T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

POZİTİF TAMSAYILARIN PARÇALANIŞLARIYLA İNŞA EDİLEN TAMSAYI DİZİLERİ

Büşra AL

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Haziran 2023
ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

POZİTİF TAMSAYILARIN PARÇALANIŞLARIYLA İNŞA EDİLEN TAMSAYI DİZİLERİ

Büşra AL

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Haziran 2023
ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

POZİTİF TAMSAYILARIN PARÇALANIŞLARIYLA İNŞA EDİLEN TAMSAYI DİZİLERİ

Büşra AL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Bu tez 13/06/2023 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa ALKAN (Danışman)
Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK
Doç. Dr. İrem KÜÇÜKOĞLU
Doç. Dr. Ortaç ÖNEŞ
Dr. Öğr. Üyesi Rahime DERE

ÖZET

POZİTİF TAMSAYILARIN PARÇALANIŞLARIYLA İNŞA EDİLEN TAMSAYI DİZİLERİ

Büşra AL

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Haziran 2023; 108 sayfa

Bu tezde, parçalanış teorisi ile geçmişten günümüze bilim insanlarının ilgisini çekmiş Fibonacci sayıları arasında bir bağlantı kurulmuştur. Parçalanış teorisinin temeli olan pozitif tamsayıların parçalanışı ve kompozisyonları detaylı bir şekilde incelenmiştir.

Özellikle bu çalışmada, parçalanışlar ve kompozisyonlar için kümeler tanımlanıp bu kümeler üzerinde yeni işlemler tanımlanmıştır. Bu işlemler yardımıyla ardışık pozitif tamsayıların kompozisyonları arasında bağıntılar kurulmuştur. Tanımlanan kümeler üzerinde cebirsel ve kombinatorik işlemler yapılarak kompozisyonlar için yeni bağıntılar elde edilmiştir. Bileşen sayısı kısıtlı parçalanışlar, bileşenleri tek tamsayı olan parçalanışlar, bileşenleri tek ve tekrarlanmayan tamsayılar olan parçalanışlar gibi özel durumlara sahip literatürdeki bazı parçalanışlar kompozisyon kavramı için de ayrıca incelenmiştir. Kompozisyonlar, kısıtlanmış kompozisyonlar ve tek kompozisyonlar olacak şekilde ayrıca incelenerek ilgili kompozisyonların sayıları için üreteç fonksiyonları bulunmuştur. Tek kompozisyonlar ile Fibonacci sayıları arasındaki ilişki incelenmiştir. Günümüzde birçok matematikçinin ilgi odağı ve çalışma konusu olan Parçalanış teorisi ve üreteç fonksiyonları yardımıyla, Fibonacci sayıları gibi birçok sayı dizisi üretilmiştir. Kompozisyonların bileşen büyüklüğüne sınırlandırma getirilmiş ve bu sınırlandırma ile kısıtlı kompozisyonların sayısı için üreteç fonksiyonu bulunmuştur. Bu üreteç fonksiyonu ile n-nacci sayıları üretilmiştir.

Bu tez çalışmasında ayrıca, kompozisyonlar için bir renk kataloğu oluşturulmuş ve bu kataloğa bağlı kalınarak kompozisyonlar için desenler elde edilmiştir. Desenler elde edilirken de kompozisyonların bileşenleri için farklı kısıtlamalar getirilerek farklı desenler

incelenmiştir. Ayrıca bu desenlerin sayıları için üreteç fonksiyonları bulunmuştur. Bulunan bu üreteç fonksiyonları ile literatüre yeni sayı dizileri kazandırılmıştır.

Her bir pozitif tamsayının kompozisyon deseninin kendisinden bir fazla olan tamsayının kompozisyon deseninin içinde yer aldığı gözlemlenmiştir. Ardışık tamsayıların n-renk kompozisyon desenlerinin aralarında da altın oran olduğu gösterilmiştir.

Sonuç olarak, bu tezde elde edilen çalışmaların başta matematik olmak üzere fizik, hesaplamalı bilim ve mühendislik ve hatta mimari alanlarında kullanılma potansiyeli oldukça yüksektir.

ANAHTAR KELİMELER: Pozitif bir tamsayının parçalanışı, Pozitif bir tamsayının kompozisyonu, Fibonacci sayıları, Üreteç fonksiyonu, Pozitif bir tamsayının kompozisyon desenleri.

JÜRİ: Prof. Dr. Mustafa ALKAN
Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK
Doç. Dr. İrem KÜÇÜKOĞLU
Doç. Dr. Ortaç ÖNEŞ
Dr. Öğr. Üyesi Rahime DERE

ABSTRACT

INTEGER SEQUENCES CONSTRUCTED BY PARTITIONS OF POSITIVE INTEGERS

Büşra AL

PhD Thesis in MATHEMATICS
Supervisor: Prof. Dr. Mustafa ALKAN
June 2023; 108 pages

In this thesis, a connection has been established between the partition theory and the Fibonacci Numbers which have attracted the attention of scientists from the past to the present. The partition of positive integers, which is the basis of the partition theory and their composition have been studied in detail.

Especially in this study, sets have been defined for partitions and compositions and new operations have been defined on these sets. With the help of these operations, relationships have been established between the compositions of consecutive positive integers. Algebraic and combinatorial operations have been performed on the defined sets, and new relations have been obtained for the compositions. Some partitions in the literature, which have special cases such as partitions with limited number of summands, partitions with odd integer summands, partitions whose summands are odd and distinct integers, have also been examined for the concept of composition. Compositions, restricted compositions and odd compositions have been examined separately with their special cases and generating functions have been found for the number of related compositions. The relationship between odd compositions and Fibonacci numbers have been examined. Many number sequences such as Fibonacci numbers have been produced with the help of partition theory and generating functions, which are the focus of attention and the subject of study for many mathematicians today. The summand size of the compositions have been constrained, and the generating function, for the number of compositions constrained by this restriction, have been found. With this generating function, n-nacci numbers have been generated.

In this thesis, a color catalogue has been created for the compositions, and patterns have been obtained for the compositions by adhering to this catalogue. While obtaining the patterns, different patterns have been examined by introducing different restrictions for the summands of the compositions. In addition, generating functions have been found for the number of these patterns. With these generating functions, new number sequences have been brought to the literature.

It has been observed that the composition pattern of each positive integer is within the composition pattern of the integer that is one more than itself. It has been shown that there is a golden ratio between the n-color composition patterns of consecutive integers.

As a result, the studies obtained in this thesis have a high potential to be used in the fields of mathematics, physics, computational science and engineering, and even architecture.

KEYWORDS: Partition of a positive integer, Composition of a positive integer, Fibonacci Numbers, Generating Function, Patterns of compositions of a positive integer.

COMMITTEE: Prof. Dr. Mustafa ALKAN
Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK
Assoc. Prof. Dr. İrem KÜÇÜKOĞLU
Assoc. Prof. Dr. Ortaç ÖNEŞ
Asst. Prof. Dr. Rahime DERE

ÖNSÖZ

Bu tezin konusunun Parçalanış Teorisi olmasındaki en büyük etmen konunun ve uygulama alanlarının güncel olmasıdır. Bilimde ve teknolojide birçok alanda aktif rol alan bir konudur.

Bu tez, Giriş, Kaynak Taraması, Materyal ve Metot, Bulgular ve Tartışma, Sonuçlar olmak üzere beş bölümden oluşur.

Giriş bölümünde, konuya hazırlayıcı bilgiler verilip çalışmanın amacı ve kapsamı açıklanmıştır.

Kaynak Taraması bölümünde bu tezde kullanılan temel kavramlar ve özellikler literatür taraması ile birlikte verilmiştir. Pozitif bir tamsayının parçalanışı, pozitif bir tamsayının kompozisyonu ve kompozisyon renklendirmeleri ve desenler ifade edilmiştir.

Materyal ve Metot bölümünde, tezin materyal ve metodu ile ilgili bilgiler verilmiştir. Pozitif bir tamsayının parçalanışlarıyla ilgili temel teoremler verilmiştir ve ispatları yapılmıştır. Kısıtlanmış parçalanışlar ifade edilerek üreteç fonksiyonları verilmiştir. Ayrıca pozitif bir tamsayının kompozisyonlarıyla ilgili temel teoremler verilmiştir ve ispatları yapılmıştır. n-renk kompozisyonlar ifade edilip n-renk kompozisyonlar için de temel teoremler ifade edilmiştir. Pozitif bir tamsayının düzensiz parçalanışları ifade edilerek temel teoremlerin ispatları verilmiştir. Kısıtlanmış parçalanışlar hakkında bilgi verilerek temel tanım ve teoremler ifade edilmiştir.

Bulgular ve Tartışma bölümünde, tez çalışmasında elde edilen sonuçlar verilmiştir. Kompozisyonlar için detaylı inceleme yapılmıştır. Bileşen büyüklüğü sınırlandırılmış kompozisyonlar, bileşen sayısı sabit olan kompozisyonlar, bileşeni tek tamsayı olan kompozisyonlar, kısıtlanmış tek kompozisyonlar, pozitif bir tam sayının renk kompozisyonları, pozitif bir tamsayının n-renk kompozisyonları, pozitif bir tamsayının palindrom renk kompozisyonları, palindrom renk kümeleri ifade edilmiştir. Bu ifadelerle ilgili teoremlerin ve bağıntıların ispatları verilmiştir. Üreteç fonksiyonları elde edilmiştir.

Sonuç kısmında yapılan çalışmaların altın oran ile ilişkisi verilmiştir.

Doktora eğitimim boyunca ve tez çalışmamda desteğini esirgemeyen engin bilgileriyle bana ışık tutup her zaman bana destek olan sayın danışman hocam Prof. Dr. Mustafa ALKAN'a teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Tez çalışmam boyunca bilgileriyle bana ışık tutan, gelişimime katkı sağlayan sayın jüri üyeleri hocalarım, Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK, Doç. Dr. İrem KÜÇÜKOĞLU, Doç. Dr. Ortaç ÖNEŞ ve Dr. Öğr. Üyesi Rahime DERE'ye de teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Çalışmalarım boyunca YÖK 100/2000 Doktora Bursu ile beni destekleyen Yüksek Öğretim Kurumu'na ve Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik alanında doktora yaparak ülkemizin öncelikli 100 alanından birinde çalışmama vesile olan saygı değer hocam Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK'e teşekkürlerimi sunarım.

Son teşekkürüm hayatım boyunca desteklerini hissettiğim her anımda yanımda olan aileme... Bu günlere gelmemde büyük emekleri olan her zaman arkamda olan, değerlim, canım annem Semra AL'a, lisansüstü eğitimlerimizi aynı zamanlarda yaptığımız bana destek ve hep yanımda olan canım ablam Merve AL'a, herşeyim olan biriciğim, canım kardeşim Arzu AL'a ve bugün bedenen yanımda olamasa da her an yanımda hissettiğim, eğitime ömrünü adamış gurur kaynağım canım babam Hamit AL'a teşekkür ederim. Doktora tezimi canımdan öte aileme ithaf ediyorum...

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Doktora Tezi olarak sunduğum "POZİTİF TAMSAYILARIN PARÇALANIŞLARIYLA İNŞA EDİLEN TAMSAYI DİZİLERİ" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

13/06/2023

Büşra AL

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	: Pozitif tamsayılar kümesi
F_n	: n. Fibonacci sayısı
L_n	: n. Lucas sayısı
J_n	: n. Jacobsthal sayısı
$p(n)$	: n pozitif tamsayısının parçalanış sayısı
$p_k(n)$	: n pozitif tamsayısının, bileşen sayısı en fazla k olan parçalanış sayısı
$Q(n)$	: n pozitif tamsayısının bileşenleri tek tam sayılardan oluşan parçalanış sayısı
$Z(n)$	: n pozitif tamsayısının bileşenleri tek ve düzensiz tamsayılardan oluşan parçalanış sayısı
$P(n)$	: n pozitif tamsayısının kompozisyon sayısı
$C_\nu(S,C)$	: ν pozitif tamsayısının S-sınırlı bir C-renk kompozisyonlarının kümesi
$P_\nu(C)$	: ν pozitif tamsayısının C-renk palindromlarının kümesi
P_ν	: ν pozitif tamsayısının n-renk palindromlarının kümesi
$\lvert P_\nu(C)\rvert$	: ν pozitif tamsayısının C-renk palindromlarının sayısı
$\lvert P_\nu\rvert$	: ν pozitif tamsayısının n-renk palindromlarının sayısı
$\hat{N}_v(C)$	: ν pozitif tamsayısının tüm C-renk palindromları üzerindeki toplam parça sayısı
$\hat{N}_v$	: ν pozitif tamsayısının tüm n-renk palindromları üzerindeki toplam parçalanış sayısı
H_d	: Pozitif bir tamsayının bileşenlerinin en fazla d defa tekrarlandığı parçalanış kümesi
$P_{k,d}(n)$	: n tamsayısının her biri k tamsayısından küçük eşit olmak üzere en çok d bileşeni olan parçalanış kümesi
$P_k(n)$	: n pozitif tamsayısının k tane bileşeni olan kompozisyonlarının sayısı
$P_{n,a}$	: n tamsayısının en büyük bileşeni en fazla a olabilen kompozisyonlarının kümesi

$\|P_{n,a}\|$	: $P_{n,a}$ kümesinin eleman sayısı
t_n	: n. Tribonacci sayısı
$\bar{T}_n$	: n. Tetranacci sayısı
$G_j(t,y;k,m,n)$	: Genelleştirilmiş çift değişkenli polinom
${}_mP_n$	: n tamsayısının bileşen sayısı m olan kompozisyonlarının kümesi
${}_mt_n$	: ${}_mP_n$ kümesinin eleman sayısı
O_n	: n pozitif tamsayısının bileşenleri tek tam sayılardan oluşan kompozisyonlarının kümesi
T_n	: n pozitif tamsayısının bileşenleri tek tam sayı olan kompozisyonlarının sayısı
o_n	: n pozitif tamsayısının bileşenleri tek tam sayı olan kompozisyonlarının bileşenlerinin çarpım toplamları
$O_{m,n}$	: n pozitif tamsayısının bileşeninin büyüklüğü en fazla m olan tek kompozisyonlarının kümesi
$o_{m,n}$	: n pozitif tamsayısının bileşeni en fazla m olan tek kompozisyonlarının sayısı
C_n	: n pozitif tamsayısının bir dizi palindrom kompozisyon kümesi
c_m	: Pozitif bir m tamsayısının palindrom renk kompozisyonlarının sayısı
T_n	: n tamsayısının parçalanışlarının bileşenlerinin çarpımlarının toplamı
$T_{n,a}$	: $P_{n,a}$ kümesinin elemanlarının bileşenlerinin çarpımlarının toplamı
${}_mT_n$	: ${}_mP_n$ kümesinin elemanlarının bileşenlerinin çarpımlarının toplamı
$T_m(\beta)$	: β-renk kompozisyonlarının sayısı
$T_m(\alpha,\beta)$	: (α,β)-renk kompozisyonlarının sayısı
$pc(x)$	: Palindrom renk kompozisyonlarının sayısını veren üreteç fonksiyonu
C_m	: m pozitif tamsayısının bir dizi palindrom kompozisyon kümesi
$\chi(x)$	: Palindromik tipte eksen değişimini gösteren sayıların üreteç fonksiyonu
$P(x)$	: Palindromik tipte kanatların değişimini gösteren sayıların üreteç fonksiyonu
$pal(x)$	: Palindrom kompozisyonlar için üreteç fonksiyonu
$np(x)$	: Palindrom kompozisyonlarının sayıları için üreteç fonksiyonu

b_m : m tamsayısının orta kısmı bir renk ve kanatları n-renk olan renk palindromların kompozisyonlarının sayısı

$cp_1(x)$: Renk palindrom kompozisyonlarının sayıları için üreteç fonksiyonu

$cp_2(x)$: İlk kısmı beyaz, k büyüklüğündeki diğerleri k rengini alan palindrom kompozisyonlarının sayılarını veren üreteç fonksiyonu

$cp_3(x)$: Parçaları renk palindromu olan palindrom kompozisyonlarının sayıları için üreteç fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

İnsanoğlunun var oluşundan beri gereksinim duyulan sayılar ve sayıların kullanımının hayatımızdaki yeri yadsınamayacak kadar önemlidir. Sayılar ile ilgili merak uyandıran sorulardan birisi de Leibniz'in 1674 yılında dile getirdiği "Bir pozitif tam sayı pozitif tamsayıların toplamı olarak kaç farklı şekilde yazılabilir?" sorusudur. Bu soru büyük merak uyandırmış ve bu konuda birçok çalışma yapılmıştır. Yapılan bu çalışmalar da pozitif bir tamsayının parçalanması konusunun başlamasına neden olmuştur. Pozitif tam sayının parçalanması, kendinden küçük pozitif tam sayıların toplamı şeklinde ifade edilmesidir. Literatürde, pozitif bir n tam sayısının parçalanışlarının sayısı $p(n)$ ile gösterilmiştir. Leibniz bu parçalanışlarının sayısının her zaman bir asal sayı olacağını iddia etmiştir ancak bu iddiasının $p(7) = 15$, yani 7 tamsayısının parçalanış sayısının hesaplanıp 15 elde edilmesiyle birlikte doğru olmadığı anlaşılmıştır. Bu tip sayıların sonlu olup olmayacağı ise hala açık problemdir.

