Deneyimin zamansal doğası Brouwer'in Kant'ın savunduğu 'Aritmetik zaman deneyimimizi yansıtır' düşüncesini kabul etmesiyle ilgilidir. Brouwer, Kant'ın bir diğer savunduğu 'Geometri uzay deneyimimizi yansıtır' düşüncesini ise reddeder (Bostock, 2009, s. 198).

[19] Bu bakış açısından dolayı Brouwer'in uygulamalı matematikten çok soyut matematik taraftarı olduğunu söylersek çok da yanılmış olmayız

sonra da bir tanesini daha ve böylece sonsuza gidecek şekilde algılamamızı sağlayan bu görü temelli yaklaşımını, doğal sayılarla nezninde Peano'nun ürettiği herhangi bir aksiyomatik sistemle değil onun yerine *zamanın geçtiği*ne dair ilkel bir içgüdüden kaynaklı olarak ve diğer tüm matematiksel nesnelerin açık ve sonlu yöntemlerle bu sayılardan oluşması gerektiği düşüncesiyle kabul etmektir. Aritmetik ve geometrik aksiyomların öncül nitelik taşıdığını ve analitik ispatlarının mümkün olmadığını savunan Brouwer, matematiğin zihinsel bir yapı olduğunu yani zihnin dil ve mantıktan bağımsız olarak yaratttığı bir şey olduğunu savunup matematiği mantıktan önceye yani ilk sıraya alarak Frege, Peano ve Russell gibi mantıksalçıların savunduğu, mantığı matematikten önce görmelerine de karşı çıkmıştır. Bunun içinde hem Brouwer hem de 20. yüzyıl sezgicileri mantığın kurallarına yoğunlaşmışlardır. Aristoteles'ten beri gelen mantık kuralları üç tanedeydi. Bunlar;

1. Bir *P* önermesi kendisine eşittir. *P = P*
2. Bir *P* önermesi aynı anda hem doğru hem yanlış olamaz *(P= 1 ve P=0)* imkansızdır.
3. Ya *P* ya da *P'* doğrudur.

Üçüncü mantık kuralı, üçüncü durumun imkansızlığı kanunu (*İng. law of excluded middle*) olarak da geçmektedir. Ancak sezgiciler bu mantık kuralını bir aksiyom olarak kabul etmedikleri için kullanmamışlardır. Bu yüzden Aristocu mantık sistemine klasik mantık (*İng. classical mantık*) ve bu sistemin kullanıldığı matematiğe *klasik matematik* (*İng. classical mathematics*) denilirken, sezgicilerin üçüncü halin imkansızlığı mantık kuralını kullanmamalarından dolayı mantık sistemlerine sezgici mantık (*İng. intuitionistic logic*) ve bu sezgici mantığın oluşturduğu matematiğe de inşasal matematik (*İng. constructive mathematics*) yani *sezgici matematik* denilmektedir.

Klasik mantıkta üçüncü bir varlık durumu olmadığından bir şeyin var olduğunu kanıtlarken, önce o şeyin yokluğu varsayılmaktadır. Yokluğu varsayıldıktan sonra bir çelişki oluşturuyorsa o halde o şeyin var olduğunu söylenmektedir. Ancak sezgici mantıkta üçüncü halin olanaksızlığı durumundan dolayı bir şeyin varlığı kanıtlamak isteniyorsa o nesne apaçık gösterilmek zorundadır. Yani o nesne doğrudan inşa edilmelidir. Brouwer'in üçüncü halin imkansızlığı aksiyomunu reddetmesinin altında yatan asıl sebep üçüncü halin imkansızlığının Platonculuk felsefesinin bir sonucu olarak görmesi yatmaktadır. Üçüncü halin imkansızlığı aksiyomu matematiğin bizim dışımızda, akıldan ve duyulardan bağımsız olduğunu varsaymaktadır. Bu da Brouwer'in matematiğin inşasal bir aktivite olması gerektiği düşüncesine ters düşmektedir. Bu bağlamda Brouwer'in matematiksel önermeler konusunda ilk inşaacı saydığımız Kant'tan fazlasıyla etilendiğini görülmektedir. Brouwer da Kant gibi akılcılığı ve deneyciliği sentezlemek isteyerek matematiğin sentetik ve *a priori* olduğunu savunmuştur. Çünkü Brouwer'e göre matematiksel önermelerin doğruluğu sadece kavramları analiz etmekle bulunmamaktadır.

Sezgicilikte tartışmalı bir başka konu, s*eçim aksiyomu (ing. Axiom of Choice)* ve *potansiyel sonsuzluk* kavramlarıdır.

Seçim Aksiyomu: Her kümenin (Elemanları boş olmayan kümeler için) bir seçim fonksiyonu vardır.

X, elemanları boş olmayan kümelerden oluşan bir küme olsun, her x E X için f(x)→Ex koşulunu sağlayan f fonksiyonuna X'in seçim fonksiyonu denir.

İnşacılar seçim aksiyomunda varlığı iddia edilen fonksiyonun açık tanımının verilmemiş olmasından dolayı ve seçim aksiyomunun üçüncü halin olanaksızlığı kanunuyla klasik mantık totolojisinin bağlantısından dolayı *seçim aksiyomunu* reddetmişlerdir.

Mutlak sonsuzluk ve potansiyel sonsuzluk olarak iki tür sonsuzluktan bahsedilmektedir.

Platoncuların savunduğu *mutlak sonsuzluk*ta sonsuz objeler kendiliğinden bir bütün olarak, tamamlanmış olarak vardır. Doğal sayılar kümesi (de *N= [0, 1, 2, 3, ...])* bu açıdan bir bütün ve tamamlanmış olduğu için sonsuzun kendisidir. Yani *mutlak sonsuzluk*tur. Ayrıca sonsuz diziler *kuralsız (örüntüsüz)* de oluşturulabilirler. Var olmaları için onları inşa etmeye gerek yoktur. Çünkü varlıkları zaten bizden bağımsızdırlar. Brouwer bu tarz bir sonsuzluğu reddetmiştir.

