T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

LİNEER REKÜRANS BAĞINTILARI YARDIMIYLA BAZI ÖZEL SAYILARIN VE POLİNOMLARIN ÜRETEÇ FONKSİYONLARININ TANIMLANMASI VE BUNLARIN UYGULAMALARI

Yağmur ÇETİN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEMMUZ 2023

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

LİNEER REKÜRANS BAĞINTILARI YARDIMIYLA BAZI ÖZEL SAYILARIN VE POLİNOMLARIN ÜRETEÇ FONKSİYONLARININ TANIMLANMASI VE BUNLARIN UYGULAMALARI

Yağmur ÇETİN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEMMUZ 2023

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER REKÜRANS BAĞINTILARI YARDIMIYLA BAZI ÖZEL SAYILARIN VE POLİNOMLARIN ÜRETEÇ FONKSİYONLARININ TANIMLANMASI VE BUNLARIN UYGULAMALARI

Yağmur ÇETİN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 05/07/2023 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/~~Oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK (Danışman)

Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Doç. Dr. İrem KÜÇÜKOĞLU

ÖZET

LİNEER REKÜRANS BAĞINTILARI YARDIMIYLA BAZI ÖZEL SAYILARIN VE POLİNOMLARIN ÜRETEÇ FONKSİYONLARININ TANIMLANMASI VE BUNLARIN UYGULAMALARI

Yağmur ÇETİN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK

Temmuz 2023, 25 sayfa

Bu tezde lineer rekürans bağıntıları yardımıyla bazı özel sayıların ve polinomların üreteç fonksiyonları verilmiş ve bundan faydanılarak bazı uygulamalar yapılmıştır. Üreteç fonksiyonları yardımıyla bazı özel sayı ve polinom ailelerinin özellikleri incelenmiş ve bunlar arasındaki bağıntılar ve formüller üzerine çalışılmıştır.

Bu tez çalışmasında, iki sıfırın ve iki birin yan yana gelmemesi koşuluyla $\{0, 1, 2\}$ kümesi üzerinde yazılabilecek tekrarlı s-li tüm permütasyonların sayısına karşılık gelen bir sayı dizisi ele alınmıştır. Charalambides (2002) tarafından verilen rekürans bağıntısı yardımıyla bu sayı dizisinin üreteç fonksiyonu üzerinde çalışılmıştır. Bu üreteç fonksiyonunun bazı özel fonksiyonlar ile ilişkileri verilmiştir. İlgili üreteç fonksiyonu yardımıyla Charalambides (2002) kitabındaki Problem 7.7.11 ile verilen homojen lineer rekürans bağıntısının çözümü de verilmiştir. Buna ek olarak, bu tez çalışmasında elde edilen bazı sonuçların Simsek (2023) tarafından verilmiş olan ve özellikle de Fibonacci tipli ve Lucas tipli sayı ve polinom ailelerini kapsayan bir polinom ailesi ile ilişkileri de elde edilmiştir. Aynı zamanda ilgili üreteç fonksiyonu ile yeni bir özel polinom ailesi tanımlanmış ve bu polinomların bazı temel özellikleri incelenmiştir. Bu özelliklerden bazıları kullanılarak, matematikte ve diğer uygulamalı bilimlerde kullanılabilecek birçok yeni formül elde edilmiştir. Bu polinomlara türev operatörü uygulanarak yeni formüller de elde edilmiştir. Ayrıca bu polinomlar için Riemann integral gösterimleri de verilmiştir. Elde edilen yeni sonuçlar birinci türden Stirling sayıları , ikinci türden Bernoulli polinomları (Cauchy sayıları), Fibonacci sayıları ve Pell sayıları gibi özel sayı ve polinomları içermektedir.

Bu tez çalışmasında, tez kapsamında elde edilen sonuçlar hakkında karşılaştırmalı çok sayıda notlar verilmiş ve bunlara bağlı olarak da yorumlamalar yapılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Bazı özel sayı ve polinom aileleri, Bernoulli sayıları ve polinomları, Fibonacci sayıları, Fibonacci tipli sayılar ve polinomlar, Lineer rekürans bağıntısı, Üreteç fonksiyonları, Stirling sayıları.

JÜRİ: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK
Prof. Dr. Mustafa ALKAN
Doç. Dr. İrem KÜÇÜKOĞLU

ABSTRACT

BY THE HELP OF LINEAR RECURRENCE RELATIONS DEFINING GENERATING FUNCTIONS OF SOME SPECIAL NUMBERS AND POLYNOMIALS AND THEIR APPLICATIONS

Yağmur ÇETİN

MSc Thesis in MATHEMATICS
Supervisor: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK
July 2023, 25 pages

In this thesis, generating functions of some special numbers and polynomials are defined with the help of linear recurrence relations and some applications are made by making use of this. With the help of generating functions, the properties of some special number and polynomial families were examined and the relations and formulas between them were studied.

In this thesis, a sequence of numbers corresponding to the number of all repetitive s-permutations that can be written on the set $\{0, 1, 2\}$, provided that two zeros and two ones do not come together are discussed. With the help of the recurrence relation given by Charalambides (2002), the generating function of this number sequence has been studied and the relations of this generating function with some special functions are given.With the help of the related generating function, the solution of the homogeneous linear recurrence relation given by Problem 7.7.11 in the book of Charalambides (2002) is also given. In addition, in this thesis some obtained results have been related to a polynomial family given by Simsek (2023), especially including Fibonacci type and Lucas type number and polynomial families. At the same time, a new special polynomial family was defined with the related generating function and some basic properties of these polynomials were examined. Using some of these properties, many new formulas have been derived that can be used in mathematics and other applied sciences. By applying the derivative operator to these polynomials, new formulas are also obtained. Also, Riemann integral representations for these polynomials are given. The new results which are obtained, include some special numbers and polynomials like Stirling numbers of the first kind, Bernoulli polynomials of the second kind (Cauchy numbers), Fibonacci numbers and Pell numbers.

In this thesis, a large number of comparative notes have been given about the results obtained within the scope of the thesis and interpretations have been made depending on these.

KEYWORDS: Bernoulli numbers and polynomials, Generating functions, Fibonnaci numbers, Fibonnaci type numbers and polynomials, Linear recurrence relations, Some special numbers and polynomials, Stirling numbers.

COMMITTEE: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK
Prof. Dr. Mustafa ALKAN
Assoc. Prof. İrem KÜÇÜKOĞLU

ÖNSÖZ

Bu tezde, bazı özel sayı ve polinom ailelerinin özellikleri üreteç fonksiyonları kullanılarak incelenmiş ve bu özel sayı ve polinom ailelerinin arasındaki bağıntılar ve formüller üzerine çalışılmıştır. Bu aileler arasında kurulan bağıntıları anlatabilmek için her bir ailenin özelliklerine detaylı şekilde yer verilmiştir. Türev operatörü kullanılarak bu özel sayı ve polinom aileleri için yeni formüller elde edilmiştir. Aynı zamanda bu polinomların Riemann integral gösterimi yapılmıştır. Bulunan yeni sonuçlar birinci türden Stirling sayılarını, ikinci türden Bernoulli sayı ve polinomlarını, Pell sayı ve polinomlarını ve Cauchy sayılarını içermektedir.

Üreteç fonksiyonları yardımıyla yeni bir sayı ve polinom ailesi tanımlanmış, iyi bilinen bazı özel sayı ve polinom aileleri ile arasındaki özellikler incelenmiştir.

Bu tezde bazı özel sayı ve polinom ailelerini, üreteç fonksiyonlarını, rekürans bağıntılarını içeren tanımlara, teoremlere ve bunlardan elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

Üreteç fonksiyonları, matematik, fizik, olasılık ve istatistik gibi birçok uygulamalı bilim alanında kullanılmaktadır.

Bu tez; Giriş, Kaynak Taraması, Materyal ve Metot, Bulgular ve Tartışma ve Sonuçlar olmak üzere beş ana bölümden oluşmaktadır.