Parçalanış teorisi ile ilgili en önemli kavramlardan biri de "Beşgensel Sayı Teoremi" dir. Beşgensel sayı teoremine ilk defa 1740 yılında Euler ile Daniel I Bernoulli yazışmalarında rastlanılmıştır (Juskevic vd. 1975). Euler, Daniel I Bernoulli'nin yanı sıra Niklaus I Bernoulli ve Christian Goldbach ile de yazışmalarında bir tamsayının parçalanışının bulunmasına dair problemlerden söz etmiştir (Fellmann ve Mikhajlov 1998; Juskevic ve Winter 1965; Juskevic ve Taton 1980; Al 2018). Yazışmaların ilerleyen döneminde 9 Haziran 1750 de Euler'den Goldbach'a gönderilen 144. mektupta Euler beşgensel sayı teorisinin ispatını yaptığını belirtmiştir (Juskevic ve Winter 1965).

Petropolitanae'de 1751 yılında yayınlanmıştır (Euler 1751). Yayınladığı bu çalışmada Euler'in parçalanış fonksiyonu için bulduğu üreteç fonksiyonu

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + 22x^8 + ...$$

şeklindedir.

İsviçreli matematikçi Leonard Euler, Alman matematikçiler C. Goldbach ile H. Jacobi, Hint matematikçi S. Ramanujan, ve İngiliz matematikçi G. H. Hardy pozitif tamsayıların parçalanışı yani parçalanış teorisi üzerine önemli çalışmalar yapan ünlü matematikçiler arasındadır. Hardy, pozitif bir tamsayısının parçalanış sayısı için bazı formüller vermiştir (MacMahon 1921; Watson 1937; Hardy 1960; Apostol 1976; Euler 1988). Ayrıca parçalanışlar için ünlü Hardy-Ramanujan Asimptotik Formülü olarak bilinen formülü vardır (Baez-Duarte 1997). Bu formül istatistiksel fizikte kullanılmış ve atom çekirdeğinin kuantum parçalanış fonksiyonlarını hesaplamak için kullanılmıştır. Sonuç olarak, bir sayının parçalanışının matematiksel fizikte, temsil teorisinde, q-serilerinde, Lie teorisinde, simetrik fonksiyonlarda, istatistiksel mekanikte, modüler formlar teorisinde ayrıca diğer bilimlerde birçok uygulaması vardır. Dolayısıyla parçalanış teorisi, matematik, fizik, mühendislik ve pek çok problemde sıklıkla kullanılır. Özellikle bilgisayar biliminde, parçalanış teorisi, bilgisayar belleği tahsisini kontrol etmek için verimli yöntemlerin tasarımında ortaya çıkan bir dizi pratik problemin analizinde, otomatik kontrol sistemleri için programlama tekniklerinin analizi için yöntemlerin geliştirilmesinde kullanılır (Anonymous 2023).

Parçalanış teorisinin bir argümanı ile bilgisayar bilimlerinde yeni algoritmalar geliştirilmektedir. Ayrıca fizik biliminde parçalanış teorisi Bazonik yoğunluk ve Fermiyonik yoğunluk hesaplarında da kullanılmaktadır. Parçalanış teorisinin diğer bilimlerdeki uygulamalarına ilişkin daha fazla örnek (Anonymous 2023) kaynağında verilmektedir. Sayıların parçalanışlarıyla ilgili birçok çalışma yapılmış ve bu konu günümüze kadar önemini git gide artırarak gelmiştir.

Bu doktora tezinde de ilk olarak parçalanış teorisinin temelleri olan tanım ve teoremler incelenmiştir. Literatür taramasından sonra kompozisyonlar üzerinde yoğunlaşılmıştır. Pozitif tamsayıların komposizyon kümelerini ele etmek için iki farklı işlem tanımlanmıştır. Bu işlemler ile kompozisyon kümeleri elde edildikten sonra kompozisyon kümeleri arasında bağıntılar verilmiştir. Daha sonra bilim ve sanatta yaygın çalışmaları olan Fibonacci sayılarıyla kompozisyonlar ve dolayısıyla da parçalanış teorisi arasında bağıntı kurulmuştur. Parçalanış teorisinde sayıların parçalanışlarının renk kataloğu oluşturulmuş, oluşturulan renk kataloğuna göre sayıların kompozisyonlarının desenleri incelenmiştir. Bu desenlerin de Fibonacci dizisiyle ilişkisi incelenmiş, desenlerin arasında altın oran olduğu görülmüştür. Bu çalışmaların devamında renklendirmelere farklı kısıtlamalar getirilerek yeni desenler oluşturulmuştur. Oluşturulan bu desenlerin sayısını veren üreteç fonksiyonları elde edilip ispatları yapılmıştır.

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçların hesaplamalı sayı teorisinde, fizikte, hesaplamalı bilim ve mühendislik gibi birçok alanda kullanılma potansiyeli vardır.

2. KAYNAK TARAMASI

Bu bölümde, tez boyunca sıklıkla kullanılacak bazı temel kavramların tanımları, bağıntılar ve eşitlikler verilecektir. Bu bölümdeki temel ifadeler için Hoggat (1969), Apostol (1976), Andrews (1998) ve Koshy (2001) kitaplarından, Hoggat ve Lind (1968), Mana (1969), Gupta(1970), Andrews (1976), Hoggat (1978), Agarwal (1987), Agarwal ve Andrews (1987), Agarwal (2000), Andrews ve Erikson (2004), Ewel (2004), Heubach ve Mansour (2004), Heubach ve Mansour (2010), Shapcott (2012), Gessel ve Li (2013), Merca (2016), Archibald vd. (2020), Al ve Alkan (2020) makalelerinden yararlanılmıştır. Parçalanışların sayısı için üreteç fonksiyonlarını vermeden önce üreteç fonksiyonu tanımı hatırlanmalıdır.

Tanım 2.1. *$f(x)$ bir fonksiyon olmak üzere*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

fonksiyonuna, $\{a_0, a_1, a_2, ...\}$ katsayılarının üreteç fonksiyonu denir (Koshy 2001).

Üreteç fonksiyonları için birkaç örnek verilirse; $\mid x \mid < 1$ için,

i) $\{1\}_{n=1}^{\infty}$ sayı dizisi için üreteç fonksiyonu $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$,

ii) Doğal sayılar için üreteç fonksiyonu $\frac{x}{(1-x)^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n$

(Koshy 2001).

Elde edilecek bulgularda kullanılacağı için Cauchy çarpımını hatırlamakta fayda vardır.

Tanım 2.2 (Cauchy Çarpımı). *$\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ ve $\sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ olarak tanımlanan iki yakınsak serinin Cauchy Çarpımları*

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} x^k$$

şeklinde tanımlanır (Andrews 1998).

Tanıma denk olarak serilerin kuvvetleri farklı ise $c \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^{cn}}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\left\| \frac{n}{c} \right\|} \frac{b_k a_{n-ck}}{(ck)!(n-ck)!} x^n$$

eşitliği de görülebilir. Burada $\|.\|$ tam değer fonksiyonudur.

Tez çalışmasında kompozisyonlar ile Fibonacci sayıları, Lucas sayıları ve Jacobsthal sayıları arasında bağıntılar elde edileceğinden bu sayıların genel tanım ve özelliklerine ihtiyaç vardır.

Tanım 2.3 (Fibonacci sayıları)**.** *İlk iki terimi* 0 *ve* 1 *olan ve üçüncü terimden itibaren her bir terimi, kendinden önceki iki terimin toplamı olan* $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55...$ *sayılarının dizisine Fibonacci dizisi denir. Bu sayıların her birine Fibonacci sayıları denir ve* n*. Fibonacci sayısı* F_n *ile gösterilir.* $F_0 = 0$ *ve* $F_1 = 1$ *olmak üzere Fibonacci dizisi için özyineleme bağıntısı*

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

dir (Brown 1961; Koshy 2001).

Katsayıları Fibonacci sayılarını (F_n) veren üreteç fonksiyonu

$$G_F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2} \tag{2.1}$$

şeklindedir (Brown 1961; Koshy 2001).

Ayrıca Koshy (2001) kaynağında ifade edilen Fibonacci sayıları için iyi bilinen birkaç eşitlik tekrarlanabilir:

- $$\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n},$$
- $$\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1},$$
- $$F_{2(n+1)} = 1 + \sum_{i=0}^{n} F_{2i} + F_{2n},$$
- $n \geq 1$ için Cassini Formülü

  $$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

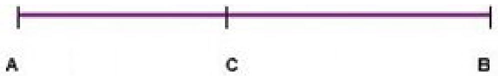
  şeklindedir.

- $n \geq 1$ ve $m \geq 1$ için

$$F_{n+m} = F_{n+1}F_{m+1} + F_{n-1}F_{m-1}$$

şeklindedir (Mana 1969; Koshy 2001).

Tanım 2.4. $|CB| = a$ *birim ve* $|AC| = b$ *birim olmak üzere* $0 < b < a$ *için*



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

oranına altın oran denir.

Fibonacci dizisindeki ardışık iki sayının oranı sayılar büyüdükçe altın orana yaklaşır.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1.61803398875...$$

ifadesi altın orandır (Koshy 2001).

Tanım 2.5 (Lucas sayıları)**.** *Her* $n \geq 1$ *tamsayısı için, başlangıç şartları* $L_0 = 2,\ L_1 = 1$ *için*

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$$

özyineleme bağıntısı ile tanımlanan $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, ...$ *şeklindeki diziye Lucas sayı dizisi denir ve bu dizisinin elemanları Lucas sayıları olarak adlandırılır.* n*. Lucas sayısı* L_n *ile gösterilir (Brown 1961; Hoggat 1969; Koshy 2001).*

Katsayıları Lucas sayılarını (L_n) veren üreteç fonksiyonu

$$G_L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = \frac{2-x}{1-x-x^2} \tag{2.2}$$

şeklinde ifade edilir (Hoggat 1969; Koshy 2001).

$G_F(x)$ ve $G_L(x)$ fonksiyonlarının paydası 0 sayısına eşit olduğunda, bu fonksiyonların kutupları elde edilir:

$$1 - x - x^2 = (1 - \alpha x)(1 - \beta x),$$

burada

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

ve

$$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

$\mid x \mid < \min\left\{\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{-\beta}\right\}$ için (2.1) ve (2.2) serileri yakınsaktır (Koshy 2001; Battaloglu ve Şimşek 2021).

Tanım 2.6 (Jacobsthal sayıları)**.** $0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, ...$ *sayı dizisine Jacobsthal sayıları denir ve* n*. Jacobsthal sayısı* J_n *ile gösterilir.* $n \geq 0$ *için* $J_0 = 0$ *ve* $J_1 = 1$ *olmak üzere Jacobsthal dizisinin özyineleme bağıntısı*

$$J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n$$

şeklindedir (Hoggat 1978).

Katsayıları Jacobsthal sayılarını (J_n) veren üreteç fonksiyonu

$$\sum_{i=1}^{\infty} J_i x^{i-1} = \frac{1}{1-x-2x^2}$$

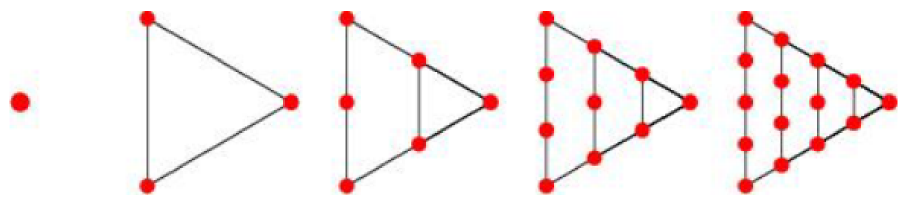
şeklindedir (Hoggat 1978).

Tek noktaya 2 nokta daha eklenerek bir kenarı 1 birim uzunluğunda bir üçgen elde edilebilir. Elde edilen bu üçgene 3 nokta daha eklenerek, ilk üçgenin dışında bir kenarı 2 birim olan ikinci bir üçgen daha oluşturulabilir. Aynı şekilde ikinci üçgene 4 nokta daha eklenerek ikinci üçgenin dışında bir kenarı 3 birim olan üçüncü bir üçgen daha oluşturulabilir. Bu adımlar böyle devam ederse oluşturulacak her bir üçgen için gereken nokta sayısı $\{1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, ...\}$ aritmetik dizisi şeklinde ilerleyecektir.

Tanım 2.7. *Yukarıdaki şekilde tanımlanan* $\{1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, ...\}$ *sayı dizisine üçgen sayı dizisi denir ve bir eşkenar üçgen içinde düzenlenmiş nesneleri sayar. Açık formülü*

$$\frac{k(k+1)}{2} = \sum_{i=1}^{k} i$$

dır (Weisstein 2023).

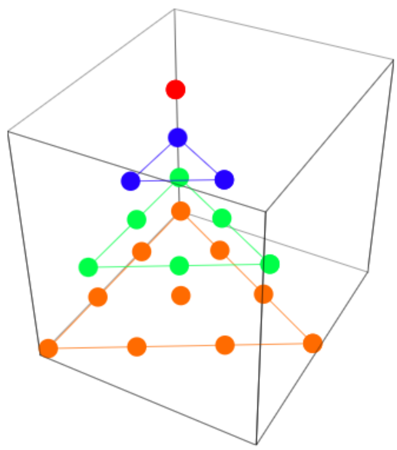


Şekil 2.1. Üçgensel Sayılar (Deza and Deza, 2012)

Tanım 2.8 (Üçgen piramitsel sayılar)**.** *Tetrahedral sayı veya üçgen piramitsel sayı üçgen tabanlı ve tetrahedron adı verilen üç kenarı olan bir piramidi temsil eden figüratif bir sayıdır.* n *inci dört yüzlü sayı* Te_n *, ilk* n *üçgen sayının toplamıdır, yani,*

$$Te_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k} i \right)$$

dir. Üçgen piramitsel sayı dizisi $1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, \ldots$ *şeklindedir (Weisstein 2023).*



Şekil 2.2. Üçgen piramitsel sayılar (https://mathworld.wolfram.com/Tetrahedral Number.html, (E.T. 19/06/2023))

Pozitif Bir Tamsayının Parçalanışları

Tanım 2.9. *Pozitif bir n tamsayısının bir parçalanışı, bu sayının pozitif tamsayıların toplamı olarak ifade edilmesidir. Bu parçalanışların sayısı da $p(n)$ ile gösterilmektedir. Burada parçalanışları oluşturan her bir terime parça (bileşen,summand) denir. Parçalanıştaki bileşenlerin yer değiştirmesi önemsizdir yani $\{a, b\}$ ile $\{b, a\}$ aynı parçalanışları ifade eder (Apostol 1976).*

Örnek 2.10. 6 *tamsayısının parçalanışları*

$$\{(6), (5, 1), (4, 2), (3, 3), (4, 1, 1), (3, 2, 1), (3, 1, 1, 1),$$
$$(2, 2, 2), (2, 2, 1, 1), (2, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1, 1)\}$$

şeklindedir. Parçalanışların sayısı $p(6) = 11$ şeklinde gösterilir.