Potansiyel sonsuzluk ise adımsal olarak sonsuza doğru giden işlemler, süreçler ve devamlılıkların bütünüdür. Bunun için de örnek olarak; 0, 1,2, 3 … şeklinde giden bir sayma tamamlanmış bir sonsuzdan değil, sonsuz olacak olan, ancak henüz olmamış bir devamlılıktan bahsettiğinden dolayı potansiyel olarak sonsuzdur. İnşaacılık felsefesi potansiyel sonsuzda objeler bir kural takip edilerek inşa edilebildiğini savunmaktadır. Bu durum sayma örneğinde olduğu gibi n elemandan sonra n+1 kuralıyla sonraki elemanların gelmesine benzer. Bir tür *kurallı dizi* gibi de düşünülebilir. Bir dizi belli bir kuralla belli bir aşamaya geldikten sonra geri kalan kısım '*zihin'* sayesinde kuralsız da oluşturulabilir. Sezgiciler bu durum için bir tür *yaratıcı zihnin* söz konusu olduğunu savunmuşlardır.

Platoncu'luğun *mutlak sonsuzluk* görüşünde bütün gerçel sayılar kendiliğinden var olduğu düşünülmektedir. Herhangi bir n'inci basamak ne ise odur. Kendisi için sabit ve olduğu gibidir. Ve bu durum başından beri böyleymiş gibidir. Brouwer'in serbest seçim dizileri kavramında ise herhangi bir kuralla elde edilen dizinin sonraki basamakları için bir potansiyel bırakılır. Bu basamakları belirleme işi de matematikçinin *yaratıcı zihnine* kalmaktadır. Giderek inşa edilmeye devam edilen ancak sonsuzluğu tamamlanmamış bir yapı olan bu sonsuzluk *potansiyel sonsuzluk*tur.

Son olarak inşacılık ve klasik mantığın üzerine tartıştığı *karşı örnek (İng. counterexamples)* kavramına da değinilecektir. Klasik matematikte bir önermenin yanlış olduğunu göstermek için o önermeyi sağlamayan bir karşı örnek bulunur. Örneğin "bütün çiçekler papatyadır." önermesine karşı örnek olarak gül, orkide, nilüfer gibi birçok farklı çiçeğin olması örnek olarak verilebilir. Bu klasik mantıktaki *P* önermesi doğru değilse, *P 'in* yanlış olduğunu göstermekle eşdeğerdir. Sezgici mantıkta ise bir P önermesinin değili doğruysa bu sadece P 'nin kendisinin çürütülebildiğini gösterir. Yani P önermesinin bir karşı örneği bulunabilir. Ayrıca inşaacılıkta karşı örnek vererek bir önermenin inşaası kanıtının olmadığı da gösterilebilir (Çevik, 2021, s. 57-64).

Brouwer'in sezgici felsefesinin çarpıcı kısmı üçüncü halin olanaksızlığını matematiksel ispatlarda kullanmayı reddetmesidir. Bu yasaya göre bir önerme ya doğru ya da yanlıştır. Bu yasa sayesinde matematikte bir nesnenin yokluğunun imkansızlığından varlığı çıkarılabilmektedir. Brouwer bu yasanın getirdiği matematiğin bizim dışımızda duyularımızdan bağımsız bir gerçeklikmiş gibi görünmesini kabul etmeyerek varlığı kanıtlanacak nesnelerin matematiksel olarak inşa[20] edilmesi gerektiğini savunmuştur.

---

[20]İnşa yöntemi bir nesnenin var olduğunu söyleyebilmek için onu göstermek gerektiği sezgisidir

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM
BİÇİMCİLİK VE SEZGİCİLİK TARTIŞMASI

3.1. Tartışmanın Felsefi ve Matematiksel Arka planı

1920'lerde Matematik dünyası Brouwer ve Hilbert arasında matematiğin temelleri üzerine ciddi bir tartışmaya sahne olmuştur. İlk başlarda Cantor'un küme teorisini etkileyen paradokslara tepki gösteren ve sorunların kaynağının insanların sonsuzluğu yeterince kavrayamadığından dolayı ortaya çıktığını savunan Brouwer ve Hilbert, çözüm önerileri konusunda gittikçe zıtlaşmaya başlamışlardır. Hilbert Cantor'un teorisinin tutarlılığını kanıtlayarak çözüm getirmekten yanayken Brouwer, Cantor'un teorisinin terk edilmesi gerektiğini iddia etmekteydi. Çünkü Brouwer'e göre konu uygun[21] matematiğin kapsamı dışındaydı. Hilbert, sıradan anlam ve hakikat kavramlarının önemli olmadığını savunarak hem Cantor'un teorisini hem de geleneksel matematiği korumak istemişti. Brouwer'a göre ise Hilbert'in biçimselci yaklaşımı matematiği anlamdan yoksun bırakmaktaydı oysaki matematiksel yöntemler sezgiye de hitap edebilmelidir. Bu yüzden Brouwer hakiki anlam ve hakiki doğruluk değeri üzerinde ısrar ederek sadece Cantor'un teorisini değil, aynı zamanda geleneksel matematiğin olağan iddialarının çoğunu da reddetmiştir (Bostock, 2009, s. 197-198).

Hilbert öncülüğündeki biçimselci yaklaşımın matematik için herkesçe aynı anlama gelen evrensel bir düşünce sistemi kurma çabası (*teorem makinesi* ya da *meta-matematik)* matematikte istenen kesinlik, tutarlılık ve doğruluk özelliklerini yeniden sağlamayı hedeflemekteydi. Az sayıda varsayımdan hareketle, çok sayıda yeni ve güvenilir bilgi oluşturma disiplini, bilimsel bir nitelik kazandığı takdirde hem matematik için verimli hem de matematiğin diğer bilimler için işlerliğini artıracaktı. Ayrıca sezginin yol açabileceği yanlış bilgilenmeleri yani akıl yürütmelere karışabilecek mantık dışı etkenleri de ortadan kaldırarak oluşabilecek paradoksları engellemiş olacaktı. Ancak bu çabaların bir nebze sonuçsuz kaldığı görülmektedir.

Hilbert'in matematiğin doğası ve aksiyomatik yöntem hakkındaki görüşü daha sonra gerçek anlamını fizikte bulacaktır. Özellikle Einstein'ın yerçekimi teorisinde bunu görmek mümkündür. Hilbert, Einstein'a yerçekimi yasalarını oluşturabilmek için matematiksel formalizmin kılavuz ilkelerini vererek yerçekimi teorisi ile elektrodinamik arasında uyumlu bir kombinasyon olasılığını göstermiş, yerçekimi yasasını ilk kez en basit biçimine getirmiştir.

---

[21] Brouwer'e göre uygun matematikten kastın sezgici matematik olduğu şeklindedir.