Giriş bölümünde, üreteç fonksiyonunun tarihinden ve üreteç fonksiyonu yönteminden bahsedilmiştir.

Kaynak Taraması bölümünde bu tezde kullanılan bazı özel sayı ve polinom ailelerinin tanımlarının yanı sıra üreteç fonksiyonu ve rekürans bağıntısı tanımlarına yer verilmiştir.

Materyal ve Metot bölümünde (Simsek 2023) çalışmasında verilen birçok özel sayı ve polinom ailesini içeren genel formülün yanısıra bunların bazı özel sayı ve polinom aileleri ile arasındaki ilişkisinden bahsedilmiştir. (Ozdemir and Simsek 2016) çalışmasında tanımlanan iki değişkenli bir polinomunun tanımına ve bulunan sonuçlara yer verilmiştir.

Bulgular ve Tartışma bölümünde özel sayı ve polinomların yeni bir ailesi üreteç fonksiyonları yardımıyla tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir. Bu polinomlara türev operatörü uygulanarak yeni teorem ve sonuçlar elde edilmiştir. Benzer şekilde Riemann integral gösterimi de yapılmıştır. Elde edilen sonuçların birinci türden Stirling sayıları, ikinci türden Bernoulli polinomları ve Cauchy sayıları ile arasındaki bağıntılar bulunmuştur. Ayrıca Charalambides (2002) çalışmasındaki Alıştırma 7.7.11 alıştırmasında verilen homojen lineer rekürans bağıntısının üreteç fonksiyonları yardımıyla çözümü verilmiştir. Daha sonra özel sayı ve polinom aileleri ile olan ilişkileri incelenerek yeni teorem ve sonuçlar elde edilmiştir.

Tezin son kısmında Kaynak Listesi ve kısa özgeçmişim bulunmaktadır.

Bu tez çalışması süresince bilgisi ile yolumu aydınlatan, her daim desteğini esirgemeyen yol gösterici danışmanım Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK'e teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım. Her zaman yanımda olan değerli aileme ve manevi desteğini hep hissettiğim Osman Bozkurt'a yürekten teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "LİNEER REKÜRANS BAĞINTILARI YARDIMIYLA BAZI ÖZEL SAYILARIN VE POLİNOMLARIN ÜRETEÇ FONKSİYONLARININ TANIMLANMASI VE BUNLARIN UYGULAMALARI " adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

05/07/2023

Yağmur ÇETİN

İmza

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^-$	: Negatif tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}_0^-$	: $\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$
$\mathbb{N}$	: Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	: Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$S_1(m,j)$	: Birinci tür Stirling sayıları
B_n	: Bernoulli sayıları
$B_n(x)$	: Bernoulli polinomları
$b_n(0)$	: İkinci tür Bernoulli sayıları
$b_n(x)$	: İkinci tür Bernoulli polinomları
P_n	: Pell sayıları
$(x)_j$	: Azalan faktoriyel
$\binom{m}{j}$	: Binom katsayısı
$H_o(z,x)$	: $\{a_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin adi üreteç fonksiyonu
$H_E(z,x)$	: $\{b_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin üstel üreteç fonksiyonu
$(x_1, x_2, \ldots, x_s)$	: $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$ kümesinin s-li permütasyonları
y_s	: Tekrarlı ve kısıtlama koşulu ile iki tane sıfır ve iki tane birin hiç yan yana gelmeksizin $A = \{0,1,2\}$ kümesinin s-li permütasyonlarının sayısı
$y_s(x)$	: $y_s(0) = y_s$ özelliğini sağlayan yeni bir polinom ailesi
$\mathbb{Y}_n, \mathbb{S}_n$	: Çok değişkenli Fibonacci ve Lucas tipli polinom aileleri
$E_n(k)$	: k basamaklı n dallı benzenoid zincirlerini sayan sayı ailesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Sayıların tarihçesi çok eski zamanlara dayanmaktadır. İnsanlık tarihi de sayılarla başlar. Hemen hemen her çağda sayılar ve bunların uygulamaları insanlığın vazgeçemediği ve her aşamada kullandığı araçların başında gelmektedir. Bilimin gelişimi de sayıların gelişimine bağlıdır. Her bulunan yeni sayı kümesi de yeni teknolojilerin gelişmesine ya da icadına kaynak teşkil etmiştir. Örneğin i ($i^2 = -1$) sayısının bulunmasıyla, başta kompleks analiz olmak üzere (belki de üreteç fonksiyonlarının gelişimine kaynak teşkil etmiş) elektrik ve elektronik mühendisliğinin ve fiziksel olayların değerlendirilmesine sebep olmuştur. Bu nedenle, araştırmacılar yeni sayı kümelerinin bulunması için her çağda çabalar harcamaktadır. Bu çabaların ve çalışmaların sonucunda sayma sayıları, tam sayılar, rasyonel sayılar, reel sayılar, karmaşık sayılar ve p-adik sayılar kümeleri bulunmuştur. Hemen hemen her küme üzerinde de yeni bir analiz ve cebir inşaa edilmiştir. Sayıların gelişimi bilimin ve teknolojinin gelişimine eşdeğer olduğundan, günümüzde de özel sayılar ve özel polinomlar bu gelişmelerde çok önem arz etmektedir. Artık, fonksiyonlar yardımıyla sayılar ve polinomların temel özelliklerini araştıran yeni bir analiz inşaa edilmiştir. Bu analizler, Üreteç fonksiyonlar teorisi, Umbral calculus (analiz), p-adic q-analiz vs. gibi alanlarda yeni sayı aileleri üretilmekte ya da keşfedilmeyi beklemektedirler. Bu nedenle her dönemde ve her yeni çağda yeni bulunacak sayılar ve polinomlar ve bunların üreteç fonksiyonları hem matematiğin, hem olasılık ve istatistiğin, hem kuantum fiziğinin ve hem de mühendisliğin ve ayrıca diğer bilimlerin gelişmesine katkılar sağlayacaktır.

Üreteç fonksiyonların tarihi 1730'lara kadar gitmektedir. Üreteç fonksiyonu; bir (a_n) sayı dizisinin girdilerini katsayılarında tutan kuvvet serisi olarak tanımlanabilir. Genel lineer rekürans problemini çözmek için 1730'da ilk olarak Fransız matematikçi Abraham de Moivre, üreteç fonksiyon yöntemini kullanmıştır. Abraham de Moivre tarafından verilen bu yöntemden esinlenilerek, bu tezin sonuçlarının sunulması planlanmıştır. Dolayısıyla, bu tezin ana motivasyonu, Charalambides (2002) kitabının Alıştırma 7.7.11'inde verilen homojen lineer rekürans bağıntısının çözümünü vermektir.

Üreteç fonksiyonları, Fibonacci ve Lucas tipli sayılar ve polinomlar için, birçok yazar tarafından incelenmiştir. Bu sayıların ve polinomların matematikte ve diğer uygulamalı bilimlerde birçok uygulaması vardır (bkz. Alkan 2021; Simsek 2023).

Yukarıdaki yorumlar göz önüne alındığında özel sayılar ve özel polinomlar ve bunların üreteç fonksiyonlarının uygulamalarını vermek ve incelemek, bu tezin temel amacı olmuştur. Bu tezde yeni sayı ailelerinin temel özellikleri ve uygulamaları üreteç fonksiyonları yardımıyla verilmiştir.

2. KAYNAK TARAMASI

Bu bölümde tezde kullanılacak tanımların ve teoremlerin yanı sıra tezin dayandığı bazı özel sayılara ve polinom ailelerine, üreteç fonksiyonlarına ve rekürans bağıntılarına yer verilmiştir.

$m, j \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere,

$$\binom{m}{j} = \begin{cases} \frac{m!}{(m-j)!j!}, & m \geq j \geq 0 \\ 0, & m < j \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Roman 1984).

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $(x)_j$ ile ifade edilen azalan faktöriyel

$$(x)_j = \begin{cases} x(x-1)(x-2)\ldots(x-j+1), & j \in \mathbb{N} \\ 1, & j = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Roman 1984).