Pozitif Bir Tamsayının Kompozisyonları

Tanım 2.11. *Pozitif bir n tam sayısının, pozitif tamsayıların toplamı olarak ifade edilmesine n tamsayısının kompozisyonu denir. n pozitif tamsayısının kompozisyon sayısı $P(n)$ ile gösterilir. Kompozisyondaki bileşenlerin yer değiştirmesi önemlidir yani $\{a, b\}$ ile $\{b, a\}$ farklı kompozisyonları ifade eder.*

Örnek 2.12. 6 *tamsayısının kompozisyonları*

$$\{(6), (5, 1), (1, 5), (4, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 1, 1), (1, 4, 1), (1, 1, 4),$$
$$(3, 2, 1), (3, 1, 2), (2, 3, 1), (2, 1, 3), (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 2, 2),$$
$$(2, 2, 1, 1), (2, 1, 2, 1), (2, 1, 1, 2), (1, 2, 2, 1), (1, 2, 1, 2), (1, 1, 2, 2),$$
$$(2, 1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 1, 1), (1, 1, 2, 1, 1), (1, 1, 1, 2, 1), (1, 1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 1, 1, 1)\}$$

şeklindedir. Kompozisyonların sayısı $P(6) = 32$ şeklinde gösterilir.

Pozitif bir tamsayının kısıtlı kompozisyonları tanımlanarak genelleştirilmiş çift değişkenli polinomlarla ilişkilendirileceği için bu polinomların tanımını vermek gerekir. Özdemir ve Şimşek (2016) çalışmasında genelleştirilmiş çift değişkenli polinomlar için üreteç fonksiyonunu aşağıdaki şekilde tanımlamışlardır:

Tanım 2.13. $G_j(t, y; k, m, n)$ *genelleştirilmiş çift değişkenli polinomlar için üreteç fonksiyonu*

$$H(x, t, y; k, m, n) = \frac{1}{1 - t^k x - y^m x^{m+n}} = \sum_{j=0}^{\infty} G_j(t, y; k, m, n) x^j$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada $m, n, k \in \mathbb{N},\ x, y \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{C}$ *dir (Özdemir ve Şimşek 2016).*

Kompozisyon Renklendirmeleri Ve Desenler

Son yıllarda yapılan çalışmalarda, bir m tamsayısının n-renk kompozisyonu (veya renk kompozisyonları), bir parçalanışın n boyutulu bileşeninin n rengini alabileceği kompozisyonu olarak tanımlanmaktadır (Agarval, 1987; Agarval, 2000; Shapcott, 2012).

Örnek 2.14. 4 *için* 21 *tane* n*-renk kompozisyonu vardır. Bunlar*

$$\{(1_1, 1_1, 1_1, 1_1), (2_1, 1_1, 1_1), (1_1, 2_1, 1_1), (1_1, 1_1, 2_1), (2_2, 1_1, 1_1),$$
$$(1_1, 2_2, 1_1), (1_1, 1_1, 2_2), (2_1, 2_1), (2_1, 2_2), (2_2, 2_1), (2_2, 2_2), (3_1, 1_1),$$
$$(1_1, 3_1), (3_2, 1_1), (1_1, 3_2), (3_3, 1_1), (1_1, 3_3), (4_1), (4_2), (4_3), (4_4)\}$$

dir.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde parçalanış teorisini incelerken temel tanım, teorem ve sonuçlar detaylı bir şekilde ifade edilecektir. Ayrıca parçalanış teorisindeki bazı üreteç fonksiyonları ve ispatları ifade edilecektir. Bunlara ek olarak, parçalanış teorisi ile ilgili seriler incelenecektir.

Teorem 3.1. *$p(0) = 1$ olmak üzere $\mid x \mid < 1$ için, n tamsayısının parçalanış sayısı için üreteç fonksiyonu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n} \tag{3.1}$$

dir (Apostol 1976).

İspat Çarpımdaki her bir eleman kuvvet serisi olarak yazılırsa

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n} = (1 + x + x^2 + ...)(1 + x^2 + x^4 + ...)(1 + x^3 + x^6 + ...)...$$

ifadesi elde edilir. Eşitliğin sağ tarafındaki seri çarpımı polinom şeklinde davranacağından kuvvet serisi

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} a(k)x^k$$

formundadır.

Her $k_i \geq 0$ için, ilk seriden x^{k_1}, ikinci seriden x^{2k_2}, üçüncüden x^{3k_3}, ..., m. terimden x^{mk_m} terimlerinin alındığı varsayılsın. Bu terimlerin çarpımına x^k denilirse

$$x^{k_1}x^{2k_2}x^{3k_3}...x^{mk_m} = x^k$$

olur. Böylece $k = k_1 + 2k_2 + 3k_3 + ... + mk_m$ eşitliği

$$k = (1 + 1 + ... + 1) + (2 + 2 + ... + 2) + ... + (m + m + ... + m),$$

şeklinde de yazılabilir. Burada ilk parantez k_1 tane 1, ikinci parantez k_2 tane 2, ..., m. parantez k_m tane m içerir. Bu pozitif toplamlar da k'nın parçalanışı olacaktır. Bu nedenle $a(k)$ ile $p(k)$ eşittir.

Buraya kadar yapılan ispatta yakınsaklık problemi göz ardı edilmiştir ancak yakınsaklık kavramı ile incelenerek ispat daha da netlik kazanır;

$$F_m(x) = \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-x^k}, \text{ ve } \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} = \lim_{m\to\infty} F_m(x) \tag{3.2}$$

olmak üzere eğer $0 \leq x < 1$ ise $\lim_{m\to\infty} F_m(x) = F(x)$ olduğu görülmelidir.

$$F_{m+1}(x) = \frac{1}{1-x^{m+1}} F_m(x) \geq F_m(x)$$

olduğundan her x için $\{F_m(x)\}$ dizisi artandır ve her m için $F_m(x) \leq F(x)$ elde edilir. $F_m(x)$ mutlak yakınsak serinin sonlu sayıda çarpımı olduğundan

$$F_m(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_m(k) x^k \tag{3.3}$$

yakınsak serisi yazılabilir.

O halde

$$k = k_1 + 2k_2 + 3k_3 + ... + mk_m$$

sayısı $p_m(k)$, yani k'nın m'yi aşmayan parçalanışlarının sayısıdır.

Eğer $m \geq k$ ise $p_m(k) = p(k)$. Bundan dolayı her zaman $m \geq k$ iken $p_m(k) \leq p(k)$ vardır. Başka bir ifadeyle

$$\lim_{m\to\infty} p_m(k) = p(k)$$

dır. Şimdi $F_m(x)$ serisi iki kısma ayrılırsa;

$$\begin{aligned} F_m(x) &= \sum_{k=0}^{m} p_m(k)x^k + \sum_{k=m+1}^{\infty} p_m(k)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{m} p(k)x^k + \sum_{k=m+1}^{\infty} p_m(k)x^k \end{aligned}$$

dir. $x \geq 0$ iken

$$\sum_{k=0}^{m} p(k)x^k \leq F_m(x) \leq F(x)$$

olur. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p(k)x^k$ serisinin yakınsak olduğunu gösterir. Dahası $p_m(k) \leq p(k)$ iken

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_m(k)x^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k \leq F(x)$$

dir. $m \to \infty$ alınırsa

$$F(q) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_m(k)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{m\to\infty} p_m(k)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k,$$

$0 < x < 1$ için Euler eşitliği kanıtlanır (Apostol 1976). □

Bir tamsayının parçalanışı için üreteç fonksiyonu ve ispatından sonra parçalanış teorisinin temel bağıntılarından olan Euler'in özyineleme formülü de ifade edilmelidir. Euler'in özyineleme formülünü elde edebilmek için öncelikle Beşgensel Sayı Teoremi de ifade edilmelidir. Beşgensel Sayı Teoreminden sonra Euler'in parçalanış için özyineleme bağıntısı verilebilir.

Teorem 3.2 (Euler'in Beşgensel Sayı Teoremi)**.** $\mid x \mid < 1$ *ise*

$$\begin{aligned}\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m) &= 1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+... \\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\{x^{w(n)}+x^{w(-n)}\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{w(n)} \qquad (3.4)\end{aligned}$$

dir. Burada $w(n) = \sum\limits_{k=0}^{n-1}(3k+1) = \frac{3n^2-n}{2}$ *ve* $w(-n)$ *beşgensel sayıları ifade etmektedir (Apostol 1976).*

Teorem 3.3. $p(0) = 1$ *olsun ve* $n < 0$ *ise* $p(n) = 0$ *olduğu kabul edilsin. Pozitif* n *tamsayısı için,*

$$p(n) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\{p(n-w(k))+p(n+w(k))\} \qquad (3.5)$$

dir (Apostol 1976).

İspat (3.1) eşitliği ve Euler'in Beşgensel Sayı Teoremi ile

$$(1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\{x^{w(k)}+x^{w(-k)}\})(\sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^n) = 1$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin sağ tarafındaki ifadede $n \geq 1$ için x^n'nin katsayısı 0'dır. (3.5) bağıntısının sol tarafında gerekli işlemler yapılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(p(n)-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\{p(n-w(k))+p(n+w(k))\}\right)x^n = 1$$

elde edilir. Buradan katsayılar eşitlenerek istenilen sonuç elde edilir (Apostol 1976). $\square$

3.1. Pozitif Bir Tamsayının Parçalanışı

Euler'in parçalanış için özyineleme bağıntısının açık formülü $p(n)$ için; $p(0) = 1$ olmak üzere

$$p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) + p(n-7) + ... = 0$$

dır. Bu özyineleme bağıntısından birkaç değer elde edilmek istenilirse, $p(0) = 1$ koşulu ile $p(1)$ elde edilebilir.

$$p(1) - p(0) = 0, \text{ buradan } p(1) = 1.$$

Daha sonra $p(0) = 1$ ve $p(1) = 1$ ile $p(2)$ hesaplanabilir.

$$p(2) - p(1) - p(0) = 0, \text{ buradan } p(2) = 2.$$

Bu şekilde hesaplanmaya devam edilirse

$$\begin{aligned} p(3) &= 3,\ p(4) = 5,\ p(5) = 7,\ p(6) = 11,\ p(7) = 15, \\ p(8) &= 22,\ p(9) = 30,\ p(10) = 42,\ p(11) = 56 \end{aligned}$$

olarak elde edilecektir.

3.1.1. Kısıtlanmış Parçalanışlar

Pozitif bir tamsayının bileşenleri üzerine kısıtlama veya bileşenlerinin sayısı için sınırlandırma getirilen parçalanışlara kısıtlanmış parçalanışlar denir.

n pozitif tamsayısının bileşen sayısı en fazla m olan parçalanış sayısı $p_m(n)$ ile gösterilir (Apostol 1976).

Örneğin 6 için bileşenlerinin sayısı en fazla 2 olan parçalanışları

$$\{(6), (5,1), (4,2), (3,3)\}$$

olduğundan $p_2(6) = 4$. Aynı şekilde 6 tamsayısının bileşenlerinin sayısı en fazla 3 olan parçalanışları

$$\{(6), (5,1), (4,2), (3,3), (4,1,1), (3,2,1), (2,2,2)\}$$

olduğundan $p_3(6) = 7$.

Tanım 3.4. *Bir n pozitif tamsayısının parçalanışındaki bileşenler tek tam sayı ise bu parçalanışlarına tek parçalanış denir ve tek parçalanışların sayısı $Q(n)$ ile gösterilir (Apostol 1976).*

Tek parçalanışları göstermek için verilecek örnekte yine 6 tamsayısı incelenirse, bileşenleri tek tam sayı olan

$$\{(5,1),(3,3),(3,1,1,1),(1,1,1,1,1,1)\}$$

parçalanışları gözlemlenebilir. Buradan $Q(6) = 4$.

Tanım 3.5. *Bir n pozitif tamsayısının parçalanışındaki bileşenler tekrarlanmıyorsa bu parçalanışlarına düzensiz parçalanışlar denir (Apostol 1976).*

Tanım 3.6. *Bir n pozitif tamsayısının parçalanışındaki bileşenler tekrarlanmayan tek tamsayılardan oluşuyorsa bu parçalanışlarına tek ve düzensiz parçalanışlar denir ve parçalanışların sayısı $Z(n)$ ile gösterilir (Apostol 1976).*

Örneğin 6 tamsayısı incelenirse, bileşenleri tek tam sayı olan

$$\{(5,1),(3,3),(3,1,1,1),(1,1,1,1,1,1)\}$$

parçalanışları vardır ancak $(3,3),(3,1,1,1),(1,1,1,1,1,1)$ parçalanışlarındaki bileşenler tekrarlı olduğu için 6 tamsayısının tek ve düzensiz tek parçalanışı $(5,1)$ dir. Bu nedenle $Z(6) = 1$.

Yukarıda incelenen kısıtlanmış parçalanış, tek parçalanış, tek ve düzensiz parçalanış kavramları sonuç kısmında kompozisyonlar için incelenecektir.

Parçalanışlar ile ilgili bağıntıları ifade etmeden önce üreteç fonksiyonlarını ifade etmek gerekir. Bazı üreteç fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

$|\ x\ | < 1$ olmak üzere

Üreteç Fonksiyonu	m tamsayısının parçaları
$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2m-1}}$	tek tamsayılar
$\prod_{m=1}^{\infty} (1+x^{2m-1})$	tek ve düzensiz tamsayılar
$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{m^2}}$	kare tamsayılar
$\prod_{p} \frac{1}{1-x^{p}}$	asal tamsayılar
$\prod_{m=1}^{\infty} (1+x^{m})$	düzensiz tamsayılar
$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2m}}$	çift tamsayılar
$\prod_{m=1}^{\infty} (1+x^{2m})$	çift ve düzensiz tam sayılar

(Brown 1961; Mana 1969; Apostol 1976; Koshy 2001).

Üreteç fonksiyonlarından sonra parçalanışlarla ilgili bağıntılar verilebilir.

2004'te Ewell tamsayıların parçalanışları üzerine çalışmalar yaparak parçalanış sayıları için yeni rekürans bağıntıları elde etmiştir.

Teorem 3.7. *n bir doğal sayı olmak üzere*

$$p(n) = \sum_{k=0}^{\infty} p\left(\frac{n-k(k+1)/2}{4}\right) + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}p(n-2k^2)$$

dir (Ewell 2004).

Teorem 3.8. *n bir doğal sayı olmak üzere*

$$p(n) = \sum_{k=0}^{\infty} p\left(\frac{n-k(k+1)/2}{2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\{p(n-k(3k-1)) + p(n-k(3k+1))$$

dir (Ewell 2004).

2016'da Merca'nın çalışmalarında da parçalanış sayıları için özyineleme bağıntısı ifade edilmiştir.

Teorem 3.9. *n doğal sayı olmak üzere,*

$$p(n) - \sum_{k=0}^{\left\|\frac{n}{2}\right\|} \sum_{j=-\infty}^{\infty} p(k)p(\left\|\frac{n}{2}\right\| - k - j(4j-2+(-1)^n)) = 0$$

dır. Burada $\|.\|$ tam değer fonksiyonudur (Merca 2016a).