Matematiksel araçlar kullanılmadan tam şeklinin bulunamayacağı Einstein'ın yerçekimi teorisi Hilbert'in felsefi başarısıyla ilgili yönteminin anlam ve kapsamının hakkını vermeyi mümkün kılan geniş görüşlü bir felsefi matematik anlayışı geliştirdiğinin, matematiğin içsel olarak kazandığı ve bilimde evrensel bir etki iddiasını güçlü ve başarılı bir şelkilde ortaya koyduğunu göstermiştir (Bernays, 1922, s. 93-99).

Biçimselcilik matematiğin birtakım varsayımların ve bunlardan çıkan sonuçların gerçek olgularla uyumlu olup olmadığı kaygısını ve uygulamalı matematiğe kaynaklık edip etmediğinin çok da önemli olmadığı kaygısını da taşımadan insanoğluna doğru düşünebilme ve doğru olanı yapabilme becerisini geliştirmeyi hedeflemiş olması bir anlamda soyut matematik alanını desteklediğini göstermektedir (Güney, Özkoç, & Korkmaz, 2016, s. 68).

Brouwer öncülüğündeki sezgiciler ve Hilbert öncülüğündeki biçimselciler *matematiğin temelleri* konusundaki zıtlaşmaları 19. Yüzyılın sonlarına doğru hararetle devam ederken, naif küme kuramında bulunan çelişkiler, matematiğin temelinin ne olması gerektiği sorusunun yanında bu temelin çelişkilerden uzak, güvenilir ve daha fazla kesinliğin sağlandığı bir matematiğin nasıl olması gerektiği sorularıyla, 20. yüzyılın ortalarına kadar süren bir tartışma sahasına dönüşmüştür.

Hilbert, Brouwer ve destekçisi Weyl'in yaptığının Kronecker'in izinden gitmek olduğunu, matematiği kurtarmak adına matematikteki zahmetli her şeyi attıklarını, önerdikleri türden bir reformun takip edilmesi durumunda en değerli hazinenin çoğunu kaybetmekle karşı karşıya olduklarını savunuyordu (Davis, Hersh ve Marchisotto, 2015, s.373).

1823 ve 1891 yılları arasında yaşayan Alman matematikçi Leopold Kronecker matematik felsefesi alanındaki tartışmalara dahil olarak Cantor Teorisine karşı savunduğu şu ifadeleri "Doğal sayıları tanrı yarattı ve geri kalan her şey insanoğlunun eseridir" sezgiciliğin özeti niteliğindedir (Hofstadter, 2011, s. 297).

Hilbert matematiği sağlam temeller üzerine kurmak düşüyle çıktığı bu yolculukta hem Cantor'un Teorisine atıfta bulunup hem de sezgicilerden Kronecker'e cevap vermek için "Cantor'un yarattığı bu cennetten hiç kimse bizi çıkartamayacaktır" sözüyle sezgiciliğe karşı net tavır sergilemiştir.

3.1.2 Tartışmanın Siyası Arka Planı

19. yüzyılın ikinci yarısından itibaren çeşitli ülkelerde çeşitli ulusal matematik toplulukları oluşmaya başlamıştır. Matematikçilerin mesleki örgütlenmeleri açısından önemli bir girişim olan bu topluluklar, 19. yüzyılın sonuna doğru Felix Klein ve Georg Cantor

tarafından ortaya atılan uluslararası matematikçiler kongresi fikrinden sonra daha büyük örgütlenmeye dönüşmüş ve matematikçileri uluslararası düzeyde ilk kez 1897'de Zürih'te bir araya getirmiştir. Matematikçiler Zürih'teki uluslararası toplantıdan sonra Birinci Dünya Savaşı başlamadan dört yıl arayla Paris (1900), Heidelberg (1904), Roma (1908) ve Cambridge'te (1912) toplanmıştı. O zamana kadar yapılan matematik kongreleri I., II., III., IV., V.[22] olarak numaralandırılmıştı. 28 Temmuz 1914'te Birinci Dünya Savaşı'nın patlak vermesiyle milliyetçi ve ulusal duygular bilim dünyasına da sıçramıştı.

Savaşın suçlusu ilan edilen Almanya'ya karşı gelişen bakış açısına Almanya bir tepki bildirgesi altında '93 bildirisini'[23] yayınlayarak yanıt vermiştir. Bu bildiri Almanya dışında öfkeyle karşılanmış ve bir grup İngiliz bilim insanı bu çerçevede 21 Ekim'de *Times*'ta "Neden savaştayız" adlı bir bilimsel monografi yayınlamıştır. Savaş ve çatışmanın devam etmesi bilim insanları arasındaki bu çatışmanında giderek artmasına neden olmuştur. Özellikle Fransız ve Belçikalı bilim insanları Almanya'nın Birinci Dünya Savaşı'nda bu ülkelerin sivil vatandaşlarına korkunç zararlar verdiği şeklinde bir söylem geliştirmiş ve bu söylem temelinde Almanya ve Alman bilim insanları karşıtı politika geliştirme çabalarına girişmiştir. Fransız ve Belçikalı bilim insanları, Alman bilim insanlarının ulusal ve askeri yetkililer tarafından kötüye kullanıldığını ve bu durumun sona erdirilmesi gerektiği şeklinde bir söylem geliştirmiştir. Savaşın sonunda silahlar susunca bu ülkelerdeki bilim camiaları müttefik ülkelerdeki bilim içinde Alman bilim insanlarına ve Alman diline yer olmayan yeni bilim kuruluşları oluşturma çabalarına girmiştir. Bu çabalar Birinci Dünya Savaşı müttefik ülkeleri arasında da destek buldu.

Bu bağlamda 9-11 Ekim 1918 tarihleri arasında İngiltere, Fransa, ABD, Belçika, Japonya, Sırbistan, Brezilya, İtalya ve Portekiz'den temsilciler Londra'da, *Müttefikler Arası Bilim Akademileri Konferansı* (*İng. Conference of Inter-allied Scientific Academies*) adlı konferansta bir araya geldi. Bu konferansta "Londra Kararları" adıyla bazı kararlar alınmıştır. Bu kararların hedefi, içinde özetle Almanya'nın ve Avusturya'nın olmadığı uluslararası bilim örgütlenmeleri oluşturmaktır. Konferansa katılan temsilcilerin sonraki toplanma yerleri Kasım 1918'de Paris ve 18-28 Temmuz 1919'da Brüksel şeklindeydi. Almanya'yı dışlamaya yönelik

---

[22] Strasbourg (1920) ve Toronto (1924) kongrelerinde Alman, Bulgar, Avusturya ve Macar uyruklu bilim adamları dışlanmıştı. Daha sonrasında herkese açık yapılmayan bu kongreler uluslararası kongreler olarak görülmedi. Bu yüzdende 1928'de yapılan Bologna kongresi VI. Kongre olarak kayıtlara geçti. Ancak kongrelerin numaralandırılması gerekir düşüncesinden olası zorluklardan kaçınmak adına sonraları vazgeçilmiştir.