Tanım 2.1. *$R \in (0, \infty)$ olmak üzere $|z| < R$ bölgesinde*

$$H_o(z, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) z^n \tag{2.1}$$

açılımıyla verilen $H_o(z, x)$ fonksiyonuna $\{a_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin adi üreteç fonksiyonu denir (Volkovysky ve ark. 1977).

Tanım 2.2. *$R \in (0, \infty)$ olmak üzere $|z| < R$ bölgesinde*

$$H_E(z, x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x) \frac{z^n}{n!} \tag{2.2}$$

açılımıyla verilen $H_E(z, x)$ fonksiyonuna $\{b_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin üstel üreteç fonksiyonu denir (Volkovysky ve ark. 1977).

Tanım 2.3. *$s \in \mathbb{N}_0$ olsun. d_s sayı dizisini göz önüne alalım. $j = 0, 1, 2, ..., r$ olmak üzere s'nin lineer fonksiyonları olan, $c_0(s) \neq 0$ ve $c_r(s) \neq 0$ şartını sağlayan $c_j(s)$ katsayıları ve $v(s)$ için;*

$$c_0(s) d_{s+r} + c_1(s) d_{s+r-1} + ... + c_r(s) d_s = v(s) \tag{2.3}$$

ifadesine d_s sayı dizisinin r. dereceden lineer rekürans bağıntısı adı verilir (Charalambides 2002).

Eğer $v\left(s\right)=0$, $s\in\mathbb{N}$ ise, o zaman (2.3) bağıntısına homojen lineer rekürans bağıntısı, $v\left(s\right)\neq0$, $s\in\mathbb{N}$ ise, o zaman (2.3) bağıntısına tam lineer rekürans bağıntısı denir. Eğer denklemin katsayıları s değişkeninden bağımsız sabit sayılar ise, o zaman (2.3) bağıntısına r. dereceden sabit katsayılı lineer rekürans bağıntısı denir (Charalambides 2002).

(2.3) denklemi ile verilen rekürans bağıntısının genel çözümü r tane keyfi sabit içeriyorsa ve bu denklemin aynı zamanda r tane başlangıç koşulları olan $d_0, d_1, \ldots, d_{r-1}$ sabitleri de biliniyorsa, bu denklemin çözümü tektir. Örneğin; c_1 ve c_2 birer sabit olmak üzere d_m ve d_{m+1} başlangıç koşullarıyla birlikte verilen 2. dereceden sabit katsayılı homojen lineer rekürans bağıntısını $s\in\mathbb{N}$ için ele alalım:

$$d_{s+2}+c_1 d_{s+1}+c_2 d_s=0\ ,\ s=m,m+1,.... \tag{2.4}$$

Burada $c_2\neq0$ ve m negatif olmayan tamsayıdır.

$$d\left(s\right)=\rho^s\ ,\ s=m,m+1,...$$

dizisi (2.4) eşitliğinin bir çözümüdür çünkü ρ aşağıdaki denklemin bir köküdür:

$$t^{s+2}+c_1 t^{s+1}+c_2 t^s=0$$

(Charalambides 2002).

Örneğin, (2.4) eşitliğinde $s=0$, $c_1=-1$ ve $c_2=1$ alındığında karakteristik denklem aşağıdaki gibidir:

$$t^2-t-1=0.$$

Bu denklemin kökleri $\rho_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\rho_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere

$$F_s=\frac{\left(\rho_1\right)^s-\left(\rho_2\right)^s}{\sqrt{5}}$$

Binet formülüyle verilen Fibonacci sayılarının sağladığı lineer rekürans bağıntısı, $F_0=0$ ve $F_1=1$ olmak üzere $s\geq0$ için

$$F_{s+2}=F_{s+1}+F_s$$

şeklinde verilir (Koshy 2001; Charalambides 2002).

Tanım 2.4. *$m, j \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, $S_1(m, j)$, birinci tür Stirling sayıları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:*

$$\frac{(\log(1+t))^j}{j!} = \sum_{m=0}^{\infty} S_1(m, j) \frac{t^m}{m!} \tag{2.5}$$

(Riordan 1958; Roman 1984; Graham vd. 1994; Srivastava ve Choi 2012).

Tanım 2.5. *$w \in \mathbb{R}$ ve $|w| < 2\pi$ olsun. B_n, Bernoulli sayıları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:*

$$F_{Bs}(w) = \frac{w}{e^w - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{w^n}{n!} \tag{2.6}$$

(Abramowitz ve Stegun 1970; Comtet 1974; Roman 1984; Srivastava ve Choi 2012).

Tanım 2.6. *$w \in \mathbb{R}$ ve $|w| < 2\pi$ olsun. $B_n(x)$, Bernoulli polinomları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:*

$$F_{Bp}(w, x) = \frac{w}{e^w - 1} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{w^n}{n!} \tag{2.7}$$

(Abramowitz ve Stegun 1970; Comtet 1974; Roman 1984; Srivastava ve Choi 2012).

$j \in \mathbb{N}_0$ için (2.7) bağıntısında özel olarak $x = 0$ alınırsa, $B_j(0) = B_j$ olduğu görülür.

(2.6) bağıntısı için $B_0 = 1$ ve $v \in \mathbb{N}$ olmak üzere, Bernoulli sayıları

$$B_v = \sum_{j=0}^{v} \binom{v}{j} B_j \tag{2.8}$$

rekürans bağıntısı ile hesaplanır (Abramowitz ve Stegun 1970; Comtet 1974; Roman 1984; Srivastava ve Choi 2012).

(2.8) eşitliği kullanılarak bazı Bernoulli sayıları aşağıda verilmiştir:

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_6 = \frac{1}{42}.$$

$v \in \mathbb{N}$ için $B_{2v+1} = 0$ dır.

(2.6) ve (2.7) kullanılarak, Bernoulli sayıları ve Bernoulli polinomları cinsinden

$$B_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j B_{n-j} \tag{2.9}$$

sonlu toplamı şeklinde yazılır (Abramowitz ve Stegun 1970; Comtet 1974; Roman 1984; Srivastava ve Choi 2012).

(2.9) bağıntısı yardımıyla elde edilen bazı Bernoulli polinomları aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}
B_0(x) &= 1, \\
B_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\
B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}, \\
B_3(x) &= x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2}, \\
B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, \\
B_5(x) &= x^5 - \frac{5x^4}{2} + \frac{5x^3}{3} - \frac{x}{6}, \\
B_6(x) &= x^6 - 3x^5 + \frac{5x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{42}.
\end{aligned}$$

Bu tez çalışmasında Fibonacci ve Lucas tipli sayıların yanısı sıra Pell sayıları da çalışılacaktır.

Tanım 2.7. *Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonu aşağıdaki eşitlikle tanımlanır:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n t^n = \frac{t}{1-t-t^2} \tag{2.10}$$

(Koshy 2001; Koshy 2014; Simsek 2021; Simsek 2023).

Tanım 2.8. *Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu aşağıdaki eşitlikle tanımlanır:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n t^n = \frac{2-t}{1-t-t^2} \tag{2.11}$$

(Koshy 2001; Koshy 2014; Simsek 2021; Simsek 2023).