Parçalanışların sayıları arasındaki bazı bağıntılar Al ve Alkan (2020) tarafından aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

Teorem 3.10. $n > 1$ *pozitif tamsayısı için*

$$Q(n) = \left(\sum_{i=1}^{\|\frac{n}{2}\|} p(i)Q(n-2i) \right) - p(n)$$

dir (Al ve Alkan 2020).

Teorem 3.11. n *pozitif tam sayı olmak üzere*

$$Z(n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i Q(i) Z(n-i)$$

dir (Al ve Alkan 2020).

Teorem 3.12. $n > 1$ *tam sayı olmak üzere*

$$\begin{aligned} Q(2n) &= p(n) + \sum_{\substack{t=1 \\ t,(t-3)\in 4\mathbb{Z}}}^{2n-1} p(n - \frac{1}{4}t(t+1)), \\ Q(2n-1) &= \sum_{\substack{t=1 \\ (t-1),(t-2)\in 4\mathbb{Z}}}^{2n-2} p(\frac{1}{2}(2n-1) - \frac{1}{4}t(t+1)) \end{aligned}$$

dir (Al ve Alkan 2020).

Ayrıca Al ve Alkan (2020), çalışmalarında Euler'in, Ewell'in ve Merca'nın özyineleme bağıntılarına göre çok daha verimli özyineleme bağıntıları elde etmişlerdir.

Sonuç 3.13. n *tek tam sayı olmak üzere*

$$p(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \left[p(n - (2k^2 \pm k)) \right] \tag{3.6}$$

dir (Al ve Alkan 2020).

(3.6) bağıntısında Euler'in rekürans bağıntısı ile aynı adım sayısı gelsede adımlarda hesaplanması gereken sayılar daha küçük geldiği için Euler'in özyineleme bağıntısına göre daha verimlidir.

Teorem 3.14. *n pozitif tamsayısı için*

$$p(n) = \sum_{i=0}^{\|\frac{n}{2}\|} p(i) \left[p(\frac{n}{2} - i) + \sum_{t=0}^{\|\sqrt{n}+1\|} p(\frac{n}{2} - i - \frac{1}{4}t(t+1)) \right] \tag{3.7}$$

dir (Al ve Alkan 2020).

(3.7) bağıntısında hesaplanması gereken sayının parçalanışlarının sayısı Euler'in ve Ewel'in özyineleme bağıntılarına göre çok küçüldüğünden bu rekürans bağıntısının da hem Euler hem de Ewel'in özyineleme bağıntılarından daha etkilidir.

Teorem 3.15. *n pozitif tam sayı olmak üzere*

$$p(n) = \sum_{i=1}^{\|\sqrt{n}\|} p_i(n - i(i+1)) + (-1)^{i+1} p \left(n - \frac{5i^2 \pm 3i}{2} \right) \tag{3.8}$$

dir (Al ve Alkan 2020).

(3.8) özyineleme bağıntısında da hem adım sayısı daha aza indirgendiği hem de ilgilenilecek sayılar daha küçüldüğü için diğer özyineleme bağıntılarına kıyasla daha etkili bir bağıntıdır.

3.1.2. Kısıtlanmış Parçalanışlar İçin Üreteç Fonksiyonu

Andrews (1976) çalışmasında, kısıtlanmış parçalanışlar için üreteç fonksiyonundan da söz etmiştir. $P_{k,d}(n)$, n tamsayısının her biri k tamsayısından küçük eşit olmak üzere en çok d bileşeni olan parçalanışlarını göstersin.

$$P_{k,d}(n) = \{(a_1, a_2, ..., a_k) : a_i \in \mathbb{Z}^+, a_1 + a_2 + ... + a_k = n, a_i \leq k, k \leq d\}$$

Bu durumda

$$n > kd \text{ iken } P_{k,d}(n) = 0$$

ve

$$P_{k,d}(dk) = 1$$

dir. Bu nedenle,

$$H(k, d; x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{k,d}(n) x^n$$

üreteç fonksiyonu, x cinsinden kd dereceli bir polinomdur.

Teorem 3.16. $k, d \geq 0$ *olmak üzere*

$$H(k, d; x) = \frac{(x)_{k+d}}{(x)_k (x)_d}. \tag{3.9}$$

Öyle ki

$$(x)_k = (1-x)(1-x^2)...(1-x^k)$$

dir (Andrews 1976).

İspat Varsayalım ki $g(k, d; x)$ (3.9) ifadesinin sağ tarafı olsun;

$$g(k, 0; x) = g(0, d; x) = 1 \tag{3.10}$$

ve

$$\begin{aligned} g(k, k; x) - g(k, d-1; x) &= \frac{(x)_{k+d+1}}{(x)_k (x)_d} \left[(1 - x^{k+d}) - (1 - x^d)\right] \\ &= \frac{(x)_{k+d-1}}{(x)_k (x)_d} x^d (1 - x^k) \\ &= x^d \frac{(x)_{k+d-1}}{(x)_{k-1} (x)_d} \\ &= x^d g(k-1, d; x). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Diğer yandan

$$P_{k,0}(n) = P_{0,d}(n) = \begin{cases} 1, & k = d = n = 0, \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases} \tag{3.12}$$

Yani

$$H(k, 0; x) = H(0, d; x) = 1. \tag{3.13}$$

Ayrıca, $P_{k,d}(n) - P_{k,d-1}(n)$, n tamsayısının parça sayısını, her biri k den küçük eşit olmak üzere tam d parçaya ayırır.

Bu parçaların her birini, bir parça olan her 1'i silinerek ve 1'den büyük her parçadan 1 çıkarılarak dönüştürülür. $n - d$ tamsayısının ortaya çıkan parçaları en çok d parçaya sahiptir ve her parça $k-1$ den küçük eşittir. Yukarıdaki dönüşüm açıkça tersine çevrilebilir olduğundan, $P_{k,d}(n) - P_{k,d-1}(n)$ ile sıralanan parçalar ile $P_{k-1,m}(n-d)$ tarafından sıralananlar arasında bir eşleştirme oluşturur. Bu nedenle

$$P_{k,d}(n) - P_{k,d-1}(n) = P_{k-1,d}(n-d) \tag{3.14}$$

elde edilir ve bu eşitlik üreteç fonksiyonu ile

$$H(k,d;x) - H(k,d-1;x) = x^d H(k-1,d;x) \tag{3.15}$$

şeklinde ifade edilir. Böylece $g(k,d;x)$ ve $H(k,d;x)$ aynı başlangıç koşullarını (sırasıyla (3.10) ve (3.13)) ve aynı özyineleme tanımları (sırasıyla (3.11) ve (3.15)) sağladığından, aynı olmalıdırlar. Bu nedenle

$$\begin{aligned} H(k,d;x) = g(k,d;x) &= \frac{(1-x^{k+d})(1-x^{k+d-1})...(1-x^{d+1})}{(1-x^k)(1-x^{k-1})...(1-x)} \\ &= \frac{(x)_{k+d}}{(x)_k (x)_d} \end{aligned}$$

(Andrews, 1976). □

3.1.3. Pozitif Bir Tamsayının Düzensiz Parçalanışları

Andrews (1976) çalışmasında n pozitif tamsayısının ayrışımını $H(n)$ ile gösterirken, parçaların bileşenlerinin kısıtlanmış ayrışım kümesini, $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$H_d(n) = \{(a_1, a_2, ..., a_k) = w : a_1 + a_2 + ... + a_k = n, \forall i \text{ için } w \text{ de } a_i \text{ en fazla } d \text{ defa olabilir}\} \tag{3.16}$$

şeklinde göstermiştir. $H_d(n)$ kümesinin eleman sayısı h_d ile gösterilmiştir.

$d = 1$ alınması halinde parçalanışta her a_i yalnız bir defa görüldüğü için bir tamsayının düzensiz (tekrarsız) parçalanışlarının elde edileceği açıktır. O halde Tanım 3.5 ile çakışır.

Teorem 3.17. *n pozitif tam sayı olmak üzere,*

$$f_d(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_d(n) x^n. \tag{3.17}$$

$|x| < 1$ için

$$\begin{aligned} f_d(x) &= \prod_{n \in \mathbb{Z}^+} (1 + x^n + ... + x^{dn}) \\ &= \prod_{n \in \mathbb{Z}^+} (1 - x^{(d+1)n})(1 - x^n)^{-1} \end{aligned} \tag{3.18}$$

(Andrews 1976).

İspat $f_d(x)$ için iki formun eşdeğerliği, sonlu bir geometrik serinin toplamı için

$$1+x+x^2+...+x^r=\frac{1-x^{r+1}}{1-x}$$

formülünden çıkar. İspatı (3.1) eşitliğinin ispatına benzer olarak yapılmaktadır.

$\{h_1,h_2,h_3,...\}\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\prod_{n\in\mathbb{Z}^+}(1-x^n)^{-1} &= \prod_{n\in\mathbb{Z}^+}(1+x^n+x^{2n}+x^{3n}+...)\\ &= (1+x^{h_1}+x^{2h_1}+x^{3h_1}+...)(1+x^{h_2}+x^{2h_2}+x^{3h_2}+...)\\ &\quad (1+x^{h_3}+x^{2h_3}+x^{3h_3}+...)...\\ &= \sum_{a_1\geq 0}\sum_{a_2\geq 0}\sum_{a_3\geq 0}...x^{a_1h_1+a_2h_2+a_3h_3+...}.\end{aligned}$$

x in üssünün sadece $(h_1^{a_1}h_2^{a_2}h_3^{a_3}...)$ parçalanışı olduğu gözlemlenir. Bu nedenle, n tamsayısının pozitif tamsayılar kümesinden alınan parçalara her bölümü için yukarıdaki toplamada bir kez $x^{\mathbb{Z}^+}$ oluşacaktır. Böylece

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}H(n)x^n.$$

(3.18) eşitliğinin ispatı, (3.1) eşitliğinin ispatı ile aynıdır, tek fark, sonsuz geometrik serinin yerini sonlu geometrik serinin almasıdır,

$$\begin{aligned}\prod_{n\in H}(1+x^n+x^{2n}+x^{3n}+...+x^{dn}) &= \sum_{d\geq a_1\geq 0}\sum_{d\geq a_2\geq 0}\sum_{d\geq a_3\geq 0}...x^{a_1h_1+a_2h_2+a_3h_3+...}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}h_d(n)x^n.\end{aligned}$$

Sonsuz çarpım n ile sınırlandırılabilir. Bu kesilmiş çarpım, parçaları $h_1,h_2,h_3,,...,h_n$ arasında olan parçalanışları oluşturacaktır. Yalnızca sonlu sayıda yakınsak seriler söz konusu olduğundan, çarpma artık gerçekleştirilebilir. $0<x<1$ varsayılırsa; $M=h_n$,

$$\sum_{j=0}^{M}H(j)x^j\leq\prod_{i=1}^{n}(1-x^{h_i})^{-1}\leq\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^{h_i})^{-1}<\infty.$$

Bu nedenle, $\sum_{j=0}^{M}H(j)x^j$ kısmi toplamlarının dizisi sınırlı bir artan dizidir ve bu nedenle yakınsaktır. Diğer yandan $n\to\infty$,

$$\sum_{j=0}^{\infty}H(j)x^j\geq\prod_{i=1}^{n}(1-x^{h_i})^{-1}\to\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^{h_i})^{-1}.$$

Böylece

$$\sum_{j=0}^{\infty} H(j)x^j = \prod_{i=1}^{\infty}(1-x^{h_i})^{-1} = \prod_{n\in H}(1-x^n)^{-1}.$$

Benzer şekilde (3.18) ifadesinin de ispatı yapılabilir (Andrews 1976). □

Sonuç 3.18. *n pozitif tamsayının bileşenleri düzensiz (tekrarsız) tam sayı olan parçalanış sayısı ile bileşenleri tek tam sayı olan parçalanışlarının sayısı eşittir.*

İspat n pozitif tamsayının bileşenleri düzensiz (tekrarsız) tam sayı olan parçalanış sayısı ile bileşenleri tek tam sayı olan parçalanışlarının sayısının eşit olduğunu görmek için

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n-1})^{-1} = \prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n)$$

elde edilmelidir. $(1-x^{2n}) = (1-x^n)(1+x^n)$ eşitliği göz önünde bulundurulduğunda

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x^{2n})}{(1-x^n)} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x^{2n})}{(1-x^{2n})\,(1-x^{2n-1})} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2n-1}}$$

ifadesi elde edilerek ispat tamamlanır. □

3.2. Pozitif Bir Tamsayının Kompozisyonları

Pozitif bir n tam sayısının, kompozisyon sayısı Gupta (1970) tarafından formülize edilmiştir.

Teorem 3.19. *n pozitif tamsayısının kompozisyonlarının toplam sayısı*

$$P(n) = 2^{n-1}$$

dir (Gupta 1970).

İspat n tamsayısının parçalanışları iki başlık altında sınıflandırılabilir:

i) Birinci parçası 1 olanlar,

ii) Birinci parçası > 1 olanlar.

Birinci ifade n tamsayısının her bölümünden 1 olan parçasını kaldırarak, $(n-1)$ tamsayısının tüm farklı parçalanışları bir kez elde edilir. İkinci ifade parçalanışlardaki ilk bileşeni 1 azaltarak, yine $(n-1)$ tamsayısının parçalanışları elde edilir. Bu nedenle, n

tamsayısının parçalanış sayısı, $(n-1)$ tamsayısının parçalanış sayısının iki katıdır ve sonuç, tümevarımdan elde edilir (Gupta 1970). $\square$

Kombinatorikte, n tamsayısının k bileşenli kompozisyonlarının sayısıyla ilgili klasik bir sonuç, polinom veya kuvvet serisinin x^n katsayısı ile verilir (Hoggat ve Lind 1968; Agarwal 1987; Agarwal 2000; Heubach ve Mansour 2004; Heubach ve Mansour 2010; Shapcott 2012; Gessel ve Li 2013; Archibald vd. 2020).

Hoggat ve Lind, binomial özelliklerini kullanarak bir tam sayı kompozisyonu ile Fibonacci sayıları arasındaki ilişkiyi araştırmışlardır ve

(i) F_n bir n tamsayının tek kompozisyonlarının sayısı

(ii) F_{2n} bir n tamsayısının tüm kompozisyonları üzerindeki parçaların çarpımlarının toplamı, yani

$$F_{2n} = \sum_{a_1+a_2+...+a_k=n} a_1 a_2 ... a_k \tag{3.19}$$

şeklinde olduğunu kanıtlamışlardır.

Son yıllarda yapılan çalışmalarda, bir m tamsayısının n-renk kompozisyonu (veya renk kompozisyonları), bir kompozisyonun n boyutundaki parçasının n rengini alabileceği m kompozisyonu olarak tanımlanmaktadır (Agarwal 1987; Agarwal 2000; Shapcott 2012).

Yani 1 tam sayısı bir renk alabilirken, 2 tamsayısı 2_1 ve 2_2 olmak üzere iki renk alabilmektedir. O halde (3.19) eşitliğinden, bir m tamsayının n-renk kompozisyonlarının sayısının F_{2m}, $2m$. Fibonacci sayısı olduğu açıktır.

3 tamsayısının sekiz tane n-renk kompozisyonu vardır. Bu n-renk kompozisyonlar;

$$(3_1), (3_2), (3_3), (2_1, 1_1), (2_2, 1_1), (1_1, 2_1), (1_1, 2_2), (1_1, 1_1, 1_1)$$

şeklindedir.

Palindrom kompozisyon, soldan sağa ve sağdan sola okunup okunmadığına bakılmaksızın parça dizisi aynı olan bir kompozisyondur.

Örnek 3.20. 5 *tamsayısının palindrom kompozisyonları*

$$\begin{array}{lllll} 5 & & & & \\ 1 & 3 & 1 & & \\ 2 & 1 & 2 & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

şeklindedir.

Heubach ve Mansour (2004) bir n tamsayısının $2^{\left\|\frac{n}{2}\right\|}$ palindromu olduğunu göstermişlerdir. Shapcott (2012), bir n tamsayının renk palindromlarının sayısının formülünü araştırmıştır.