[23] '93 bildirisi' Alman bilim topluluğunun 7 Ekim 1914'te Aufruf an die Kulturwelt *(Kültür Dünyasına Çağrı)* adıyla yayınladıkları bildiridir.

önerilerle dolu olan toplantılar Alman bilim insanlarının boykot edilmesini hatta bu boykot kararına uymayanların[24] kara listeye alınıp kamu görevlerinden ve onur listelerinden ihraç edilmesini veya cezalandırılmasını öneriyordu.

Brüksel'deki toplantıya katılan ülkeler (Belçika, Brezilya, ABD, Birleşik Krallık, Avustralya, Kanada, Yeni Zelanda, Güney Afrika, İtalya, Japonya, Polonya, Portekiz, Romanya ve Sırbistan) yukarıda anılan hedeflere yönelik olarak Uluslararası Araştırmacılar Kurulu (Fr. *Conseil International de Recherces*) adında bir örgütlenme oluşturdu. Bu ülkeler dışındaki ülkelerin, "Londra Kararları" adlı kararlara uymaları ve böylece Almanya karşıtı boykota katılmaları koşuluyla söz konusu kurula katılmalarına izin verildi. Örneğin bu konseyde sonradan görev alacak olan W.W. Campell'in 1919'da yazdığı "The International Research Council and The International Astronomical Union" adlı makalede, müttefik ülkelerin bilim insanlarının paylaştığı görüşlerine eş değer şu görüşünü paylaşmıştır:

> "1914-1918 Birinci Dünya Savaşı, Almanya ve Avusturya-Macaristan hükümetleri tarafından halklarının ve sempatizanlarının desteğiyle insanlıkdışı ve barbarca sürdürüldü. Savaş uluslararası örgütlerin faydasını da yok etti. Çünkü Alman hükümeti savaşta birçok bilim insanını hükümet görevlisi asker, diplomat vb. gibi atadı ve görevlendirdi. Bu yüzden en azından suçlu hükümetler ve halklar siyasi yöntemlerinden vazgeçene kadar Alman ve Avusturya-Macaristan bilim insanlarıyla ilişkilerin yeniden başlatılmaması yani boykot edilmesi gerekmektedir" (Campell, 1919, s.249-256).

Alman karşıtı boykot bir dizi başlık içeriyordu: Almanya'nın uluslarası konferanslardan dışlanması, bilimde Alman dilinin yasaklanması, merkezi büroların, enstitülerin ve konseylerin müttefik ülkelere göre yeniden tahsis edilmesi, dünya ve bibliyografik ve inceleme dergilerinde Alman tekelinin sona ermesi şeklindeydi (Dalen, 2013, s. 327-338).

Söz konusu dönemde bu siyasal arka plan sürmekteyken, savaştan sonraki ilk uluslararası matematikçiler kongresi, Fransız ulusal matematik komitesi başkanlığında 1920'de Strasbourg'da[25] yapıldı. Takip eden kongre ise 1924'te Toronto'da gerçekleştirildi. Her iki kongreye de Almanlar çağrılmadı.

Fransız matematikçilerinin başkanlığında 1928'de İtalya'nın Bologna şehrinde bir kongre kararı alındığında Alman bilim adamlarına karşı uzlaşmaz bir tutum sergilemeye devam edenler ile daha uzlaşmacı bir yaklaşımdan yana olanlar arasında bölünmüş olan komite, kongre yaklaşırken Alman matematikçilere davet göndererek onlarla yeniden iletişime geçmiştir. Diğer

---

[24] Belçikalı Astronom Georges Lecointe 1917'de Belçika hükümeti için yazdığı muhtırada Almanların boykot edilmesiyle ilgili bir dizi noktayı formule etmiştir (Dalen, 2013, s. 331).
[25] Fransız ulusal matematik konseyinin Strasbourg'taki konferans kararı Fransa-Almanya arasında el değiştiren şehir olarak yeni statükoyu belirlemek ve vurgulamak Fransızlar açısından önemliydi (Dalen, 2013, s. 338).

bir deyişle Almanlar uzun bir ardan sonra uluslararası matematikçiler kongresine yeniden davet edilmiştir (Capristo, 2016, s.290).

Bu davet Almanya'da matematikçiler arasında bölünmeye neden olmuştur. Hollandalı matematikçi Brouwer'in önderlerinden biri olduğu bir grup matematikçi, Alman matematikçilere geçmiş kongrelerde gösterilen tutum nedeniyle bir dizi girişimde bulunmuş ve bu bağlamda Alman matematikçilerin Bologna'da yapılacak kongreye katılmayarak boykot etmeleri için taraftar toplamaya çalışmıştır. Hatta bu konuda Brouwer ve yandaşları kongreyi destekleyenleri Alman olmamakla suçlamışlardır. Brouwer'in 1928'de tüm Alman matematikçileri kongreyi boykot etme çağrısı, Alman matematikçilerin birliğin tam üyesi olarak kabul edilmesini ve Alman bilimine yapılan aşağılayıcı refaransların birliğin temel yasasından çıkarılmasını talep ediyordu (Stigt, 1990, s.101) Buna karşıt olarak bazı Alman matematikçiler ise ne olursa olsun Bologna'daki kongreye katılmayı savunmuştur. Bu görüşü savunanların başında Alman matematik camiası üzerinde önemli bir nufüsa sahip olan David Hilbert bulunuyordu. Hilbert siyasi ve kişisel konumunuda kullanarak Alman rektörlerine ve matematik seminerlerinin yöneticilerine süreci eleştiren öfkeli bir mektup yazmış ve bu mektubu açık bir çağrıyla şöyle sonlandırmıştır:

> "…Hiçbir üniversitenin ve hiçbir akademinin, resmi daveti dostane bir şekilde kabul etmekten vazgeçmemesi gerektiğini en acil şekilde dilemek Alman bilimin ve Alman prestijinin çıkarına olacaktır" (Dalen, 2013, s. 545).