Tanım 2.9. *Pell sayılarının üreteç fonksiyonu aşağıdaki eşitlikle tanımlanır:*

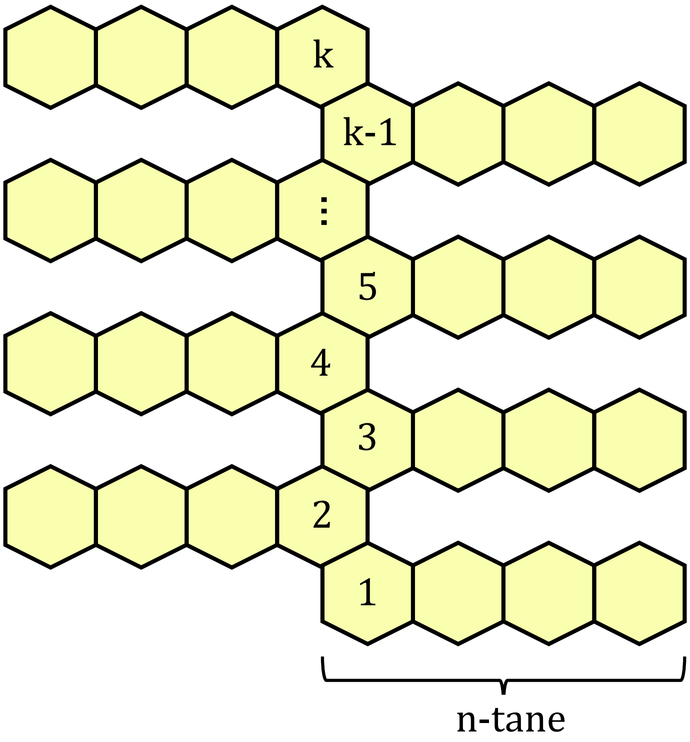
$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n t^n = \frac{t}{1-2t-t^2} \tag{2.12}$$

(Koshy 2001; Koshy 2014;, Simsek 2021; Simsek 2023).

Fibonacci ve Lucas tipli sayıların kimya alanında uygulanan bir örneğini verelim. Bu uygulamaların detayları ve ilgili kimyasal yapıların tanımı için (Cyvin ve Gutman 1988) çalışmasına bakılabilir.

Hidrokarbonlar, yapısında sadece karbon ve hidrojen atomları bulunduran kimyasal bileşiklerin genel adıdır. Benzin, benzen, naftalin ve asetilen de birer hidrokarbon karışımıdır. Hidrokarbonlar yapılarına bağlı olarak alifatik, aromatik ve alisiklik bileşikler olarak sınıflandırılır. Aromatik hidrokarbonlar bir veya daha çok benzen halkası ihtiva ederler. En basit aromatik hidrokarbon benzendir. Benzenoid hidrokarbonlar odun, kömür veya petrol gibi tamamlanmamış oksidasyonla üretilen ve her yerde bulunan maddelerdir. Kekule ilk kez benzenin yapısı için uygun bir öneride bulunmuştur. Bu öneride altı karbon atomunun altılı bir halka oluşturduğunu ve bu karbonların her birine bir hidrojenin bağlı olduğunu belirtmiştir. Tek doğrusal ve zikzak zincirler, tekrarlanan birimleri olan benzenoid sistemler olarak yorumlanabilir. Katakondense merdivenler olarak adlandırılan ve $E_n(k)$ ile gösterilen benzenoidler ise $n \geq 3$ için dallı zincirlere sahiptir (Cyvin ve Gutman 1988).

Bu tez çalışmasında, tekrarlı ve kısıtlama koşulu ile iki tane sıfır ve iki tane birin hiç yan yana gelmeksizin $A = \{0, 1, 2\}$ kümesinin s-li permütasyonlarının sayısı y_s ile gösterilmiştir ve A kümesi üzerinde inşaa edilen bu permütasyonların sayısını hesaplayan üreteç fonksiyonu ve bunların bazı uygulamaları araştırılmıştır. y_s sayıları Benzenoid hidrokarbonlardaki Kekulé yapılarıyla ilgilidir. Özellikle, bir benzenoid sisteminin mükemmel eşleşme sayısının, ilgili sisteme karşılık gelen benzenoid hidrokarbonun Kekulé yapılarının sayısına eşit olduğu bilinir. Bu da ilgili yapıların ve sayıların kombinatorik ve ayrık matematiğin çeşitli alanlarında araştırılmasını sağlar. Ayrıca bu tezde, özel bir durumda her iç yüzünün kenar uzunluğu 1 birim olan bir düzgün altıgen ile sınırlandırılmış benzenoid sistemlerini temsil eden bir sayı ailesi üzerinde çalışılmıştır. İlgili sayıları veren yapılar Şekil 2.1 ile gösterilmiştir.

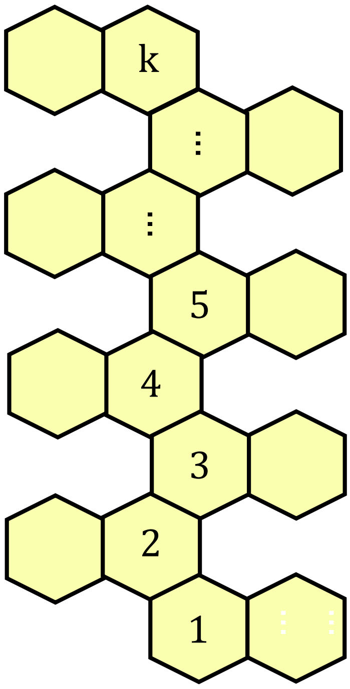


Şekil 2.1. k basamaklı n dallı bir Katakondense merdiveni örneği

Şekil 2.1 ile verilen ve Katakondense merdivenleri olarak da adlandırılan k basamaklı n dallı benzenoid zincirlerini sayan sayı dizisi $\{E_n(k)\}_{n=1}^{\infty}$ ile gösterilmektedir. $E_2(k)$ sayıları için üç terimli rekürans bağıntısı $E_2(1) = 3$, $E_2(2) = 8$ olmak üzere $k \geq 3$ aşağıdaki gibidir:

$$E_2(k) = 2E_2(k-1) + 2E_2(k-2) \tag{2.13}$$

(Cyvin ve Gutman 1988).



Şekil 2.2. k basamaklı 2 dallı bir Katakondense merdiveni örneği

Ayrıca bu dizi aşağıdaki formül yardımıyla da hesaplanabilir:

$$E_2(k) = \frac{1}{4\sqrt{3}} \left\{ \left(1+\sqrt{3}\right)^{k+2} - \left(1-\sqrt{3}\right)^{k+2} \right\} \tag{2.14}$$

(Cyvin ve Gutman 1988).

$n, k \in \mathbb{N}$ ve $k \geq 2$ için $\{E_n(k)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin genel rekürans bağıntısı ise aşağıdaki gibidir:

$$E_n(k) = nE_n(k-1) + nE_n(k-2) \tag{2.15}$$

(Cyvin ve Gutman 1988).

k değeri değiştikçe $E_n(k)$; k. dereceden n nin bir polinomudur.

Örneğin, $k = 0, 1, \ldots, 10$ değerleri için aşağıdaki polinomlar elde edilir:

$$\begin{aligned}
E_0(0) &= 1, \\
E_n(1) &= n+1, \\
E_n(2) &= n(n+2), \\
E_n(3) &= n\left(n^2+3n+1\right), \\
E_n(4) &= n^2(n+1)(n+3), \\
E_n(5) &= n^2\left(n^3+5n^2+6n+1\right), \\
E_n(6) &= n^3(n+2)\left(n^2+4n+2\right), \\
E_n(7) &= n^3(n+1)\left(n^3+6n^2+9n+1\right), \\
E_n(8) &= n^4\left(n^4+8n^3+21n^2+20n+5\right), \\
E_n(9) &= n^4\left(n^5+9n^4+28n^3+35n^2+15n+1\right), \\
E_n(10) &= n^5(n+1)(n+2)(n+3)\left(n^2+4n+1\right)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

(Cyvin ve Gutman 1988).

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, bu tez çalışmasında kullanılan materyal ve metotlar tanımlarıyla birlikte verilmiştir.