Tanım 3.21. ν *tamsayısının S-sınırlı bir C-renk kompozisyonunu, parçaları belirli bir S kümesinde olan ve n tamsayısının bir parçasının $c_n \in C = \{c_1, c_2, ..., c_\nu\}$ renklerini aldığı kompozisyonlardır. Burada $n = 1, ..., \nu$ için $c_n \in \mathbb{Z}^+$. Tüm bu tür kompozisyonların kümesi $C_\nu(S, C)$ ile gösterilmiştir. $S = \mathbb{Z}^+$ ise, $C_\nu(C)$ yazılmış; eğer $S = \mathbb{Z}^+$ ve $C = \{1, ..., \nu\}$ ise C_ν yazılmıştır. C ve S için herhangi bir kısıtlama yapılmamıştır (Shapcott, 2012).*

Tanımı verdikten sonra Shapcott çalışmasında $P_\nu(C)$, ν tamsayısının C-renk palindromlarının kümesi olmak üzere ve P_ν de ν tamsayısının n-renk palindromlarının kümesi olmak üzere ν tamsayısının C-renk palindromlarının sayısını

$$|P_\nu(C)| = \begin{cases} c_\nu + \displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{\nu-1}{2}} c_{\nu-2k} \left|C_k(C)\right|, & \nu \text{ tek;} \\ c_\nu + \displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{\nu-2}{2}} c_{\nu-2k} \left|C_k(C)\right| + \left|C_{\frac{\nu}{2}}(C)\right|, & \nu \text{ çift} \end{cases}$$

şeklinde göstermiştir. Bu ifadenin sonucu olarak da ν tamsayısının n-renk palindromlarının sayısı için

$$|P_\nu| = \begin{cases} F_\nu + 2F_{\nu-1}, & \nu \text{ tek;} \\ 3F_\nu, & \nu \text{ çift} \end{cases}$$

eşitliğini göstermiştir. ν tamsayısının tüm C-renk palindromları üzerindeki toplam parçalanış sayısının

$$\hat{N}_\nu(C) = \begin{cases} c_\nu + \sum_{k=1}^{2} c_{\nu-2k}\left(|C_k(C)| + 2N_k(C)\right), & \nu \text{ tek;} \\ c_\nu + \sum_{k=1}^{\frac{\nu-2}{2}} c_{\nu-2k}\left(|C_k(C)| + 2N_k(C)\right) + 2N_{\frac{\nu}{2}}(C), & \nu \text{ çift} \end{cases}$$

olduğunu da göstermiştir. Bu ifadenin bir sonucu olarak da ν tamsayısının tüm n-renk palindromları üzerindeki toplam parçalanış sayısını

$$\hat{N}_\nu = \begin{cases} \nu F_\nu, & \nu \text{ tek;} \\ \frac{3\nu+2}{5} F_\nu + \frac{6\nu}{5} F_{\nu-1}, & \nu \text{ çift} \end{cases}$$

eşitliğiyle göstererek parçalanış teorisine katkıda bulunmuştur.

Gessel ve Li (2013), çalışmasında Fibonacci sayıları için formülleri kompozisyonlar yerine toplamlar olarak incelemişlerdir. n tamsayısının bileşenleri 1 ve 2 olan kompozisyonlarının sayısının F_{n+1} Fibonacci sayısı olduğunu göstermişlerdir.

Örnek 3.22. $n = 4$ *için kompozisyon kümesi*

$$\{4, (3,1), (1,3), (2,2), (2,1,1), (1,2,1), (1,1,2), (1,1,1,1)\}$$

dir. Buradan da görüldüğü gibi bileşenleri 1 *ve* 2 *olan parçalanışların sayısı* $F_5 = 5$.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar verilecektir.

4.1. Kompozisyonlar İçin Elde Edilen Sonuçlar

Gupta (1970) çalışmasında bir n tamsayısının kompozisyon sayısını 2^{n-1} ile elde ettiği önceki bölümlerde ifade edilmiştir. Bu bölümde ilk önce pozitif bir tamsayının kompozisyon sayısını veren ifadenin ispatı farklı bir yöntemle yapılacaktır. Bu teoremin ispatı için öncelikle kompozisyonların, sınırlı parçalanışlarının sayısını veren formül ifade edilecektir.

Teorem 4.1. *k,n pozitif tamsayılar olmak üzere, n sayısının k tane bileşeni olan kompozisyonlarının sayısı*

$$P_k(n) = \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}$$

dir.

İspat n pozitif tamsayısını

$$a_1 + a_2 + ... + a_k = n$$

olacak şekilde parçalanışlara ayıralım. Böylece sayı ilk etapta k bileşenden oluşur, toplamlar 0'dan büyük olmalıdır. Bu nedenle hepsine 1 verilir. Asıl sorun kalan $(n-k)$ bileşenin yani $n-k$ tane 1 tamsayısının k bileşen arasında nasıl dağıtılabileceğidir. Bu kalan bileşenleri k bileşene dağıtabilmek (bölebilmek) için $(k-1)$ ayraç (nokta) kullanılmalıdır (noktalar aynı). Artık tekrarlı permütasyon kullanarak $P_k(n)$ bulunabilir. Toplamda dağıtılması gereken $(n-k)$ bileşen yani $n-k$ tane 1 ve $(k-1)$ nokta olduğundan tekrarlı permütasyon uygulanır. Böylece

$$P_k(n) = \frac{(n-k+k-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}$$

elde edilir. □

Örnek 4.2. 5 *sayısının* 3 *bileşenli kompozisyonları*

$$\{(3,1,1),(1,3,1),(1,1,3),(2,2,1),(1,2,2),(2,1,2)\}$$

şeklindedir. Bu kompozisyonların sayısı

$$P_3(5) = \frac{(5-1)!}{(5-3)!(3-1)!} = 6$$

dır.

Bileşen sayısı kısıtlanmış kompozisyonların da kaç tane olduğu bulunabildiğinden bu formül yardımı ile kompozisyon sayısını veren ifadenin Gupta (1970) kaynağında yapılan ispattan farklı bir ispat verilebilir;

Teorem 4.3. *n pozitif tam sayı olmak üzere, kompozisyonlarının sayısı*

$$P(n) = 2^{n-1}$$

dır.

İspat n pozitif tam sayı olmak üzere,

$$\begin{aligned} P(n) &= \sum_{k=1}^{n} P_k(n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1} \end{aligned}$$

elde edilir. □

Bu tez çalışmasındaki amaçlardan biri de Fibonacci sayıları ile pozitif tamsayıların ayrışımı arasında bağıntı kurabilmek için yeni kümeler tanımlamaktır.

n pozitif tam sayı olmak üzere,

$$P_n = \left\{(a_1, a_2, ..., a_t) : \ a_1 + a_2 + ... + a_t = n, \quad a_i, t \in \mathbb{Z}^+\right\}.$$

kümesi tanımlansın.

P_n kümesinin elemanlarının n tamsayısının kompozisyonu olduğu açıktır. Ardışık iki küme arasında bağıntı kurulabilmesi için P_n kümesinde;

$a = (a_1, a_2, ..., a_t) \in P_n$ olmak üzere

$$(1 \odot a) = (1, a_1, a_2, ..., a_t)$$

$$(1 \oplus a) = (a_1 + 1, a_2, ..., a_t)$$

şeklinde tanımlansın. Bu tanımlar yardımıyla aşağıdaki kümeler de tanımlanabilir;

$$1 \oplus P_n = \{1 \oplus a : a \in P_n\}$$

$$1 \odot P_n = \{1 \odot a : a \in P_n\}.$$

Aşağıdaki teorem P_{n+1} için bir karakterizasyon verecektir.

Teorem 4.4. *n pozitif tam sayı olmak üzere,*

$$P_{n+1} = (1 \oplus P_n) \cup (1 \odot P_n) \tag{4.1}$$

ve

$$(1 \oplus P_n) \cap (1 \odot P_n) = \emptyset \tag{4.2}$$

dir.

İspat Her n pozitif tamsayısı için $(1 \oplus P_n)$ ve $(1 \odot P_n)$ kümelerinin ayrık olduğu açıktır. Şimdi $a \in P_n$ olsun. $b = 1 \oplus a$, $b = 1 \odot a \in P_{n+1}$, böylece

$$(1 \oplus P_n) \cup (1 \odot P_n) \subseteq P_{n+1}.$$

$b = (b_1, b_2, ..., b_k) \in P_{n+1}$ alalım ve $b_1 + b_2 + ... + b_k = n + 1$.
$b_1 \neq 1$ ise $i \in \{2, ..., k\}$ olmak üzere $c_1 = b_1 - 1$, $c_i = b_i$. Böylece $c_1 + c_2 + ... + c_k = n$ olduğundan $c = (c_1, c_2, ..., c_k) \in P_n$ ve $b = 1 \oplus c \in (1 \oplus P_n)$.
$b_1 = 1$ ise $i \in \{2, ..., k\}$ olmak üzere $c_{i-1} = b_i$. Böylece $c_1 + c_2 + ... + c_{k-1} = n$ olduğundan $c = (c_1, c_2, ..., c_{k-1}) \in P_n$ ve $b = 1 \odot c \in (1 \odot P_n)$. Buradan

$$P_{n+1} = (1 \oplus P_n) \cup (1 \odot P_n)$$

elde edilir. □

Örnek 4.5. *$n = 3$ için $P_3 = \{(3), (1, 2), (2, 1), (1, 1, 1)\}$ olduğu bilinmektedir.*

$$(1 \odot P_3) = \{(1, 3), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 1, 1, 1)\}$$

ve

$$(1 \oplus P_3) = \{(4), (2, 2), (3, 1), (2, 1, 1)\}.$$

Buradan

$$\begin{aligned}(1 \oplus P_3) \cup (1 \odot P_3) &= \{(4), (2,2), (3,1), (2,1,1), (1,3), (1,1,2), (1,2,1), (1,1,1,1)\} \\ &= P_4.\end{aligned}$$

n pozitif bir tam sayı olsun. $(1 \oplus P_n)$ ve $(1 \odot P_n)$ öğelerinin sayısının eşit olduğu açıktır. Yani $|(1 \oplus P_n)| = |(1 \odot P_n)|$. Böylece $|P_{n+1}| = 2\,|(1 \odot P_n)|$ dir. $P_2 = 2$ den itibaren tümevarım metoduyla

$$|P_{n+1}| = 2^n \tag{4.3}$$

olduğu görülür. O halde (4.1) eşitliğinden yararlanılarak n pozitif tamsayısının kompozisyon sayısını veren ifade elde edilir.

Yukarıda ifade edilen (4.1) eşitliğinin genellemesi yapılabilir.

n, l pozitif tamsayılar ve $a \in P_n$ olmak üzere

$$(l \odot a) = (l, a_1, a_2, ..., a_t)\,,$$

$$(l \oplus a) = (a_1 + l, a_2, ..., a_t)\,.$$

işlemleri tanımlanabilir. Kümeler için $l \oplus P_n$, $l \odot P_n$ notasyonları kullanılarak,

$$l \oplus P_n = \{l \oplus a : a \in P_n\}$$

$$l \odot P_n = \{l \odot a : a \in P_n\}$$

kümeleri elde edilir.

Teorem 4.6. *n, r pozitif tamsayılar $(r \leq n)$ olsun. O halde $i \in \{1, \ldots, r\}$ olmak üzere P_n kümesi $(i \odot P_{n-i})$ ve $(r \oplus P_{n-r})$ kümelerinin ayrık birleşimidir.*

$$P_n = (\cup_{i=1}^{r}(i \odot P_{n-i})) \cup (r \oplus P_{n-r})$$

dir.

İspat $P_n \subseteq (\cup_{i=1}^{r}(i \odot P_{n-i}) \cup (r \oplus P_{n-r})$ olduğunu göstermek yeterlidir. $x = (a_1, \ldots, a_m) \in P_n$ olsun. $a_1 \leq r$ ise $x \in \cup_{i=1}^{r}(i \odot P_{n-i})$. $r < a_1$ olduğu varsayılsın. O halde $b = a_1 - r$ ve $y = (b, a_2, a_3, \ldots, a_m) \in P_{n-r}$. $x = r \oplus y \in (r \oplus P_{n-r})$ olduğu görülür. $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$ için $(r \oplus P_{n-r}) \cap (i \odot P_{n-i}) = \varnothing$. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Şimdi bir tamsayının kompozisyonlarını yazan algoritmayı verelim.

Algoritma 1 n pozitif tamsayısının kompozisyonlarının $P[\_][\_]$ kümesini döndüren algoritmadır.

---

procedure **COMP**($P[\_][\_]$: tamsayıların matrisi; n: negatif olmayan tamsayı)
    Local variables: $d, j, l, A[\_][\_]$;
    $j, e \leftarrow 0$;
    if $n = 0$ **then**
        $P[0][0] \leftarrow 1$;
        $P[0][1] \leftarrow 0$;
    else
        COMP(n-1);
        $d \leftarrow$ **power**$(2, n-1)$;
        for all j in $\{0, 1, \ldots, d\}$ **do**
            $l \leftarrow 0$;
            while $0 < P[j][l+1]$ **do**
                $A[j][l+1] \leftarrow P[j][l]$;
                $A[d+j][l+1] \leftarrow P[j][l+1]$;
                $l++$;
            end while
            $A[j][0] \leftarrow 1$;
            $A[d+j][0] \leftarrow 1 + P[j][0]$;
            $A[j][l+1] \leftarrow P[j][l]$;
            $A[d+j][l+1] \leftarrow 0$;
            $A[d+j][l+2] \leftarrow 0$;
        end for
        $P \leftarrow A$
    end if
end procedure

İmplementasyon 1: Herhangi bir pozitif tamsayının kompozisyonu için bir C++ implementasyonu ve örnek olarak 6 tamsayısının kompozisyonlarının bulunması.

```
%% C++ code
#include <iostream>
#include <stdlib.h>
#include <windows.h>
using namespace std;
int P[100000][100];
int A[100000][100];
long us(int s) {
        long u=1;
        for(long  j=1;j<=s;j++) {u=2*u;}
        return u;
}
void aktarP(int n){
        for (long j=0; j<=us(n);j++){
                for (int l=0; l<=10;l++) {P[j][l]=A[j][l];}
        }
}
void YAZ (int c) {
        cout<<"\n The composition set of the integer "<<c
           +1<<" \n\n " ;
        long d=us(c);
        for (int j=0; j<d;j++){
                cout<<"("<<P[j][0];
                int l=1;
                while (0<P[j][l+1] && 0!= P[j][l]) {cout
                   <<","<<P[j][l];l++;}
                if (0!= P[j][l]) {cout<<","<<P[j][l]<<") \n
                    ";}
```

```
                else {cout<<") \n  ";}
                        }
                        }
void comp(int n){ int f;
if (n==0){P[0][0]=1;P[0][1]=0;}
else { comp(n-1);
long d=us(n-1);

for (int j=0; j<d;j++){ ;
        int l=0;
        while (0<P[j][l+1])  {
                int e=P[j][l+1];
                A[j][l+1]=P[j][l];
                A[d+j][l+1]=e;
                l++;   }
        A[j][0]=1;
        A[d+j][0]=1+P[j][0];
        A[j][l+1]=P[j][l];
        A[d+j][l+1]=0;
        A[d+j][l+2] =0;}
aktarP(n);
}
}
int main() { int i=3;
//P[0][0]=1;P[0][1]=0;
int m=5;
// for (int i=1;i<=m;i++) {comp(i);}
//YAZ1(m);
comp(m);
YAZ(m);
}
```

Çarpım Fonksiyonu Bir n tamsayısının kompozisyon kümesini kullanarak, $n = a_1 + ... + a_t$ için $\bar{a} = a_1.a_2.a_3...a_t$ notasyonunu tanımlanabilir. P_n kompozisyon kümesindeki her bir kompozisyonun bileşenlerinin çarpımları toplamı

$$T_n := T(P_n) = \sum_{a \in P_n} \bar{a}$$

notasyonu ile gösterilsin. $T_0 = 1$ kabul edilir. $T_n = T(P_n)$ için P_n kompozisyon kümesi üzerinde çarpma toplamı (veya n tamsayısının parçalanışlarının bileşenlerinin çarpımlarının toplamı) olarak adlandırılır. Yeni notasyonlar için sayısal bir örnek verilirse;

Örnek 4.7. *$n = 4$ için $P_4 = \{(4), (1,1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (2,1,1), (2,2), (3,1), (1,3)\}$ ve $T_4 = T(P_4) = 21$. Ayrıca*

$$\begin{aligned} 1 \odot P_4 &= \{(1,4), (1,1,1,1,1), (1,1,1,2), (1,1,2,1), (1,2,1,1), (1,2,2), \\ &\quad (1,3,1), (1,1,3)\}, \end{aligned}$$

$$1 \oplus P_4 = \{(5), (2,1,1,1), (2,1,2), (2,2,1), (2,3), (3,1,1), (3,2), (4,1)\}$$

ve böylece $P_5 = (1 \odot P_4) \cup (1 \oplus P_4)$. Buradan $T_5 = T(P_5) = 55$ elde edilir.