Hilbert ve Brouwer arasındaki ilk uzlaşmazlık 1928 Bologna kongresine katılım meselesi hakkında değildi. Bu kongre sürecinden önce de Alman matematikçiler boykot altındayken benzer nedenlerle bu iki isim önemli görüş ayrılıklarına düşmüştü. Söz konusu görüş ayrılığı Hilbert ve Brouwer'in aynı anda editörlüklerini yaptığı ve Avrupa'nın o dönem en prestijli matematik dergilerinden biri olan *Mathematische Annalen*'in[26] ünlü matematikçi Bernhard Riemann'ın anısına (1926) bir sayı çıkarma kararı alması sonrasında yaşanmıştı. Alman bilim insanlarının uluslararası bilimsel kongrelerden dışlandığı bu dönemde, Hilbert söz konusu sayıya birer makaleyle katkı sağlamaları için Fransız matematikçiler de dahil olmak üzere pek çok milletten matematikçiye davet gönderilmesi gerektiğini düşünmüştü. Hilbert'in fikrine göre böyle bir girişim özellikle Fransız ve Alman matematikçilerinin yeniden

---

[26] *Mathematische Annalen*, 1868 yılında yayın hayatına girmiştir. O dönemde *Mathematische Annalen*'in editörü olmak bir tanınma ve onur göstergesi olarak kabul ediliyordu (Dalen, 2013, s. 523)1928 yılında derginin editörleri baş ve yardımcı olarak ikiye ayrılıyordu. Baş editörler şu dört kişiydi: David Hilbert, Albert Einstein, Otto Blumenthal ve Constantin Caratheodory'di. Luitzen Egbertus Jan Brouwer ise yardımcı editörler aradındaydı.

birbirlerine yaklaşmasını, iş birliklerinin artmasını veya en azından uluslararası matematikçiler camiasındaki Alman karşıtı cephenin birliğinin bozulmasını sağlayacaktı. Ancak bu girişim *Mathematische Annalen* editörleri arasında Brouwer'in öncülüğünü yaptığı muhalefet sonucunda tam olarak gerçekleşememiş ve derginin ilgili sayısı Fransız matematikçilerin hiçbir katkı sağlayamadığı ve dışlandığı bir sayı olarak çıkmıştır. Bu durum o dönemde Hilbert ve Brouwer'in arasında ciddi bir gerginliğe neden olmuştur (Dalen, 2013, s. 458-463).

1928'de Bologna şehrindeki matematik kongresi için organizasyon komitesi 'eski düşman' ülkelerin dışlanması sorununu, dışlamalara devam etmek isteyenler ile onu yeniden gerçekten uluslararası hale getirmek için uğraşanlar arasında arabuluculuk yaparak aşmıştır. Kongre zamanı gelip çattığında politik nedenlerle gitmeyen küçük bir grup dışında Alman matematikçilerinin çoğu Hilbert başkanlığında ve organizatörlerin güvencesi altında kongreye gitmeyi kabul ederek katılmıştır. Diğer bir deyişle Hilbert, Alman matematikçiler üzerindeki nüfusunu kullanarak Alman matematikçileri kongreye katılma konusunda ikna etmiştir (Dalen, 2013, s. 550-551).

Eylül 1928'de Bologna'daki uluslararası matematik kongresi ilgili tartışma, Hilbert ile Brouwer arasındaki büyük oranda politik savaşın önemli bir meydanı haline gelmiştir. Brouwer'in kongreyi boykot etme çağrısı Hilbert tarafından Alman meselelerine müdahale ve onun Alman delegasyonunun başkanı olarak kongreye katılmasını engelleme girişimi olarak yorumlandı. Hilbert, bu olayları Brouwer'in hırsına ve kişisel etkisine bağlayarak Brouwer'e kızgınlığını çeşitli vesilelerle ifade etmiştir (Kouneiher, 2018, s.104).

Örneğin, Hilbert konferans sonrasında Brouwer hakkında şöyle bir görüş paylaşmıştır:

> "Şantaj (*Alm. Erpressertum),*
>
> Almanya'da en kötü siyasi şantaj çeşitlerinden biri ortaya çıktı. Şimdi sana söylediğim gibi konuşmuyor ve hareket etmiyorsan, Alman değilsin, Alman olarak doğmaya layık değilsin. Bu şantajcılardan kurtulmanın yolu basit. Onlara Alman siperlerinde ne kadar süre geçirdiklerini sormak gerekiyor. Ne yazık ki Alman matematikçiler bu şantajın kurbanı oldular (…) Brouwer Alman siperlerinde bulunmadığı halde Alman matematiğinin üstadı gibi görünmek için Almanları kışkırtarak ve anlaşmazlıklara neden olarak Almanların durumunu nasıl kullanacağını bilmiştir. Tam bir başarı ile. Bunu ikinci kez başaramayacak" (Dalen, 2013, s. 551).

Sonrasında o dönemde *Mathematische Annalen'in* baş editörlerinden biri olan Hilbert, derginin yayın kurulunda, derginin diğer baş editörleri olan *Mathematische Annalen*'in yayın kurulunda nihai bir etkiden korktuğu için derginin yardımcı editörlerinden Brouwer'in görevine diğer yayın kurulu başkanları Albert Einstein ve Constantine Carathéodory'nin onayı olmadan son verme girişimlerinde bulunmuştur. Bu kararını Brouwer'e şöyle bir mektupla iletir:

"Sevgili meslektaşım,

Sizinle iş birliği yapmam mümkün olmadığı için, temel konulardaki görüşlerimizin uyuşmazlığı göz önüne alındığında, *Mathematische Annalen'*in yönetim kurulu üyelerinden verilen izni istedim. Blumenthal ve Carathéodory tarafından bana, *Annalen*'in düzenlenmesindeki iş birliğinizden bundan böyle vazgeçeceğimizi ve böylece adınızı başlık sayfasından sileceğimizi size bildirmek için. Aynı zamanda dergimizin yararına olan geçmiş faaliyetleriniz için *Annalen*'in editörleri adına teşekkür ederim. Saygılarımla, D. Hilbert" (Dalen, 2013, s. 553).

Brouwer'in *Annalen*'in yönetim kurulundan ihraç edilmesi hem Brouwer açısından hem de birçok matematikçi için gurur kırıcıydı. Hilbert kararı için derginin diğer baş editörlerinden biri olan Albert Einstein'dan da destek almak amacıyla kendisine bir mektup göndermiş ve kararının gerekçelerini şöyle paylaşmıştır:

"1. Brouwer, özellikle Bologna'dan önce Alman matematikçilere yazdığı son genelgeyle beni ve inandığım gibi Alman matematikçilerin çoğunluğunu aşağıladı.

2. Özellikle, sempatik yabancı matematikçilere karşı çarpıcı biçimde düşmanca konumu nedeniyle, özellikle şu anda, *Mathematische Annalen*'in redaksiyonuna katılmaya uygun değildir.