Simsek (2023) çalışmasında, Fibonacci ve Lucas tipli sayılar ve polinomlar, Sextet tipli polinomlar, Humbert tipli polinomlar ve diğer polinom ve sayı aileleri ile ilişkili birçok belirli özel sayı ve polinom sınıfını içeren adi üreteç fonksiyonlarının genel yapısını aşağıdaki gibi oluşturmuştur:

$$\frac{1}{1+\sum\limits_{j=1}^{m} P_j(x_j)t^j} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{Y}_n\left(P(\overrightarrow{X_m})\right)t^n \tag{3.17}$$

ve

$$G\left(t, P(\overrightarrow{X_m}); Q(\overrightarrow{X_k})\right) = \frac{\sum\limits_{j=0}^{k} Q_j(x_j)t^j}{1+\sum\limits_{j=1}^{m} P_j(x_j)t^j} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{S}_n\left(P(\overrightarrow{X_m}); Q(\overrightarrow{X_k})\right)t^n, \tag{3.18}$$

burada

$$P(\overrightarrow{X_m}) = (P_1(x_1), P_2(x_2), \ldots, P_m(x_m))$$

ve

$$Q(\overrightarrow{X_m}) = (Q_1(x_1), Q_2(x_2), \ldots, Q_k(x_k))$$

ayrıca

$$P_j(x_j) = \sum_{v=0}^{d} a_v x_j^v$$

ve

$$Q_l(x_l) = \sum_{v=0}^{c} b_v x_l^v,$$

burada $m \in \mathbb{N}$, $c, d, k \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq l \leq k$ ve $0 \leq j \leq m$. Detaylar için (Simsek 2023) çalışmasına bakınız.

İkinci tür $b_n(x)$ Bernoulli polinomları aşağıdaki üreteç fonksiyonu yardımıyla tanımlanır:

$$\frac{t}{\log(1+t)}(1+t)^x = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x)\frac{t^n}{n!} \tag{3.19}$$

(Boyadzhiev 2019; Comtet 1974; Kim 2015; Roman 1984; Simsek 2019; Simsek 2021).

(3.19) denkleminde $x = 0$ alınırsa, ikinci tür Bernoulli sayılarını (veya birinci tür Cauchy sayılarını) elde ederiz:

$$b_n(x) = b_n(0).$$

$b_n(x)$ polinomları ve $b_n(0)$ sayıları aynı zamanda şöyle tanımlanır:

$$b_n(x) = \int_x^{x+1} v(v-1)(v-2)\dots(v-n+1)dv \tag{3.20}$$

ve

$$b_n(0) = \int_0^1 v(v-1)(v-2)\dots(v-n+1)dv \tag{3.21}$$

(Comtet 1974; Kim 2015; Roman 1984; Simsek 2019; Simsek 2021).

Ozdemir and Simsek (2016) iki değişkenli $\mathcal{G}_n(x; y; k; m; v)$ polinomunun üreteç fonksiyonunu k, m, $n \in \mathbb{N}_0$ için aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

$$\frac{1}{1 - x^k t - y^m t^{m+n}} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{G}_j\left(x, y; k, m, n\right) t^j \tag{3.22}$$

ve

$$\mathcal{G}_j\left(x, y; k, m, n\right) = \sum_{c=0}^{\left[\frac{j}{m+n}\right]} \binom{j - c\left(m+n-1\right)}{c} y^{mc} x^{jk-mck-nck} \tag{3.23}$$

(Ozdemir ve Simsek 2016).

(Ozdemir ve Simsek 2016) çalışmasında $\mathcal{G}_n(x; y; k; m; v)$ polinomlarının; Fibonacci polinomları ve sayıları, Lucas polinomları ve sayıları, Pell polinomları ve sayıları, Jacobsthal polinomları, Vieta-Lucas polinomları, Chebyshev polinomları, Humbert polinomları, Geganbauer polinomları gibi bazı özel sayıların ve polinomların genelleştirilmesi ve birleştirilmesi olarak yazıldığına dikkat çekilmiştir. Dahası Ozdemir ve Simsek (3.22) eşitliğini kullanarak Apostol tipli sayıları ve polinomları ve $\mathcal{G}_n\left(x, y; k, m, n\right)$ polinomlarını içeren birçok ilginç sonuçlar vermiştir.

(3.17) ile (3.22) denklemlerini kullanarak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_j\left(x, y; k, m, n\right) &= \mathbb{Y}_j\left(P_1(x_1), P_2(x_2), \dots, P_{m+n}(x_{m+n})\right)\\ &= \mathbb{Y}_j\left(-x^k, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m+n-2 \text{ tane}}, -y^m\right).\end{aligned}$$

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde tez çalışmasında elde edilen tüm sonuçlar verilmiştir. Özellikle bu bölümde, y_s sayılarının Fibonacci tipli ve Lucas tipli sayı ve polinom aileleri ile ilişkisi incelenmiştir. Ayrıca yeni bir polinom ailesi üreteç fonksiyonlar yardımıyla tanımlanmıştır. Bu polinomların üreteç fonksiyonu kullanılarak bazı temel özellikleri incelenmiştir. Bu polinomlara türev operatörü uygulanarak bazı türev formülleri verilmiştir. Bu polinomlar için Riemann integral gösterimleri de verilmiştir. Bu sonuçlar, birinci türden Stirling sayılarını, ikinci türden Bernoulli polinomlarını ve Cauchy sayılarını içerir. Ayrıca bu tezde, Charalambides'in 7.7.11 alıştırmasının çözümünü araştırılmıştır (Charalambides 2002). Bu alıştırma, (4.24) denklemiyle verilen homojen lineer rekürans bağıntısını içerir.

y_s, iki sıfırın ve iki birin yan yana gelmemesi koşuluyla $\{0, 1, 2\}$ kümesi üzerinde yazılabilecek tekrarlı s-li tüm permütasyonların sayısı olsun.

(Charalambides 2002) çalışmasında, $y_0 = 1$ ve $y_1 = 3$ başlangıç koşulları altında y_s sayılarının rekürans bağıntısını $s \in \mathbb{N}_0$ için aşağıdaki şekilde vermiştir:

$$y_{s+2} = 2y_{s+1} + y_s. \tag{4.24}$$

Bu bölümde y_s sayılarının adi üreteç fonksiyonu (Charalambides 2002) çalışmasında olduğu gibi

$$K(t) = \sum_{s=0}^{\infty} y_s t^s \tag{4.25}$$

ile gösterilecektir.

Üreteç fonksiyonunu, (4.24) eşitliği yardımıyla vermek için rekürans bağıntısı metodu kullanılmıştır.

$s \in \mathbb{N}_0$ için, (4.24) ile (4.25) bağıntıları kullanılarak

$$\sum_{s=0}^{\infty} y_{s+2} t^{s+2} = 2t \sum_{s=0}^{\infty} y_{s+1} t^{s+1} + t^2 \sum_{s=0}^{\infty} y_s t^s$$

elde edilir. Böylece

$$K(t) - 1 - 3t = 2tK(t) - 2t + t^2 K(t)$$

bulunur. Yukarıdaki eşitlik yardımıyla y_s sayılarının üreteç fonksiyonunu elde ederiz:

$$K(t) = \frac{1+t}{1-2t-t^2} = \sum_{s=0}^{\infty} y_s t^s. \tag{4.26}$$

Bu durumda,

$$K(t) = \frac{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}{1-\left(1+\sqrt{2}\right)t} + \frac{\frac{1-\sqrt{2}}{2}}{1-\left(1-\sqrt{2}\right)t}$$

bulunur. $|t| < \min\left\{\frac{1}{1+\sqrt{2}}, \frac{1}{1-\sqrt{2}}\right\}$ için yukarıdaki eşitlikte geometrik seri açılımı uygulanırsa

$$\sum_{s=0}^{\infty} y_s t^s = \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{\infty}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^{s+1} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{s+1}\right)t^s \tag{4.27}$$

elde edilir.

Eşitliğin her iki tarafında t^s katsayıları karşılaştırılırsa y_s sayıları için iyi bilinen aşağıdaki formül elde edilir:

$$y_s = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{s+1} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{s+1}}{2} \tag{4.28}$$

(Charalambides 2002).