Tanımlanan fonksiyon ile Fibonacci sayıları arasındaki aşağıdaki gözlem yapılabilir:

Örnek 4.8. *$n = 1$ için $P_1 = \{(1)\}$ ve $T_1 = 1 = F_2$.*

$n = 2$ için $P_2 = \{(2), (1,1)\}$ ve $T_2 = 3 = F_4$.

$n = 3$ için $P_3 = \{(3), (1,1,1), (1,2), (2,1)\}$ ve $T_3 = 8 = F_6$.

Ayrıca

$$1 \odot P_3 = \{(1,3), (1,1,1,1), (1,1,2), (1,2,1)\}$$

$$1 \oplus P_3 = \{(4), (2,1,1), (2,2), (3,1)\}$$

ve böylece $P_4 = (1 \odot P_3) \cup (1 \oplus P_3)$. Buradan $T_4 = 21 = F_8$.

(4.1) eşitliğinden yararlanılarak kompozisyon kümelerinin çarpım toplamı için bir özyineleme bağıntısı elde edilmiştir;

Önerme 4.9. *n pozitif tamsayısı için,*

$$T_{n+1} = T_n + \sum_{i=0}^{n} T_{n-i}. \tag{4.4}$$

İspat $a \in P_{n+1}$ için, $\overline{a} = \overline{1 \odot b} = \overline{b}$ veya $\overline{a} = \overline{1 \oplus b}$ olacak şekilde $b = (b_1, b_2, ..., b_l) \in P_n$ vardır ve böylece $\overline{a} = \overline{1 \odot b} = \overline{b}$ veya $\overline{a} = \overline{1 \oplus b} = (b_2....b_l) + \overline{b}$. Dolayısıyla

$$T(1 \odot P_n) = \sum_{1 \odot b \in 1 \odot P_n} \overline{b} = T_n.$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned} T(1 \oplus P_n) &= \sum_{a \in P_n} (1 + a_1).a_2.a_3...a_t \\ &= \sum_{a \in P_n} (a_1.a_2.a_3...a_t) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{(a_2.a_3...a_t) \in P_{n-i}} (a_2 a_3 ... a_t) \\ &= T_n + \sum_{i=1}^{n} T_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} T_{n-i}. \end{aligned}$$

Bu nedenle

$$T_{n+1} = T(P_{n+1}) = T(1 \odot P_n) + T(1 \oplus P_n) = T_n + \sum_{i=0}^{n} T_{n-i}$$

dir. □

Örnek 4.10. $n = 4$ *için*

$$\begin{aligned} T_5 &= T_4 + \sum_{i=0}^{4} T_{4-i} \\ &= T_4 + T_4 + T_3 + T_2 + T_1 + T_0 \\ &= 21 + 21 + 8 + 3 + 1 + 1 \\ &= 55 \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.11. n *pozitif tamsayısı için*

$$F_{2n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n} F_{2i} \tag{4.5}$$

$$F_{2n} = n + \sum_{i=1}^{n-1} (n - i) F_{2i}. \tag{4.6}$$

İspat (4.4) eşitliğinde,

$$T_{n+1} = T_n + \sum_{i=0}^{n} T_{n-i}$$

özyineleme bağıntısı elde edilmiştir ve böylece $T_{n+1} = T_0 + T_n + \sum_{i=1}^{n} T_i$. Buradan, (3.19) eşitliği ile

$$F_{2(n+1)} = 1 + F_{2n} + \sum_{i=0}^{n} F_{2(n-i)}$$

elde edilir. Ayrıca $F_{2n+1} = F_{2n+2} - F_{2n}$, olduğundan (4.5) eşitliğinin ispatı da tamamlanır.

(4.6) eşitliğini elde edebilmek için i pozitif tam sayı olmak üzere

$$(i \odot P_{n-i}) = \{(i, a_1, a_2, ..., a_t) : a_1 + a_2 + ... + a_t = n - i, \quad a_i, t \in \mathbb{Z}^+\}$$

kümesi tanımlanır.

$$P_n = \cup_{i=1}^{n} (i \odot P_{n-i})$$

$i \neq j$ olmak üzere tüm i, j tamsayıları için $(i \odot P_{n-i}) \cap (j \odot P_{n-j}) = \varnothing$ dir. Buradan çarpım fonksiyonu ile

$$T\,(i \odot P_{n-i}) = \sum_{(a_1,a_3...a_t)\in P_{n-i}} i.a_1.a_3...a_t = iT(P_{n-i}) = iT_{n-i}$$

elde edilir. Böylece

$$T_n = T(P_n) = \sum_{i=1}^{n} T\,(i \odot P_{n-i}) = \sum_{i=1}^{n} iT_{n-i} = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)T_i$$

elde edilerek ispat tamamlanır. □

(4.4) ve (4.5) eşitliklerinden T_n çarpım fonksiyonu için üreteç fonksiyonu elde edilebilir.

Teorem 4.12. *Çarpım fonksiyonunun ürettiği $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ sayı dizisinin üreteç fonksiyonu*

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n x^n = \frac{x}{1 - 3x + x^2}$$

dir.

İspat $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n x^n$ olsun.

$$h(x) \;=\; x + \sum_{n=1}^{\infty} T_{n+1} x^{n+1}$$

(4.4) eşitliğiyle

$$\begin{aligned} h(x) &= x + x\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n + \sum_{i=0}^{n} T_{n-i}\right)x^n \\ &= x + x\sum_{n=1}^{\infty} T_n x^n + x\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} T_{n-i}x^n \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan gerekli aritmetik işlemlerle

$$\begin{aligned} h(x) &= x + xh(x) + x\left(T_1x + T_0x + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} T_{n-i}x^n\right) \\ &= x + xh(x) + x\left(x + x + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} T_{n-i}x^{n+1}\right) \\ &= x + xh(x) + x\left(2x + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n+1} T_{n+1-i}x^{n+1}\right) \\ &= x + xh(x) + 2x^2 + x\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_{n+1}x^{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} T_{n+1-i}x^{n+1}\right) \\ &= x + xh(x) + 2x^2 + x\sum_{n=1}^{\infty} T_{n+1}x^{n+1} + x\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} T_{n-i}x^{n+1} \\ &= x + xh(x) + 2x^2 + x\sum_{n=1}^{\infty} T_{n+1}x^{n+1} + x\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_{n+1} - T_n\right)x^{n+1} \\ &= x + xh(x) + 2x^2 + x\sum_{n=1}^{\infty} T_{n+1}x^{n+1} + x\sum_{n=1}^{\infty} T_{n+1}x^{n+1} - x\sum_{n=1}^{\infty} T_n x^{n+1} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} h(x) &= x + xh(x) + 2x^2 - x^2h(x) + 2x\sum_{n=2}^{\infty} T_n x^n \\ &= x + xh(x) + 2x^2 - x^2h(x) + 2x\left(\sum_{n=2}^{\infty} T_n x^n + T_1x - T_1x\right) \\ &= x + xh(x) + 2x^2 - x^2h(x) + 2xh(x) - 2xT_1x \\ &= x + xh(x) - x^2h(x) + 2xh(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$h(x)\left(1 - x + x^2 - 2x\right) = x$$

dir. Böylece

$$h(x) = \frac{x}{1 - 3x + x^2}$$

elde edilirek ispat tamamlanır. □

Çift indisli Fibonacci sayılarını veren üreteç fonksiyonunun da

$$\frac{x}{1-3x+x^2} = x + 3x^2 + 8x^3 + 21x^4 + 55x^5 + 144x^6 + ...$$

olduğu bilinmektedir (Hoggat ve Lind 1968).

O halde n pozitif tamsayısı için $T_n = F_{2n}$ olduğu gösterilebilir. Yani, tüm n pozitif tamsayıları için kompozisyonlarının, çarpımlarının toplamının çift indisli Fibonacci sayılarını verdiği görülür.

Önerme 4.13. *$m, n, k \in \mathbb{N},\ t, y \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{C}$ ve $G_j(t, y; k, m, n)$ genelleştirilmiş çift değişkenli polinom olmak üzere*

$$T_n = G_{n-1}(3, -1; 1, 1, 1)$$

dir.

İspat Özdemir ve Şimşek (2016)'da verilen

$$\frac{1}{1-t^k x - y^m x^{m+n}} = \sum_{j=0}^{\infty} G_j(t, y; k, m, n)x^j \tag{4.7}$$

üreteç fonksiyonunda $t = 3, k = 1, m = 1, y = -1$ ve $n = 1$ alınırsa

$$\frac{1}{1-3x+x^2} = \sum_{j=0}^{\infty} G_j(3, -1; 1, 1, 1)x^j$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{j=1}^{\infty} T_j x^j = \frac{x}{1-3x+x^2} = x\sum_{j=0}^{\infty} G_j(3, -1; 1, 1, 1)x^j.$$

Dolayısıyla $n \geq 1$ tamsayısı için,

$$T_n = G_{n-1}(3, -1; 1, 1, 1)$$

bağıntısı elde edilir. □

Fibonacci sayıları ve Lucas sayıları ile ilgili yeni bağıntılar elde etmek için P_n incelenmeye devam edilecektir. $i \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$(i \odot P_{n-i}) = \{(i, a_1, a_2, ..., a_t) : a_1 + a_2 + ... + a_t = n - i, \quad a_i, t \in \mathbb{Z}^+\}.$$

$$P_n = \cup_{i=1}^{n} (i \odot P_{n-i})$$

ve her i, j pozitif tamsayısı için burada $i \neq j$ olmak üzere, $(i \odot P_{n-i})$ ve $(j \odot P_{n-j})$ kümelerinin ayrık kümelerdir. Buradan

$$T(i \odot P_{n-i}) = \sum_{(a_1,a_2,a_3...a_t)\in P_{n-i}} i.a_1.a_2.a_3...a_t = iT(P_{n-i}) = iT_{n-i}$$

ve böylece

$$T_n = T(P_n) = \sum_{i=1}^{n} T(i \odot P_{n-i}) = \sum_{i=1}^{n} iT_{n-i} = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)T_i \tag{4.8}$$

elde edilir. Teorem 4.11 de elde edilen

$$F_{2n} = n + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)F_{2i}.$$

eşitliğinin bir ispatı da $T_n = F_{2n}$ ifadesi ve (4.8) eşitliği kullanılarak görülebilir.

Çarpım fonksiyonu yardımıyla elde edilen Fibonacci sayıları için (4.5) ve (4.6) eşitlikleri yardımıyla yeni özyineleme bağıntıları elde edilebilir.

Teorem 4.14. $n > 1$ *için*

$$\begin{aligned} F_{2n+1} &= 1 + 2n - F_{2n} + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)F_{2i+2}, & (4.9) \\ F_{2n+2} &= 2n + 1 + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)F_{2i+2}. & (4.10) \end{aligned}$$

İspat (4.6), (4.5) eşitlikleri ve

$$F_{2n+1} = F_{2n} + F_{2n-1} \tag{4.11}$$

özyineleme bağıntısı kullanılarak

$$\begin{aligned} F_{2n+1} &= \left(n + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)F_{2i} \right) + \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} F_{2i} \right) \\ &= 1 + n + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i+1)F_{2i} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan indis düzenlemesi yapılarak

$$\begin{aligned} F_{2n+1} &= 1+n+\sum_{i=0}^{n-2}(n-i)F_{2i+2} \\ &= 1+2n+\sum_{i=1}^{n-2}(n-i)F_{2i+2} \\ &= 1+2n-F_{2n}+\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)F_{2i+2} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (4.9) eşitliği ispat edilmiş olur. Ayrıca (4.11) özyineleme bağıntısından (4.10) eşitliği de görülebilir. □

Teorem 4.15. *n ve r pozitif tamsayılar olmak üzere*

$$F_{2n+r} = F_r F_{2n+1} + F_{r-1} F_{2n}$$

dir (Koshy 2001).

İspat (4.6) eşitliğinden,

$$F_{2n+2} = 1+n+F_{2n}+\sum_{i=1}^{n-1}(n-i+1)F_{2i}$$

dir. Teorem 4.11 den

$$F_{2n+3} = F_{2n+1}+F_{2n+2} = n+2+2F_{2n}+\sum_{i=1}^{n-1}(n-i+2)F_{2i}$$

olduğu gözlemlenir. Aynı şekilde devam edilirse r tamsayısı için,

$$\begin{aligned} F_{2n+r} &= F_r(F_{2n}+1)+nF_{r-1}+\sum_{i=1}^{n-1}F_{2i}\left[(n-i)F_{r-1}+F_r\right] \\ &= F_r(F_{2n}+1)+nF_{r-1}+\left[F_{r-1}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)F_{2i}+F_r\sum_{i=1}^{n-1}F_{2i}\right] \\ &= F_r+nF_{r-1}+\left[F_{r-1}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)F_{2i}+F_r\sum_{i=1}^{n}F_{2i}\right] \\ &= F_rF_{2n+1}+F_{r-1}F_{2n} \end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 4.15 yardımıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir.

Sonuç 4.16. n, m *pozitif tamsayılar olmak üzere*

$$F_{n+m} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n,$$

$$F_{n+m+1} = F_{m+1} F_{n+1} + F_m F_n$$

dir (Koshy 2001).

Sonuç 4.17. n *pozitif tam sayı olmak üzere*

$$F_{2n} = F_n L_n,$$

$$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$$

dir (Koshy 2001).

İspat Sonuç 4.16 dan,

$$F_{2n} = F_n F_{n+1} + F_{n-1} F_n = F_n \left(F_{n+1} + F_{n-1} \right) = F_n L_n$$

elde edilir ve

$$F_{2n+1} = F_{m+1}^2 + F_m^2$$

olduğu görülür. □

Örnek 4.18. $n = 6$ *için* $F_{2n} = F_n L_n$ *eşitliği incelenirse* $F_6 = 8$ *ve* $L_6 = 18$ *olduğundan*

$$\begin{aligned} F_{12} &= F_6 . L_6 \\ &= 8.18 = 144, \end{aligned}$$

$F_{2n+1} = F_{m+1}^2 + F_m^2$ *eşitliği incelenirse* $F_6 = 8$ *ve* $F_7 = 13$ *olduğundan*

$$\begin{aligned} F_{13} &= F_7^2 + F_6^2 \\ &= 13^2 + 8^2 = 233 \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.19. n *pozitif tam sayı olmak üzere,*

1) $L_{2n+1} = 3n + 1 + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) L_{2i+1},$

2) $L_{2n} = 3n + 1 + F_{2n-2} + \sum_{i=1}^{n-2} (2F_{2i} + (n-1-i)L_{2i+1})$

dir.