3. *Mathematische Annalen*'in kurucularının ruhuna uygun olarak, Göttingen'i *Mathematische Annalen*'in ana üssü olarak tutmak istiyorum. Brouwer'in genel olarak zararlı faaliyetini hepimizden önce fark etmiş olan Klein, benimle aynı fikirde olurdu" (Dalen, 2013, s. 555).

Einstein, Hilbert'in mektubunu ilk başta konuyla ilgili bir şakayla geçiştirmek istemiştir. Einstein'in Hilbert'e mektubu şu şekildeydi.

"Bay Brouwer, Lombroso'nun deha ve delilik arasındaki yakın bağlantı teorisinin istemsiz bir savunucusudur (Einstein'dan Hilbert'e, 19.10. 1928)" (Kouneiher, 2018, s.104).

Einstein, ihraç mektubunu imzalamayı reddetti ve yönetim kurulu üyelerinden Carathéodory'ye yazdığı bir mektupta bu hareketi Hilbert'in bir anlık kızgınlığına bağladı.

"Bu Brouwer meselesine hiç dikkat etmemek kesinlikle en iyisi olacaktır. Hilbert'in böyle duygu patlamalarına muktedir olabileceğini asla düşünmezdim" (Kouneiher, 2018, s.105).

Carathéodory, Brouwer'in ihraç edilmesini doğru bulmayarak Annalen'in yönetim kurulundan istifa etmiştir. Carathéodory Einstein'dan, Hilbert'e karşı taraf olarak görünmek istemediği için istifasının gizli tutulmasını da ayrıca istemiştir (Kouneiher, 2018, s.105).

Brouwer ise dergi baş editörlerine ve yayıncı şirket olan Springer'e, Hilbert'le aynı kanaate varmamaları için pek çok mektup göndermiştir. Hatta sonradan nazilere katılacak olan ve o dönemde *Annalen* editörlüğü meselesi hakkında Brouwer'a destek olan Otto Bieberbach'la birlikte Springer'in Berlin'deki yayın merkezine davetsiz şekilde giderek yayıncı Ferdinand

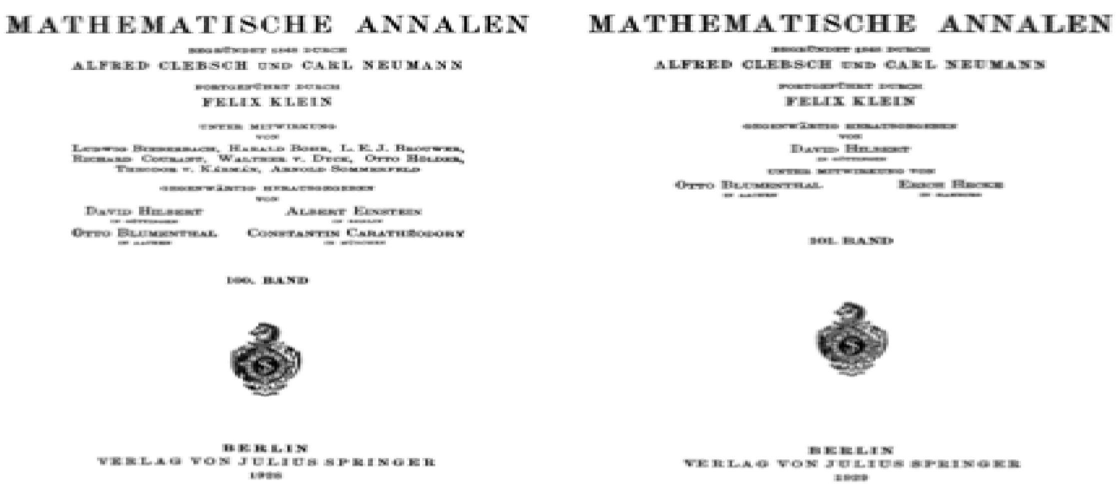
Springer'le hararetli bir tartışma yapmıştır. Bu hararetli tartışma esnasında Bieberbach ve Brouwer, Brouwer'in dergi editörlüğünden atılması durumda Springer yayın evinin ulusal duygulardan yoksun bir şirket olarak görüleceği ve bu durumda birtakım saldırılara maruz kalacağını ima ederek tehdit etmiştir (Dalen, 2013, s.562).

Brouwer nihai olarak pekçok tatsız olaydan sonra dergiden ihraç edilmiştir. Brouwer bu duruma binayen bir arkadaşına yazdığı mektupta yaşadıklarını ve umutsuzluğunu şöyle anlatmıştır:

> "Hayatımın bütün işi benden alındı ve korku, utanç ve güvensizlik içinde kaldım ve işkence eden işkencecilerimin zulmüne maruz kaldım" (Brouwer'dan Pogany'e, 03.06.32) (Stigt, 1990, s.105)

Dahası Brouwer'e ek olarak derginin editörler listesinde büyük değişiklikler olmuştur. Hilbert-Brouwer kavgasında genel olarak tarafsız bir tutum sergileyen Einstein, bu tatsız olayları kurbağalar ve farelerin savaşı (*Alm. Frosch-Mäusekrieg*)[27] olarak nitelendirmiştir. Kurbağa ve fare savaşının sonunda rahatlayan Einstein, Otto Blumental ve Richard Courant'ın bütün çabalarına rağmen *Annalen*'in kapak sayfasında adının bulunma cazibesini reddetmiştir (Stigt, 1990, s.102).

Aşağıdaki Şekil 3.1 görseli *Mathematische Annalen* dergisinin 1928'de yayınlanan 100. ve 1929'da yayınlanan 101. sayılarının kapakları arasındaki farkı göstermektedir.



Şekil 3.1: Mathematische Annalen dergisinin 100. ve 101. sayısının kapak görselleri
Kaynak: Dalen, 2013, s.584

[27] Kurbağa ve farelerin savaşı (*Alm. Frosch-Mäusekrieg*), Eski Yunancada *Batrachomyomachi* adıyla Homeres tarafından yazılan ancak anonim olan kısa bir destandır (Homeros, & Sina, 2010, s.201-214) Hem Almanca hem de Yunanca çevirisiyle *Batrachomyomachi* kelimesi 'önemsiz bir kavga' anlamına gelir.