(4.28) denklemi yardımıyla y_s sayılarının birkaç değerini verelim:

$$y_0 = 1,\ y_1 = 3,\ y_2 = 7,\ y_3 = 17,\ y_4 = 41, y_5 = 89, \ldots .$$

$s \in \{1, 2, 3\}$ olduğunda elde edilecek y_s sayılarına karşılık gelen ilgili permütasyonların kümesi sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$y_1 = 3$ için;

$$\{(0), (1), (2)\}.$$

$y_2 = 7$ için;

$$\{(0,1), (0,2), (1,2), (1,0), (2,2), (2,0), (2,1)\}.$$

$y_3 = 17$ için;

$$\{(0,1,2), (0,2,1), (0,2,2), (0,1,0), (0,2,0), (1,2,0), (1,0,2), (1,2,2)$$
$$(1,0,1), (1,2,1), (2,2,0), (2,0,2), (2,1,0), (2,0,1), (2,2,2), (2,2,1)\}.$$

4.1. y_s sayılarının bazı özellikleri ve bilinen özel sayılarla ilişkileri

(3.18) eşitliğinde $P_1(x) = -2, P_2(x) = -1; Q_0(x) = 1, Q_1(x) = 1$ yazarsak

$$y_s = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{s+1} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{s+1}}{2} = \mathbb{S}_n\left(-2,-1;1,1\right) \tag{4.29}$$

elde edilir (Cetin and Simsek 2023).

(4.26) denkleminde verilen üreteç fonksiyonu, $P_1(x) = -2$, $P_2(x) = -1$, $Q_0(x) = 1$ ve $Q_1(x) = 1$ için (3.18) denklemi yardımıyla aşağıdaki eşitlikle verilebilir:

$$G\left(t,-2,-1;1,1\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{S}_n\left(-2,-1;1,1\right)t^n = \sum_{s=0}^{\infty} y_s t^s = K(t)$$

(Cetin and Simsek 2023).

(4.26) denkleminde $t = \frac{1}{a}$ ($a \in \mathbb{N}$ ve $a \geq 2$) koyarak aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 4.1. *$a \in \mathbb{N}$ ve $a \geq 2$ olsun. O zaman*

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{y_s}{a^s} = \frac{a(a+1)}{a^2-2a-1} \tag{4.30}$$

elde edilir (Cetin and Simsek 2023).

(4.30) eşitliğinin bazı a özel değerleri için sonuçları aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{y_s}{5^s} = \frac{15}{7},$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{y_s}{7^s} = \frac{28}{17},$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{y_s}{10^{2s}} = \frac{10100}{9799},$$

ve

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^s y_s = -\frac{15}{7}.$$

Teorem 4.2. *$s \in \mathbb{N}$ olsun. O halde*

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \binom{s-k}{s-2k} 2^{s-2k+1} + \sum_{k=0}^{\left[\frac{s-1}{2}\right]} \binom{s-k-1}{s-2k-1} 2^{s-2k} = \left(1+\sqrt{2}\right)^{s+1} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{s+1} \tag{4.31}$$

(Cetin and Simsek 2023).

İspat (4.31) eşitliğinin sağ tarafı kullanılarak

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{s+1}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{s+1}=\sum_{k=0}^{s+1}\left(1+(-1)^{s+1-k}\right)\binom{s+1}{k}\left(\sqrt{2}\right)^{s+1-k} \tag{4.32}$$

elde edilir. □

Bu eşitlik aşağıdaki sonuca indirgenir.

Sonuç 4.3. $s\in\mathbb{N}_0$ *olsun. O halde*

$$\sum_{\substack{k=0\\ s+1-k\ odd}}^{s+1}\binom{s+1}{k}\left[\left(\sqrt{2}\right)^{s+1-k}+\left(-\sqrt{2}\right)^{s+1-k}\right]=0$$

(Cetin and Simsek 2023).

Benzer şekilde, (4.31) ile (4.32) denklemleri yardımıyla, aşağıdaki sonuç da elde edelir:

Sonuç 4.4. $s\in\mathbb{N}$ *olsun. O halde*

$$\sum_{k=0}^{s+1}\binom{s+1}{k}2^{\frac{s+1-k}{2}}\left[1+(-1)^{s+1-k}\right]=\sum_{k=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]}\binom{s-k}{s-2k}2^{s-2k+1}+\sum_{k=0}^{\left[\frac{s-1}{2}\right]}\binom{s-k-1}{s-2k-1}2^{s-2k}$$

elde edilir (Cetin and Simsek 2023).

Teorem 4.5. $s\in\mathbb{N}_0$ *olsun.* P_s*; Pell sayılarını temsil etmek üzere;*

$$y_s=P_s+\mathcal{G}_s\left(2,1;1,1,1\right) \tag{4.33}$$

elde edilir (Cetin and Simsek 2023).

İspat Eşitlik (4.33) aynı zamanda

$$\mathbb{S}_s\left(-2,-1;1,1\right)=\mathbb{S}_s\left(-2,-1;0,1\right)+\mathbb{Y}_s\left(-2,-1\right)$$

şeklinde de yazılabilir.

(4.29) eşitliği yardımıyla (Simsek 2023) çalışmasındaki Lemma 1 ve Teorem 9 kullanılarak y_n sayıları için aşağıdaki formüle ulaşılır:

$$y_s=\mathbb{S}_s\left(-2,-1;1,1\right)=\sum_{j=0}^{1}Q_j(x_j)\mathbb{Y}_{s-j}\left(-2,-1\right).$$

Böylece

$$y_s = \mathbb{S}_s\left(-2,-1;1,1\right) = Q_0(x_0)\mathbb{Y}_s\left(-2,-1\right) + Q_1(x_1)\mathbb{Y}_{s-1}\left(-2,-1\right)$$

elde edilir.

$Q_0(x_0) = Q_1(x_1) = 1$ alınırsa,

$$y_s = \mathbb{Y}_s\left(-2,-1\right) + \mathbb{Y}_{s-1}\left(-2,-1\right)$$

bulunur. $\square$

Yukarıdaki eşitliği

$$\mathbb{Y}_s\left(P_1(x_1), P_2(x_2)\right) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]}(-1)^{s-k}\binom{s-k}{k}\left(P_1(x_1)\right)^{s-2k}\left(P_2(x_2)\right)^k$$

(Simsek 2023) formülüyle birlikte kullanarak (4.31) eşitliğinin bir geliştirilmiş hali olan aşağıdaki sonucu elde ederiz:

Sonuç 4.6. $s \in \mathbb{N}$ *olsun. O halde*

$$y_s = \sum_{k=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]}\binom{s-k}{k}2^{s-2k} + \sum_{k=0}^{\left[\frac{s-1}{2}\right]}\binom{s-1-k}{k}2^{s-1-2k}$$

elde edilir (Cetin and Simsek 2023).

4.2. Polinomların Yeni Bir Ailesi

Bu alt bölümde verilen tanımların ve sonuçların bazıları ilk olarak (Çetin ve Simsek 2023) çalışmasında verilmiştir. Öncelikle bu alt bölümde Simsek (2020) tarafından uygulanan bir metod yardımıyla $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki adi üreteç fonksiyonu ile tanımanıştır.

$$B\left(t,x\right) = \frac{\left(1+t\right)^{x+1}}{1-2t-t^2} = \sum_{s=0}^{\infty} y_s(x)t^s \tag{4.34}$$

(Cetin and Simsek 2023).

(4.34) denkleminde $x = 0$ alınırsa,

$$y_s = y_s(0),$$

olduğu görülür (Cetin and Simsek 2023).

(4.34) ve (4.26) denklemlerini kullanarak ve $|t| < 1$ olmak üzere binom açılımından yararlanarak

$$\sum_{s=0}^{\infty} y_s(x)t^s = \sum_{s=0}^{\infty} \binom{x}{s} t^s \sum_{s=0}^{\infty} y_s t^s,$$

bulunur (Cetin and Simsek 2023).

Yukarıdaki serilerde Cauchy çarpımı uygulanırsa,

$$\sum_{s=0}^{\infty} y_s(x)t^s = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{s} \binom{x}{k} y_{s-k} t^s,$$

elde edilir (Cetin and Simsek 2023).