İspat (4.6) denkleminden,

$$F_{2n+2} = n + 1 + \sum_{i=0}^{n-1} F_{2(i+1)}(n-i)$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} L_{2n+1} &= F_{2n} + F_{2n+2} \\ &= \left[n + \sum_{i=1}^{n-1} F_{2i}(n-i) \right] + \left[n + 1 + \sum_{i=0}^{n-1} F_{2(i+1)}(n-i) \right] \end{aligned}$$

dir. Temel elementer işlemlerle 1. eşitlik elde edilir.

İkinci eşitlik için,

$$F_{2n-1} = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} F_{2i} \tag{4.12}$$

ve

$$L_{2n-2} = F_{2n-3} + F_{2n-1} \tag{4.13}$$

olduğundan

$$L_{2n-2} = 2 \left[1 + \sum_{i=1}^{n-2} F_{2i} \right] + F_{2n-2}.$$

eşitliği elde edilir. Diğer yandan, 1. eşitlikten,

$$L_{2n} = L_{2n-2} + L_{2n-1} = 2 \left[1 + \sum_{i=1}^{n-2} F_{2i} \right] + F_{2n-2} + 3n - 2 + \sum_{i=1}^{n-2} L_{2i+1}(n-1-i)$$

elde edilerek ispat tamamlanır. □

4.1.1. Bileşen Büyüklüğü Sınırlandırılmış Kompozisyonlar

Bu tez çalışmasında kompozisyonlar için $P_{n,a}$ ile gösterilen n tamsayısının en büyük bileşeni en fazla a olan kompozisyonları ile ilgili bazı incelemeler yapılmıştır.

n, a pozitif tamsayılar olmak üzere, n tamsayısının en büyük bileşeni en fazla a olabilen kompozisyonlar için,

$$P_{n,a} = \{(x_1, x_2, ..., x_m) : x_1 + ... + x_m = n, \text{ ve } x_i \leq a, \ \forall i \in \{1, 2, ..., m\}\}$$

kullanılacaktır. $P_{n,a}$ kümesinin eleman sayısı $|P_{n,a}|$ ile gösterilecektir.

Örnek 4.20. *$n = 4$ için en büyük bileşeni en fazla 2 olan kompozisyonlar*

$$P_{4,2} = \{(2,2),\ (2,1,1),\ (1,2,1),\ (1,1,2),\ (1,1,1,1)\}$$

dir ve $|P_{4,2}| = 5$.

$P_{n,a}$ kompozisyonları ile yeni bağıntılar elde edebilmek için yeni bir işlem tanımlamak gerekirse; $(y_1, ..., y_m) \in P_{n,a} - \{(a, x_1, x_{2,} ..., x_m) \in P_{n,a}\}$ olmak üzere

$$1 \circledcirc (y_1, ..., y_m) = (1 + y_1, y_2, ..., y_m)$$

şeklinde ifade tanımlansın. Daha sonra yukarıdaki işlem tarafından oluşturulan küme için $1 \circledcirc P_{n,a}$ gösterimi

$$1 \circledcirc P_{n,a} = \{(1 + x_1, x_2, ..., x_m) : x_1 + ... + x_m = n,\ \ x_1 < a \text{ ve } \forall i \text{ için } x_i \leq a\ \}$$

kullanılsın.

Teorem 4.21. *n, a pozitif tamsayıları için*

$$P_{n+1,a} = (1 \odot P_{n,a}) \cup (1 \circledcirc P_{n,a}) \tag{4.14}$$

dir.

İspat Kümelerin tanımlarından $(1 \odot P_{n,a})$ ve $(1 \circledcirc P_{n,a})$ ayrık iki kümedir. $y \in P_{n,a}$ için $1 \odot y$ ve $1 \circledcirc y \in P_{n+1,a}$. Böylece

$$(1 \odot P_{n,a}) \cup (1 \circledcirc P_{n,a}) \subseteq P_{n+1,a}.$$

$i \in \{1, ..., m\}$ için $x_i \leq a$ ve $x_1 + ... + x_m = n + 1$ olmak üzere $x = (x_1, ..., x_m) \in P_{n+1,a}$. İki durum vardır:

$i)$ $x_1 \neq 1$ ise $c_1 = x_1 - 1$, $c_i = x_i$, $i \in \{2, ..., m\}$ ve $c_1 < a$ and $c_1 + c_2 + ... + c_m = n$. Buradan $c = (c_1, c_2, ..., c_m) \in P_{n,a}$. Böylece $x = 1 \circledcirc (c_1, c_2, ..., c_m) \in (1 \circledcirc P_{n,a})$ elde edilir.

$ii)$ $x_1 = 1$ ise $c_{i-1} = x_i$, $i \in \{2, ..., m\}$ ve $c_1 + c_2 + ... + c_{m-1} = n$. Buradan $c = (c_1, c_2, ..., c_{m-1}) \in P_{n,a}$ ve böylece $x = 1 \odot c \in (1 \odot P_{n,a})$ elde edilerek ispat tamamlanır. □

Örnek 4.22. $n = 3$ *ve* $a = 2$ *için* $P_{3,2} = \{(2,1),(1,2),(1,1,1)\}$,

$$(1 \odot P_{3,2}) = \{(1,2,1),(1,1,2),(1,1,1,1)\}$$

ve $1 \circledcirc P_{n,a}$ *kümesi tanımı gereği parçadaki ilk bileşenin* a *tamsayısından küçük olması gerekmektedir. Bu nedenle* $P_{3,2}$ *kümesinin* $(2,1)$ *parçasının ilk bileşenine* 1 *eklenmez.*

$$(1 \circledcirc P_{3,2}) = \{(2,2),(2,1,1)\}$$

Buradan

$$\begin{aligned}(1 \odot P_{3,2}) \cup (1 \circledcirc P_{3,2}) &= \{(1,2,1),(1,1,2),(1,1,1,1),(2,2),(2,1,1)\} \\ &= P_{4,2}\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Önerme 4.23. $n, a \geq 1$ *tamsayıları olmak üzere*

$$|P_{n+1,a}| = 2\,|P_{n,a}| - |P_{n-a,a}|\,. \tag{4.15}$$

İspat $\{(a, x_1, x_2, ..., x_m) \in P_{n,a}\}$ kümesinin eleman sayısının $|P_{n-a,a}|$ ile eşit olduğu açıktır. O halde,

$$|1 \circledcirc P_{n,a}| = |P_{n,a}| - |P_{n-a,a}|$$

ve

$$|1 \odot P_{n,a}| = |P_{n,a}|$$

olur. (4.14) eşitliği kullanılarak ispat tamamlanır. □

Örnek 4.24. $n = 3$ *ve* $a = 2$ *için*

$$|P_{4,2}| = 2\,|P_{3,2}| - |P_{1,2}|$$

olmalı. Örnek 4.22 ten görüldüğü üzere $|P_{3,2}| = 3$ *ve* $|P_{1,2}| = P_1 = 1$. *Bu değerler yukarıdaki eşitlikte yerine yazıldığında*

$$|P_{4,2}| = 5$$

elde edilir.

Ayrıca $n \leq 2a$ iken $|P_{n-a,a}| = |P_{n-a}|$ olduğundan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.25. *$n, a \geq 1$ tamsayıları için $n \leq 2a$ olmak üzere*

$$|P_{n+1,a}| = 2\,|P_{n,a}| - |P_{n-a}| \tag{4.16}$$

dir.

$|P_{n,a}|$ sayısının özyineleme bağıntısı kullanılarak üreteç fonksiyonu elde edilir.

Teorem 4.26. *a pozitif tam sayı olmak üzere,*

$$G(a,x) = \sum_{n=0}^{\infty} |P_{n,a}|\, x^n = \frac{1-x}{1-2x+x^{a+1}}.$$

İspat $n, a \in \mathbb{Z}^+$ için $|P_{n+1,a}| = 2\,|P_{n,a}| - |P_{n-a,a}|$ olduğu biliniyor. Üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} |P_{n,a}|\, x^n = G(a,x)$$

olsun. O halde

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} |P_{n,a}|\, x^n &= \sum_{n=0}^{a-1} |P_{n,a}|\, x^n + |P_{a,a}|\, x^a + \sum_{n=a}^{\infty} |P_{n+1,a}|\, x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{a-1} |P_{n,a}|\, x^n + |P_{a,a}|\, x^a + x\sum_{n=a}^{\infty} |P_{n+1,a}|\, x^{n}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan Önerme 4.23 kullanılarak

$$\begin{aligned}
G(a,x) &= \sum_{n=0}^{a-1} |P_{n,a}|\, x^n + |P_{a,a}|\, x^a + x\sum_{n=a}^{\infty} \left(2\,|P_{n,a}| - |P_{n-a,a}|\right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{a-1} |P_{n,a}|\, x^n + |P_{a,a}|\, x^a + 2x\sum_{n=a}^{\infty} |P_{n,a}|\, x^n - x\sum_{n=a}^{\infty} |P_{n-a,a}|\, x^n \\
&= \sum_{n=0}^{a-1} |P_{n,a}|\, x^n + |P_{a,a}|\, x^a + 2x\sum_{n=a}^{\infty} |P_{n,a}|\, x^n - x\sum_{n=a}^{\infty} |P_{n-a,a}|\, x^n \\
&\quad +2x\sum_{n=0}^{a-1} |P_{n,a}|\, x^n - 2x\sum_{n=0}^{a-1} |P_{n,a}|\, x^n
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli aritmetik işlemler yapılarak

$$\begin{aligned}
G(a,x) &= \sum_{n=0}^{a-1} |P_{n,a}|\, x^n + |P_{a,a}|\, x^a + \underbrace{2x\sum_{n=a}^{\infty} |P_{n,a}|\, x^n + 2x\sum_{n=0}^{a-1} |P_{n,a}|\, x^n}_{2xG(a,x)} \\
&\quad -x\sum_{n=a}^{\infty} |P_{n-a,a}|\, x^n - 2x\sum_{n=0}^{a-1} |P_{n,a}|\, x^n
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$
\begin{aligned}
G(a,x) &= \frac{(1-2x)\displaystyle\sum_{n=0}^{a-1}|P_{n,a}|\,x^n + |P_{a,a}|\,x^a}{1-2x+x^{a+1}} \\
&= \frac{(1-2x)(1+\displaystyle\sum_{n=1}^{a-1}2^{n-1}x^n) + 2^{a-1}x^a}{1-2x+x^{a+1}} \\
&= \frac{(1-2x)(1+x\displaystyle\sum_{n=1}^{a-1}(2x)^{n-1}) + 2^{a-1}x^a}{1-2x+x^{a+1}}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Aritmetik işlemlere devam edilerek

$$
\begin{aligned}
G(a,x) &= \frac{(1-2x)(1+x\frac{1-(2x)^{a-1}}{1-2x}) + 2^{a-1}x^a}{1-2x+x^{a+1}} \\
&= \frac{((1-2x)+x(1-2x)\frac{1-(2x)^{a-1}}{1-2x}) + 2^{a-1}x^a}{1-2x+x^{a+1}} \\
&= \frac{(1-2x)+x\,(1-(2x)^{a-1}) + 2^{a-1}x^a}{1-2x+x^{a+1}} \\
&= \frac{(1-2x)+x-2^{a-1}x^a + 2^{a-1}x^a}{1-2x+x^{a+1}} \\
&= \frac{1-x}{1-2x+x^{a+1}}
\end{aligned}
$$

bulunur ve ispat tamamlanır. □

$G(a,x)$ üreteç fonksiyonu için bir kaç özel durum incelenirse,

- $a=1$ için,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}|P_{n,1}|\,x^n &= G(1,x) = \frac{1-x}{1-2x+x^2} \\
&= \frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+...
\end{aligned}
$$

  elde edilir.

- $a=2$ için,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}|P_{n,2}|\,x^n &= G(2,x) = \frac{(1-2x)(1+x)+2x^2}{1-2x+x^3} \\
&= \frac{1}{1-x-x^2} = 1+x+2x^2+3x^3+5x^4+8x^5+13x^6+...
\end{aligned}
$$

olur. Burada $|P_{n,2}|$ sayılarının $(n+1)$. Fibonacci sayılarını verdiği görülür. Yani $|P_{n,2}| = F_{n+1}$ olur.

- $a = 3$ için,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |P_{n,3}|\, x^n &= G(3,x) = \frac{(1-2x)(1+x+2x^2)+4x^3}{1-2x+x^4} \\ &= \frac{1}{1-x-x^2-x^3} \\ &= 1+x+2x^2+4x^3+7x^4+13x^5+24x^6+44x^7+... \end{aligned}$$

elde edilir.

Literatürde $t_1 = 1, t_2 = 1$ ve $t_3 = 2$ başlangıç koşulları ve

$$t_n = t_{n-1} + t_{n-2} + t_{n-3}$$

özyineleme bağıntısı ile tanımlanan sayı dizisi Tribonacci sayıları olarak adlandırılır. Üreteç fonksiyonu $G(3,\text{x})$ ye eşit olduğundan $|P_{n,3}|$ sayıları Tribonacci sayılarıdır.

- $a = 4$ için,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |P_{n,4}|\, x^n &= G(4,x) = \frac{(1-2x)(1+x+2x^2+4x^3)+8x^4}{1-2x+x^5} \\ &= \frac{1}{1-x-x^2-x^3-x^4} \\ &= 1+x+2x^2+4x^3+8x^4+15x^5+29x^6+56x^7+108x^8+... \end{aligned}$$

elde edilir.

Literatürde $\bar{T}_0 = 0,\ \bar{T}_1 = 1,\ \bar{T}_2 = 1$ ve $\bar{T}_3 = 2$ başlangıç koşulları ve

$$\bar{T}_n = \bar{T}_{n-1} + \bar{T}_{n-2} + \bar{T}_{n-3} + \bar{T}_{n-4}$$

özyineleme bağıntısı ile tanımlanan sayı dizisi Tetranacci sayıları olarak adlandırılır. Üreteç fonksiyonu $G(4,\text{x})$ ye eşit olduğundan $|P_{n,4}|$ sayıları Tetranacci sayılarıdır (Daha önce T_n notasyonunu $T(P_n)$ için kullandığımız için Tetranacci sayıları için $\bar{T}_n$ notasyonu kullanılmıştır).

Teorem 4.27. *n tamsayısının en büyük bileşeni en fazla a olan kompozisyonlar için özyineleme bağıntısı*

$$|P_{n,a}| = \sum_{i=1}^{a} |P_{i,a}|$$

dır.

İspat Üreteç fonksiyonu

$$\frac{1-x}{1-2x+x^{a+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} |P_{n,a}|\, x^n$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
1-x &= \sum_{n=0}^{\infty} |P_{n,a}|\, x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} |P_{n,a}|\, x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} |P_{n,a}|\, x^{n+a+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |P_{n,a}|\, x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} |P_{n-1,a}|\, x^n + \sum_{n=a+1}^{\infty} |P_{n-a-1,a}|\, x^n \\
&= \sum_{n=0}^{a} |P_{n,a}|\, x^n + \sum_{n=a+1}^{\infty} |P_{n,a}|\, x^n - 2\sum_{n=1}^{a} |P_{n-1,a}|\, x^n \\
&\quad -2\sum_{n=a+1}^{\infty} |P_{n-1,a}|\, x^n + \sum_{n=a+1}^{\infty} |P_{n-a-1,a}|\, x^n \\
&= |P_{0,a}| + \sum_{n=1}^{a} |P_{n,a}|\, x^n - 2\sum_{n=1}^{a} |P_{n-1,a}|\, x^n + \sum_{n=a+1}^{\infty} |P_{n,a}|\, x^n \\
&\quad -2\sum_{n=a+1}^{\infty} |P_{n-1,a}|\, x^n + \sum_{n=a+1}^{\infty} |P_{n-a-1,a}|\, x^n .
\end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned}
1-x &= |P_{0,a}| + (|P_{1,a}| - 2\,|P_{0,a}|)\, x + \sum_{n=2}^{a} (|P_{n,a}| - 2\,|P_{n-1,a}|)\, x^n + \\
&\quad \sum_{n=a+1}^{\infty} (|P_{n,a}| - 2\,|P_{n-1,a}| + |P_{n-a-1,a}|)\, x^n .
\end{aligned}$$

Eşitliğin her iki tarafındaki terimlerin katsayılarının eşitliğinden $|P_{0,a}| = 1$, $|P_{1,a}| - 2\,|P_{0,a}| = -1$ elde edilir. Böylece $|P_{1,a}| = 1$ ve $a+1$ e kadar $|P_{n,a}| - 2\,|P_{n-1,a}| = 0$ olduğundan $|P_{n,a}| = 2\,|P_{n-1,a}|$ elde edilir. Bu terimler incelenirse;

$$\begin{aligned}
|P_{2,a}| &= 2\,|P_{1,a}| = 2 \\
|P_{3,a}| &= 2\,|P_{2,a}| = 2^2 \\
&\vdots \\
|P_{a,a}| &= 2\,|P_{a-1,a}| = 2^{a-1}
\end{aligned}$$

olduğu gözlemlenir. $n = a + 1$ için,

$$|P_{a+1,a}| = 2\,|P_{a,a}| - |P_{0,a}|$$

dir. Burada $|P_{a,a}|$ ve $|P_{0,a}|$ ifadelerinin değerleri yerine yazılırsa

$$|P_{a+1,a}| = 2.2^{a-1} - 1 = 2^{a} - 1$$

elde edilir.