Brouwer, *Annalen*'den atıldıktan sonra Jacques Hadamard'a bir uluslararası matematik dergisi çıkarmak istediğini ve onu da dergide görmek istediğini mektupla bildirmiştir. Hadamard, Einstein'den Brouwer için tavsiye istediğinde Einstein tavsiyeyi şöyle yanıtlamıştı:

> "Bu, Brouwer ve Hilbert arasında aşağılık bir anlaşmazlıktı ve bence asıl suçluluğu Hilbert taşıyordu,15.11. 1930" (Kouneiher, 2018, s.105).

Einstein, ayrıca Hadamard'a "Brouwer'in de aşırı ve inatçı davrandığını, patalojik açıdan sinirli bir adam olduğunu ve bu nedenlerden dolayı yeni dergiden uzak durması gerektiğini" belirterek tavsiyesini sonlandırmıştır (Dalen, 2013, s.632).

Annalen olayında Brouwer derinden etkilenmiş ve tartışma sahasından çekilmişti. Bu durum görünüşte teslimeyette olduğu izlenimini veriyordu. Ancak yaklaşımının sağlamlığına ve doğruluğuna daha çok inanmıştı. Sezgici matematik iddialarından vazgeçmemiş sadece görünmez olmuştu. Öyleki artık sezgici matematik hakkında rapor vermek için DMV[28]'nin toplantılarına katılmıyordu. Eskiden olduğu gibi yayıncılıkta çok fazla ilgisini çekmiyordu. Her ne kadar daha derinlemesine araştırmalarını sürdürdüğüne dair iddialar söz konusu olsada bu girişimler küçük çapta ve sadece arkadaşları ile mektuplaşmaları ve sınıf notları gibi şeyleri içeriyordu (Dalen, 2013, s.588-589).

Brouwer'in siyasi faliyetleri ve Riemann olayı Hilbert için belirleyici olmuştu. Hilbert'in ölümünden sonra Brouwer'in *Annalen*'i alacağı korkusu da etkili olduğu söylenmekteydi. Brouwer'in görevden alınmasının yankıları Almanya dışında da sürmüştü. O dönemin bilim insanları arasında görevden alınmanın korkunç bir hakaret ve uluslararası matematik için haklı gösterilesi zor bir eylem olduğu, Orta Avrupa'daki matematikçilerin ahlaki prestijine uygun olmadığı, Almanya'daki kollektif matematiğin bundan olumsuz etkileneceği ve Göttingen-Berlin düşmanlığının daha da artacağı konuşuluyordu (Dalen, 2013, s. 586)

---

[28] DMV, Almanca *Deutschen Mathematischen Vereinigung* (*T. Alman Matematik Derneği*)'un kısaltılmış biçimidir.

SONUÇ

Matematik daha çok içinde yaşadığımız dünyayı anlamaya ve karşılaştığı pratik sorunları çözmeye yönelik başladığı serüvenine, zaman içerinde insan zihninin de bir ürünü olduğu gerçeğiyle ağırlıklı olarak haz, estetik ve entelektüellik kaygısına dönüştüğü bir alana evrilmiştir. Nesnel bir bakış açısından öznel bir bakış açısına evirilen matematik başlarda kesinlik ve tutarlılığını yani genelliliğini bir öznellik serüvenine dönüştürmüş olmasından dolayı kaygılara neden olmuştur. Bu kaygılar öznel bakış açılarının getirdiği yaratıcılıktan nasibini alıp sonrasında matematik adına yeni geometrilerin türemesine neden olsa da bitmemiştir. Bu kaygılar doğrultusunda süreç dönemin matematikçilerini etkilediği gibi felsefecileri de etkileyerek matematiğin bir temeli olması gerekliliğini düşündürmüştür. Bu düşünüşün üretimi matematik felsefesinin matematiğe dair temel bulma sorunu olarak mantıksalçılık ve tezimizinde başlığını içeren biçimselcilik ve sezgicilik yaklaşımlarının gelişmesine neden olmuştur. Bu yaklaşımlar matematiği temellendirmeyi ve ona yeniden kesinlik ve tutarlılık yani güç kazandırmayı hedefliyordu.

Ancak her bir yaklaşımın yaptığı matematiği bir üçgene benzetirsek bir köşeyi tutmaktan başka bir şey değildi. Yine de matematik felsefesinin matematiği temellendirme yaklaşımlarının olumlu tarafı olmuştu elbette matematiğe dair yeni yol haritaları geliştirmelerine neden olması gibi. Bunun yanında ise olumsuz tarafı olarak görmezden gelemeyeceğimiz matematiğin temelleri tartışması yaşanırken arka planında siyasi bir krizin olmasıydı. Çünkü bu krizin matematiğin temelleri tartışmasında biçimselci ve sezgici yaklaşımlar üzerine doğrudan etkisinin olması matematik felsefesi ve matematik tarihi hatta bilim tarihi açısından önemlidir.

Nesnel bilginin kaynağı sayılan matematik bile konjonktürel olaylardan ve dünya siyasetindeki olaylardan etkilenmekte ve matematikteki araştırma programları doğrudan buna maruz kalabilmektedir. Tarih bunun örneklerini göstermiştir. Gerek bilim tarihi ve gerek bilim felsefesi açısından da önemlidir. Bu durum matematiğin ve matematik felsefesinin temelleri tartışmasını anlamak açısından da önemlidir.

KAYNAKÇA

Aslan, İ. (2013). Öklit Dışı Geometriye Giden Yolda İslam Dünyası Matematikçileri. *Dört Öge Dergisi*, 63-87.

Barker, S. F. (2017). *Matematik Felsefesi.* (Y. Dursun, Çev.) Ankara: İmge Kitabevi Yayınclık.

Bernays, P. (1922). Hilbert's Significance for the Pjilosophy of Matmematics. *Die Naturwissenschaften* , 93-99.

Bostock, D. (2009). *Phılosophy Of Mathematıcs an İntroductıon.* Hong Kong: Wıley-Blackwell.

Brouwer, L. (2009). *How Mathematics Is Rooted in Life.* New York: Springer Science.

Burton, D. M. (2018). *Matematik Tarihi-Giriş.* (S. Durmuş, Çev.) Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık.

Campell, W. W. (1919). "The International Research Council and The International Astronomical Union". Vol 31, October: Astronomical Society of The Pacific, 249-256.

Capristo, A. (2016). " French Mathematicians at the Bologna Congress (1928). Between Participation and Boycott", *İmages of Italian Matmematics in France The Latin Sisters, From Risorgimento to Rascism* içinde France, Switzerland: Birkhauser, 289-311.

Çetin, A. Y. (2021). Matematik Felsefesi ve Matematiksel Düşünmeye Yönelik Uzman Görüşleri. *Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 459-470.