Elde edilen eşitliğin her iki tarafında t^s katsayıları karşılaştırılırsa aşağıdaki teoreme ulaşılır:

Teorem 4.7. $s \in \mathbb{N}_0$ *olsun. O halde*

$$y_s(x) = \sum_{k=0}^{s} \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k!} y_{s-k} \tag{4.35}$$

dir (Cetin and Simsek 2023).

$S_1(k,j)$, birinci tür Stirling sayılarını temsil etmek üzere (4.35) eşitliği

$$x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1) = \sum_{j=0}^{k} S_1(k,j)x^j,$$

formülü ile birlikte işleme alınırsa aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 4.8. $s \in \mathbb{N}_0$ *olsun. Olmak üzere*

$$y_s(x) = \sum_{k=0}^{s} \sum_{j=0}^{k} \frac{S_1(k,j) y_{s-k}}{k!} x^j \tag{4.36}$$

dir (Cetin and Simsek 2023).

$y_s(x)$ polinomları ile ilgili türev formülü vermek amacıyla aşağıdaki polinomun türev formülü kullanılacaktır:

$$P_k(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1).$$

Yani

$$\frac{d^m}{dx^m}\{P_k(x)\} = \sum_{r=0}^{k} S_1(k,r) r(r-1)(r-2)\cdots(r-m+1)x^{r-m}$$

aracılığıyla $y_s(x)$ polinomu için aşağıdaki türev formülü elde edilir:

Teorem 4.9. $s \in \mathbb{N}_0$ *olsun. O halde*

$$\frac{d^m}{dx^m}\{y_s(x)\} = \sum_{k=0}^{s}\sum_{r=0}^{k}\frac{S_1(k,r)y_{s-k}}{k!}r(r-1)(r-2)\cdots(r-m+1)x^{r-m}$$

elde edilir (Cetin and Simsek 2023).

Şimdi $y_s(x)$ polinomları için integral ifadeleri verilecektir.

Teorem 4.10. $s \in \mathbb{N}_0$ *olmak üzere*

$$\int_u^{u+1} y_s(x)dx = \sum_{k=0}^{s}\frac{b_k(u)}{k!}y_{s-k} \tag{4.37}$$

dir (Cetin and Simsek 2023).

(4.37) eşitliğinde $u = 0$ alınırsa ve (3.21) eşitliği kullanılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.11. $s \in \mathbb{N}_0$ *olsun. O halde*

$$\int_0^{1} y_s(x)dx = \sum_{k=0}^{s}\frac{b_k y_{s-k}}{k!}$$

dir (Cetin and Simsek 2023).

(4.36) eşitliğinde u'dan $u+1$'e integral alınırsa, $y_s(x)$ polinomları için aşağıdaki integral ifadeleri elde edilir:

Teorem 4.12. $s \in \mathbb{N}_0$ *olmak üzere*

$$\int_u^{u+1} y_s(x)dx = \sum_{k=0}^{s}\sum_{j=0}^{k}\frac{S_1(k,j)y_{s-k}}{(j+1)k!}\left((u+1)^{j+1} - u^{j+1}\right) \tag{4.38}$$

dir (Cetin and Simsek 2023).

(4.38) ile (4.37) birlikte uygulanırsa aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 4.13. $s \in \mathbb{N}_0$ *olsun. O halde*

$$\sum_{k=0}^{s}\frac{b_k(u)}{k!}y_{s-k} = \sum_{k=0}^{s}\sum_{j=0}^{k}\sum_{v=0}^{j}\binom{j+1}{v}\frac{S_1(k,j)y_{s-k}}{(j+1)k!}u^v \tag{4.39}$$

elde edilir (Cetin and Simsek 2023).

(4.39) eşitliği kullanarak

$$\sum_{k=0}^{s}\left(\frac{b_k(u)}{k!}-\sum_{j=0}^{k}\sum_{v=0}^{j}\binom{j+1}{v}\frac{S_1(k,j)}{(j+1)k!}u^v\right)y_{s-k}=0$$

elde edilir (Cetin and Simsek 2023).

$y_{s-k}\neq 0$ olmak üzere, ikinci tür Bernoulli polinomları için iyi bilinen sonuç elde edilir:

$$b_k(x)=\sum_{j=0}^{k}\sum_{v=0}^{j}\binom{j+1}{v}\frac{S_1(k,j)}{(j+1)k!}x^v \tag{4.40}$$

(Comtet 1974; Kim 2015; Roman 1984; Simsek 2019). Bu polinomlar aynı zamanda aşağıdaki gibi de verilebilir:

$$\begin{aligned} b_k(x) &= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}b_j(0)x(x-1)\cdots(x-k+j+1) \\ &= b_k(0)+\sum_{j=1}^{k}\frac{k}{j}S_1(k-1,j-1)x^j \end{aligned}$$

(*Comtet 1974*). $u=0$ için (4.40) eşitliğinin aşağıdaki ikinci tür Bernoulli polinomlarına ingirgendiği görülür:

$$b_k(0)=\sum_{j=0}^{k}\frac{S_1(k,j)}{j+1}$$

(Comtet 1974; *Boyadzhiev 2019*).

4.3. k basamaklı n dallı bir Katakondense merdiveninin bazı sayı aileleri

Bu bölümde (2.15) ve (2.16) denklemleri yardımıyla aşağıdaki sonuçlar verilmiştir.

$n=0$ ve $k=0,1,\ldots,10$ için $E_n(k)$ sayılarının bazı değerleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} E_0(0) &= 1, \\ E_0(1) &= 1, \\ E_0(2) &= \cdots = E_0(10)=0, \end{aligned}$$

$n = 1$ ve $k = 1, 2, 3, 4, 5 \ldots$ için $E_n(k)$ sayılarının bazı değerleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
&E_1(0) = 1, \quad E_1(1) = 2, \\
&E_1(2) = 3, \quad E_1(3) = 5, \\
&E_1(4) = 8, \quad E_1(5) = 13, \\
&E_1(6) = 21, \quad E_1(7) = 34, \\
&E_1(8) = 55, \quad E_1(9) = 89, \\
&E_1(10) = 144, \ldots.
\end{aligned}$$

Burada elde edilen bu sayı dizisi, Sloane (2023) tarafından yayınlanan OnLine Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS) isimli dizi veri tabanında A000045 numarasıyla da verilen Fibonacci dizisine karşılık gelmektedir. Yani; aşağıdaki sonuca ulaşılır:

Sonuç 4.14. $k \in \mathbb{N}$ *olsun. O halde aşağıdaki eşitlik geçerlidir.*

$$E_1(k) = F_{k+1}.$$

$n = 2$ ve $k = 1, 2, 3, 4, 5$ için $E_n(k)$ sayılarının bazı değerleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
&E_2(0) = 1, \quad E_2(1) = 3, \\
&E_2(2) = 8, \quad E_2(3) = 22, \\
&E_2(4) = 60, \quad E_2(5) = 84, \ldots.
\end{aligned}$$

$n = 3$ ve $k = 1, 2, 3, 4, 5$ için $E_n(k)$ sayılarının bazı değerleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
&E_3(0) = 1, \quad E_3(1) = 4, \\
&E_3(2) = 15, \quad E_3(3) = 57, \\
&E_3(4) = 216, \quad E_3(5) = 819, \ldots.
\end{aligned}$$

$n = 4$ ve $k = 1, 2, 3, 4, 5$ için $E_n(k)$ sayılarının bazı değerleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
&E_4(0) = 1, \quad E_4(1) = 5, \\
&E_4(2) = 24, \quad E_4(3) = 116, \\
&E_4(4) = 560, \quad E_4(5) = 2704, \ldots.
\end{aligned}$$

5. SONUÇLAR

Bu tezde, bazı özel sayı ve polinom aileleri arasındaki ilişkiler üreteç fonksiyonları kullanılarak incelenmiştir. Benzer şekilde bu özel sayı ve polinom ailelerinin arasındaki bağıntılar ve formüller üzerine çalışılarak yeni sonuçlar elde edilmiştir. Elde edilen sonuçların içerdiği birinci türden Stirling sayılarının, ikinci türden Bernoulli sayı ve polinomlarının, Pell sayı ve polinomlarının ve Cauchy sayılarının temel özelliklerine yer verilmiştir. Buna ek olarak, üreteç fonksiyonları yardımıyla yeni bir sayı ve polinom ailesi tanımlanmış, iyi bilinen bazı özel sayı ve polinom aileleri ile arasındaki özellikler incelenerek yeni özdeşlikler verilmiştir.

Bu tezde ulaşılan sonuçların bazıları aşağıda verilmiştir:

Teorem 4.15 teoreminde üreteç fonksiyonu yardımıyla tanımlanan yeni polinom ailesi ile (Ozdemir ve Simsek 2016) çalışmasındaki polinomlar ailesi arasındaki bağıntı verilmiştir.

Yeni tanımlanan polinom ailesi ile birinci tür Stirling sayıları arasındaki ilişki Teorem 4.19 ile ifade edilmiştir. Bu polinom ailesine türev operatörü uygulanarak elde edilen özdeşliklere Teorem 4.20'de ve Teorem 4.21 ile yer verilirken, Riemann integrali uygulanarak bulunan bağıntılar Teorem 4.22 ve Teorem 4.23 teoremlerinde yer almıştır.

Bu tezdeki sonuçlar, hem matematiğin birçok alanında hem de bazı özel çizge(graf) kuramındaki polinomların uygulamalarında ve matematiksel modellemelerin inşaasında katkılar sağlayacak potansiyele sahiptirler.

6. KAYNAKLAR

Alkan, M. 2021. The generalized Fibonacci sequences on an integral domain. *Montes Taurus J. Pure Appl. Math.*, 3 (2), 60–69.

Boyadzhiev, K. N. 2019. New series identities with Cauchy, Stirling and harmonic numbers and Laguerre polynomials. https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1911/1911.00186.pdf.

Belbachir, H., Benmezai, A. and Bouyakoubc, A. 2023. The q -analogue of a specific property of second order linear recurrences. *Montes Taurus J. Pure Appl. Math.* 5(3), 49–57.

Cetin, Y. and Simsek, Y. 2020-2021. On fibonacci type numbers and polynomials derived from homogeneous linear recurrence relation. *The 3rd & 4th Mediterranean International Conference of Pure & Applied Mathematics and Related Areas (Proceedings Book of MICOPAM 2020-2021),* ISBN: 978-625-00-0397-8, pp–83-84, Antalya, Türkiye.

Cetin, Y. and Simsek, Y. 2022. Formulas for a new class of polynomials containing Bernoulli, Euler and Genocchi plynomials. *AIP Conference Proceedings*, CP2849, In Press.

Cetin, Y. and Simsek, Y. (2023). Formulas on Fibonacci type numbers and polynomials derived from linear recurrence relations and generating functions. Montes Taurus Journal of Pure and Applied Mathematics, Accepted.

Charalambides, Ch. A. 2002. Enumerative Combinatorics. *Chapman & Hallicrc A Crc Press Company,* Boca Raton 25 London New York Washington, D.C.

Comtet, L. 1974. Advanced Combinatorics. Kluer.

Cyvin, S.J. and Gutman, I. 1988. Kekule Structures in Benzenoid Hydrocarbons. *Springer*, Berlin.

Djordjevic, G. B. and Srivastava, H. M. 2005. Some generalizations of the incomplete Fibonacci and the incomplete Lucas polynomials. *Adv. Stud. Contemp. Math.* 11, 11-32.

Gould, H. W. 2011. Table for fundamentals of series: Part I: Basic properties of series and products. Vol. 1, https://math.wvu.edu/~hgould/Vol.1.PDF.

Kim, T. 2015. On degenerate Cauchy numbers and polynomials. *Proc. Jangjeon Math. Soc*. 18(3), 307–312.

Koshy, T. 2001. Fibonacci and Lucas numbers with applications. *Wiley-Interscience,* New York.

Koshy, T. 2014. Pell and Pell–Lucas numbers with applications. *Springer-Verlag,* New York.

Ozdemir, G. and Simsek, Y. 2016. Generating functions for two-variable polynomials related to a family of Fibonacci type polynomials and numbers. *Filomat,* 30(4), 969–975.

Roman, S. 1984. The umbral calculus. *Academic Press*, New York, NY, USA.

Sloane, N.J.A. 2023. The on-line encyclopedia of integer sequences (OEIS), Available at: http://oeis.org/?language=english.

Simsek, Y. 2019. Explicit formulas for p-adic integral: Approach to p-adic distributions and some families of special numbers and polynomials. *Montes Taurus J. Pure Appl. Math.* 1 (1), 1–76.

Simsek, Y. 2020. Some new families of special polynomials and numbers associated with finite operators. *Symmetry* 12, Article ID: 237. https://doi.org/10.3390/sym12020237.

Simsek, Y. and Kucukoglu, I. 2021. Some Certain Classes of Combinatorial Numbers and Polynomials Attached to Dirichlet Characters: Their Construction by p-Adic Integration and Applications to Probability Distribution Functions. *Springer Optimization and Its Applications, in: Ioannis N. Parasidis & Efthimios Providas &*

Themistocles M. Rassias (ed.), Mathematical Analysis in Interdisciplinary Research, Springer, 795–857.

Simsek, Y. 2021. Miscellaneous formulae for the certain class of combinatorial sums and special numbers. *Bulletin T. CLIV de l'Académie serbe des sciences et des arts* 46, 151–167.

Simsek, Y. 2023.*C*onstruction of general forms of ordinary generating functions for more families of numbers and multiple variables polynomials. Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat. 117, Article ID: 130. https://doi.org/10.1007/s13398-023-01464-0.

Volkovysky, L., Lunts, G. ve Aramanovich, I. 1977. Problems in the theory of function of a complex variable. Mir Publishers, Moscow.

ÖZGEÇMİŞ

YAĞMUR ÇETİN

yagmur48@gmail.com

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2020-2023	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans 2011-2016	Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Ankara

ESERLER

Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler

1- Cetin, Y. and Simsek, Y. (2023). Formulas for a new class of polynomials containing Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials. *AIP Conference Proceedings*, CP2849, In Press.

2- Cetin, Y. and Simsek, Y. (2023). Formulas on Fibonacci type numbers and polynomials derived from linear recurrence relations and generating functions. *Montes Taurus Journal of Pure and Applied Mathematics*, Accepted.

Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitaplarında basılan bildiriler

1- Cetin, Y. and Simsek, Y. (2023). Remarks on graph type polynomials involved in chemistry and linear recurrence relation. Proceedings Book of "The 13th Symposium on Generating Functions of Special Numbers and Polynomials and their Applications (GFSNP

2023)" (Editted by Alkan, M., Kucukoglu, I. and Öneş, O.), Antalya, Türkiye, ISBN: 978-625-00-1128-7.

2- Cetin, Y. and Simsek, Y. (2022). Notes on Fibonacci type numbers and polynomials. Proceedings Book of "International Symposium on Advanced Engineering Technologies (ISADET 2)", Kahramanmaraş, Türkiye, ISBN: 978-625-8447-02-6.

3- Cetin, Y. and Simsek, Y. (2021). On Fibonacci type numbers and polynomials derived from homogeneous linear recurrence relation. Proceedings Book of "The 3rd & 4th Mediterranean International Conference of Pure & Applied Mathematics and Related Areas (MICOPAM 2020-2021)", Antalya, Türkiye, ISBN: 978-625-00-0397-8.

4- Cetin, Y. and Simsek, Y. (2021). Formulas for a new class of polynomials containing Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials II. SESSION #4: The 10th Symposium on Generating Functions of Special Numbers and Polynomials and their Applications (GFSNP 2021) within 19th International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics ICNAAM 2021 Sheraton Hotel, Rhodes, Greece, 20-26 September 2021, ISBN: 978-9925-7552-2-6.