Çevik, A. (2021). *Matematik Felsefesi ve Matematiksel Mantık.* İstanbul: Nesin Yayıncılık.

Çitil, A. A. (2020). Matematik ve Felsefe. *İstanbul:29 Mayıs Üniversitesi*.

Dalen, D. V. (2013). *L.E.J Brouwer Topplogist, Intuitionist, Philosopher.* London: Springer.

Davis, P. J., Hersh, R., & Marchisotto, E. A. (2015). *Tüm Yönleriyle Matematiksel Deneyim.* (S. Durmuş, & İ. O. Eruçar, Çev.) Ankara: Nobel Yaşam.

Durmaz, C. (2014). Russel Paradoksu Temelinde 20. Yüzyıl Mandıksal Paradoksları. *Yüksek Lisan Tez*. Ekişehir.

Frege, G. (2017). *Aritmetiğin Temelleri.* (H. B. GÖZKÂN, Çev.) İstanbul: Yapı Kredi Yayınları.

Godwyn, M., & Erwine, A. D. (2003). *Bertnard Russell's Logisicm.* Cambridge: The Cambridge Companion to Bertrand Russell.

Güney, Z. (2016). Matemati Felsefesi ve Eğitimine Dair. *MSKU Eğitim Fakültesi Dergisi*, 54-72.

Güney, Z., Özkoç, M., & Korkmaz, N. (2016). Matematiksel Felsefesi ve Eğitime Dair. *MSKU Eğitim Fakültesi Dergisi*, 54-72.

Gür, B. S. (2004). *Matematik Felsefesi.* Ankara: Kadim Yayıncılık.

Gür, B. S. (2017). *"Matemetik Belası" Üzerine Matematik Felsefesinde Köşe Taşları.* İstanbul: Nesin Yayıncılık.

Gür, B. S. (2019). *Matematik Felsefesi.* Ankara: Ayrıntı Basımevi.

Güven, Ö. (2020). Hilbert, Matematiğin Temelleri ve Görü. *Felsefe Arkivi Archives of Philosophy*, 113-49.

Hilbert, D. (1967b) [1927]. "The Foundations of Mathematics", *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic 1879-1931* içinde, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press

Hofstadter, D. R. (2011). *Gödel Escher Bach; bir Edebi Gökçe Belik.* (E. AKÇA, & H. KOYUKAN, Çev.) İstanbul: Pinhan Yayınclık.

Homeros, & Sina, A. (2010). Kurbağa Fare Savaşı (Batrakhomyomakhai). *Folklor/Edebiyat*, 201-214.

Kenny, A. (2006). *An Illustrated Brief History of Western Philosophy.* Oxford: Blackwell Publishing Ltd.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* Oxford ve New York: Oxford University Press.

Kline, M. (1985). *Matmetatics and the Search for Knowledge.* New York : Oxford Universit Press.

Kouneiher, J. (2018). *Foundations of Mathematics and physics One Century After Hilbert.* Nice: Springer.

Kökcü, A. (2017). Euclid Dışı Geometrilerin Matematik Tarihi ve Felsefesindeki Yeri. *Özne Dergisi*, 295-309.

Kutlusoy, Z. (2013). Mantık-Matematik İlişkisi Üzerine. *Kaygı*, 128-138.

Orman, Q. W. (1981). *Theories and Things.* Cambridge: Harvard University.

Öztürk, A. B. (2011, Haziran). Kurt Gödel'in Eksiklik Teoremleri ve Platonculuğu Üzerine Felsefi Bir İnceleme. *Yüksek Lisan Tez.*

Öztürk, A. B. (2019). David Hilbert'in Biçimselci Matematik felsefesinden Rudolf Carnap'ın Analitik Felsefesine: Formalizm ve Doğrulanabilirlik Ölçütü. *Ethos: Felsefe ve Toplumsal Bilimlerde Diyaloglar*, 44-68.

Papineau, D. (2012). *Philohophical Devices.* United Kingdom: Printed in Great Britain by.

Penrose, R. (2000). *Kralın Yeni Usu*. (T. Dereli, Çev.) Ankara: Tubitak Popüler Bilim Kitapları.

Russell, B. (1999). *Batı Felsefesi Tarihi.* (M. Sencer, Çev.) Bilgi Yayınevi.

Russell, B. (2013). *The Problems of Philosophy*. Project Gutenberg.

Sezgin, E. (2013). Bernard Russell'ın Mantık Anlayışı. *Dicle Üniversitesi Yüksek Lisans Tezi*. Diyarbakır.

Sönmez, M. M. (2020). Geometride Tanımlar ve Frege-Hilbert Tartışması. *Lisans Tezi*. İstanbul: 29 Mayıs Üniversitesi.

Stigt, W. P. (1990). *Brouwer's İntuıtıonism* . Oxford: Wolfson College.

Şener, B. (2015). Matematik Eğitimi Bağlamında Matematiksel Nesnenin Varlıksal Niteliği Üzerine. *Yüksek Lisans Tezi*. İstanbul.

Takıcak, M. (2016). Salih Zeki'nin Matematik Felsefesine Bakışı: Nâmütenâhî. *Dört Ög*, 191-200.

Türker, H. (2011). Husserl'de Psikolojizm Eleştirisi. *Kaygı, 16*, 75-93.

Yemenli, E. (2013). Üniversite Öğrencilerinin Matematiğin Temellerine İlişkin Felsefi Görüşleri. *Yüksek Lisans Tezi*. Eskişehir: Eskişehir Osmangazi Üniversitesi.

Yıldırım, C. (2018). *Matematiksel Düşünme.* İstanbul: Remzi Kitabevi.

Zach, R. (2007). Hılbert's Program Then and Now. *Handbook of the Philosophy of Sience. Philosophy of Logic*, 411-789.

Zach, R. (2019). *Hilbert's Program*. 5 22, 2022 tarihinde Stanford Encyclopedia of Philosophy: https://plato.stanford.edu/entries/hilbert-program/ adresinden alındı

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı	Müşerref GÖNÜLAÇAR
EĞİTİM DURUMU	
Mezun olduğu Lise	Batman Fatih Lisesi, Batman, 2002
Lisans Diplomosı	Dicle Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Bölümü, 2006
Yüksek Lisans Tez Konusu	Matematiğin Temelleri Tartışmasında Biçimselci ve Sezgici Yaklaşımlar Üzerine Bir Soruşturma
Yabancı Diller	İngilizce
İŞ DENEYİMİ	
Çalıştığı Kurumlar	Milli Eğitim Bakanlığı, Öğretmen 2006-…