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{a-1} = \frac{2^a - 1}{1}$$

yani

$$|P_{a+1,a}| = \sum_{i=1}^{a} |P_{a+1-i,a}|\,.$$

(4.16) eşitliğinden

$$|P_{a+2,a}| = 2\,|P_{a+1,a}| - |P_{1,a}|$$

dir. Bu eşitlikte $|P_{a+1,a}|$ ifadesi yerine yazılırsa $n = a + 1$ için doğruluğu görülür. Tümevarımla ispat tamamlanabilir. $n = a + k$ için

$$|P_{a+k,a}| = \sum_{i=1}^{a} |P_{a+k-i,a}|\,.$$

eşitliğinin doğru olduğu kabul edilsin. Şimdi $n = a + k + 1$ için

$$\begin{aligned}
|P_{a+k+1,a}| &= |P_{a+k,a}| + \sum_{i=1}^{a} |P_{a+k-i,a}| \\
&= \sum_{i=0}^{a} |P_{a+k-i,a}| \\
&= \sum_{i=1}^{a+1} |P_{a+k+1-i,a}|
\end{aligned}$$

elde edilerek ispat tamamlanır. □

Sayıların kompozisyonu kullanılarak elde edilen bu sayılar genelleştirilmiş çift değişkenli polinomlar ile de elde edilebilir.

Önerme 4.28. *$m, n, k \in \mathbb{N}$, $t, y \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{C}$ ve $G_j(t, y; k, m, n)$ genelleştirilmiş çift değişkenli polinom olmak üzere*

$$|P_{j,a}| = G_j(2, -1; 1, 1, a) - G_{j-1}(2, -1; 1, 1, a).$$

İspat Özdemir ve Şimşek (2016)'da verilen (4.7) eşitliğinde $t = 2, k = 1, m = 1, y = -1$ ve $n = a$ alınırsa

$$\frac{1}{1-2x+x^{a+1}} = \sum_{j=0}^{\infty} G_j(2,-1;1,1,a)x^j$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{j=0}^{\infty} |P_{j,a}|\, x^j = \frac{1-x}{1-2x+x^{a+1}} = \sum_{j=1}^{\infty}(G_j(2,-1;1,1,a) - G_{j-1}(2,-1;1,1,a))x^j.$$

Böylece $j \geq 1$ tamsayısı için

$$|P_{j,a}| = G_j(2,-1;1,1,a) - G_{j-1}(2,-1;1,1,a)$$

eşitliği elde edilir. □

$P_{n,a}$ kümesi için de çarpım fonksiyonu uygulanarak bir tanım verilebilir.

Tanım 4.29. *n ve a pozitif tamsayılar olmak üzere*

$$T_{n,a} = \sum_{\substack{a_1+\ldots+a_m=n \\ a_i \leq a}} a_1.a_2.\ldots.a_m$$

değerine $P_{n,a}$ ifadesinin çarpım değeri denir.

$n \leq a$ için $T_{n,a} = T_n = F_{2n}$ olduğu açıktır.

Önerme 4.30. *n, a pozitif tamsayılar ve $1 < n$ olmak üzere*

$$T_{n+1,a} = T_{n,a} + \sum_{i=1}^{a-1} (1+i\,)\, T_{n-i,a}.$$

İspat Teorem 4.21 ile

$$P_{n+1,a} = (1 \odot P_{n,a}) \cup (1 \circledcirc P_{n,a})$$

eşitliği bilinmektedir. Çarpım fonksiyonu tanımı uygulanırsa

$$\begin{aligned} T(P_{n+1,a}) &= T_{n+1,a} = \left(\sum_{a \in P_{n,a}}^{\infty} 1.\overbrace{b_1.b_2\ldots b_m}^{\overline{a}} \right) + \left(\sum_{\substack{b_1+b_2+\ldots+b_m=n \\ b_2,..,b_m \leq a, b_1 < a}}^{\infty} (1+b_1).b_2\ldots b_m \right) \\ &= T_{n,a} + \sum_{i=1}^{a-1} \sum_{\substack{b_2+\ldots+b_m=n-i \\ b_2,..,b_m \leq a}}^{\infty} b_2\ldots b_m + \sum_{i=1}^{a-1} i \sum_{\substack{b_2+\ldots+b_m=n-i \\ b_2,..,b_m \leq a}}^{\infty} b_2\ldots b_m \end{aligned}$$

elde edilir ve gerekli aritmetik işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}T_{n+1,a} &= T_{n,a} + \sum_{i=1}^{a-1} T_{n-i,a} + \sum_{i=1}^{a-1} i\, T_{n-i,a} \\ &= T_{n,a} + \sum_{i=1}^{a-1} (1+i\,)\, T_{n-i,a}\end{aligned}$$

elde edilerek ispat tamamlanır. □

Örnek 4.31. *$n = 3$ ve $a = 2$ için*

$$\begin{aligned}T_{3+1,2} &= T_{3,2} + \sum_{i=1}^{2-1} (1+i\,)\, T_{3-i,2} \\ &= T_{3,2} + 2T_{2,2}.\end{aligned}$$

Örnek 4.22 gereği $T_{3,2} = 5$ olduğu görülmektedir. Ayrıca $T_{2,2} = T_2 = 3$ olduğundan

$$T_{4,2} = 5 + 2.3 = 11$$

elde edilir.

Teorem 4.32. *a pozitif tam sayı olmak üzere $T_{n,a}$ için üreteç fonksiyonu*

$$M(a,x) = \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{a-1} F_{2n}x^n\,(1-x) + x^a - \sum_{i=1}^{a-1}\left((1+i)\,x^{i+1}\sum_{n=0}^{a-i-1} F_{2n}x^n\right)}{\displaystyle 1 - \sum_{i=1}^{a} ix^i}$$

dir.

İspat a pozitif tam sayı olmak üzere

$$\begin{aligned}M(a,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_{n,a}x^n = \sum_{n=1}^{a} T_{n,a}x^n + \sum_{n=a+1}^{\infty} T_{n,a}x^n \\ &= \sum_{n=1}^{a} T_{n,a}x^n + \sum_{n=a}^{\infty} T_{n+1,a}x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{a-1} T_{n,a}x^n + x\sum_{n=a}^{\infty} T_{n+1,a}x^n\end{aligned}$$

ifadesinde Öneme 4.30 kullanılarak

$$\begin{aligned}M(a,x) &= \sum_{n=1}^{a} T_{n,a}x^n + x\sum_{n=a}^{\infty}\left(T_{n,a} + \sum_{i=1}^{a-1}(1+i\,)\,T_{n-i,a}\right)x^n \\ &= \sum_{n=1}^{a} T_{n,a}x^n + x\sum_{n=a}^{\infty} T_{n,a}x^n + x\sum_{n=a}^{\infty}\sum_{i=1}^{a-1}(1+i\,)\,T_{n-i,a}x^n\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} M(a,x) &= \sum_{n=1}^{a} T_{n,a}x^n - x\sum_{n=1}^{a-1} T_{n,a}x^n + \\ & \left(x\sum_{n=1}^{a-1} T_{n,a}x^n + x\sum_{n=a}^{\infty} T_{n,a}x^n \right) + x\sum_{n=a}^{\infty}\sum_{i=1}^{a-1} (1+i\ ) T_{n-i,a}x^n \\ &= \sum_{n=1}^{a} T_{n,a}x^n - x\sum_{n=1}^{a-1} T_{n,a}x^n + xM(a) + \\ & \sum_{i=1}^{a-1} \left((1+i)\, x^{i+1}M(a) - (1+i)\, x^{i+1}\sum_{n=0}^{a-i-1} T_{n,a}x^n \right). \end{aligned}$$

Aritmetik işlemler yapılarak

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{a-1} T_{n,a}x^n\,(1-x) + T_{a,a}x^a + \sum_{i=0}^{a-1}(1+i)\,x^{i+1}M(a) - \sum_{i=1}^{a-1}(1+i)\,x^{i+1}\sum_{n=0}^{a-i-1} T_{n,a}x^n \\ &= \sum_{n=1}^{a-1} T_{n,a}x^n\,(1-x) + T_{a,a}x^a + \sum_{i=1}^{a} ix^iM(a) - \sum_{i=2}^{a} ix^i\sum_{n=0}^{a-i} T_{n,a}x^n \end{aligned}$$

elde edilir.

$$M(a,x) = \frac{\sum_{n=1}^{a-1} T_{n,a}x^n\,(1-x) + T_{a,a}x^a - \sum_{i=1}^{a-1}\left((1+i)\,x^{i+1}\sum_{n=0}^{a-i-1} T_{n,a}x^n \right)}{1-\sum_{i=1}^{a} ix^i},$$

$n < a$ için $T_{n,a} = T_n = F_{2n}$ olduğundan ispat tamamlanır. □

$M(a,x)$ üreteç fonksiyonu için bir kaç özel durum incelenirse,

- $a = 2$ için,

$$\begin{aligned} M(2,x) &= -x\frac{2x+1}{(x+1)\,(2x-1)} \\ &= x + 3x^2 + 5x^3 + 11x^4 + 21x^5 ... \end{aligned}$$

  Jacobsthal sayılarının için üreteç fonksiyonu elde edilmektedir. Bu üreteç fonksiyonu Jacobsthal dizisi ilk terimi $J_0 = 1$ hariç tüm diziyi üretmektedir.

- $a = 3$ için,

$$\begin{aligned} M(3,x) &= x\frac{2x+3x^2+1}{1-3x^3-2x^2-x} \\ &= x + 3x^2 + 8x^3 + 17x^4 + 42x^5 + 100x^6 + 235x^7 ... \end{aligned}$$

üreteç fonksiyonu elde edilmektedir. Böylece $\{1, 38, 17, 42, 100...\}$ dizisi elde edilir. Bu sayı dizisi OnLine Encyclopedia of Integer Sequences'ta (OEIS) bulunmamaktadır (Sloane 2023).

Bu kısıma kadar kısıtlanmış kompozisyonlardan $P_{n,a}$ (n tamsayısının parçalanışlarından en büyük bileşeni en fazla a olabilen parçalanışları) ile ilgili çalışmalar yapılıp üreteç fonksiyonu bulunmuştur. $M(n, x)$ fonksiyonunun genelleştirilmiş Jacobsthal sayıları ile bağlantısı olabilir. $P_{n,a}$ kümesinin eleman sayısı n_nacci sayılarını verirken çarpım fonksiyonları $a = 2$ için Jacobsthal sayılarını vermektedir. Ancak $2 < a$ için elde edilen diziler literatürde bulunmamaktadır.

4.1.2. Bileşen Sayısı Sabit Olan Kompozisyonlar

Bu kısımda belli bir bileşen sayına sahip olan kompozisyonlar üzerine çalışılacaktır.

Tanım 4.33. *m, n pozitif tamsayılar olmak üzere,*

$$ {}_mP_n = \{(a_1, a_2, ..., a_m) : \ a_1 + a_2 + ... + a_m = n\} $$

kümesinin elemanlarına n tamsayısının bileşen sayısı m olan kompozisyonu denir.

Yukarıdaki ${}_mP_n$ tanımından

$$ P_n = \cup_{i=1}^{n} {}_iP_n \ \text{ ve } \ {}_mP_n \cap {}_{m'}P_n = \emptyset. $$

olduğu açıktır.

$(1, a_1, ..., a_m) \in {}_mP_n$ olmak üzere $(1\odot_{-})$ ve $(1\oplus_{-})$ işlemlerinin tanımından

$$ 1 \odot (a_1, a_2, ..., a_m) = (1, a_1, ..., a_m) \in {}_{m+1}P_{n+1} $$

$$ 1 \oplus (a_1, a_2, ..., a_m) = (1 + a_1, ..., a_m) \in {}_mP_{n+1} $$

olduğu görülür. Buradan oluşturulan kümelerin

$$ 1 \odot {}_{m-1}P_{n-1} = \{(1, x_1, x_2, ..., x_{m-1}) : x_1 + ... + x_{m-1} = n - 1\} $$

$$ 1 \oplus {}_mP_{n-1} = \{(1 + x_1, x_2, ..., x_m) : x_1 + ... + x_{m-1} = n - 1\} $$

ile gösterilsin.

Teorem 4.34. *m, n pozitif tamsayılar olmak üzere, ${}_mP_n$ kümesi $(1 \odot {}_{m-1}P_{n-1})$ ve $(1 \oplus {}_mP_{n-1})$ kümelerinin ayrık bileşimidir.*

İspat Her n pozitif tamsayısı için $1 \odot {}_{m-1}P_{n-1}$ ve $1 \oplus {}_mP_{n-1}$ kümelerinin ayrık olduğu açıktır. Şimdi $a_1 \in {}_{m-1}P_{n-1}$ olsun. $b_1 = 1 \odot a_1 \in {}_mP_n$ dir. $a_2 \in {}_mP_{n-1}$ olsun. $b_2 = 1 \oplus a_2 \in {}_mP_n$ olduğundan

$$(1 \odot {}_{m-1}P_{n-1}) \cup (1 \oplus {}_mP_{n-1}) \subseteq {}_mP_n.$$

$d = (d_1, d_2, ..., d_m) \in {}_mP_n$ olsun ve $d_1 + d_2 + ... + d_m = n$.
$d_1 \neq 1$ ise $i \in \{2, ..., m\}$ olmak üzere $c_1 = d_1 - 1, c_i = d_i$. Böylece $c_1 + c_2 + ... + c_m = n - 1$ olduğundan $c = (c_1, c_2, ..., c_m) \in {}_mP_{n-1}$ ve $d = 1 \oplus c \in (1 \oplus {}_mP_n)$.
$d_1 = 1$ ise $i \in \{2, ..., m\}$ olmak üzere $c_{i-1} = d_i$. Böylece $c_1 + c_2 + ... + c_{m-1} = n - 1$ olduğundan $c = (c_1, c_2, ..., c_{m-1}) \in {}_{m-1}P_{n-1}$ ve $d = 1 \odot c \in {}_{m-1}P_{n-1}$. Buradan

$${}_mP_n \subseteq (1 \odot {}_{m-1}P_{n-1}) \cup (1 \oplus {}_mP_{n-1})$$

elde edilerek ispat tamamlanır. □

Örnek 4.35. *$n = 5$ ve $m = 3$ için,*

$$\begin{aligned}(1 \odot {}_{3-1}P_{5-1}) &= (1 \odot {}_2P_4) = (1 \odot \{(3,1), (1,3), (2,2)\}) \\ &= ((1,3,1), (1,1,3), (1,2,2)).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1 \oplus {}_3P_{5-1}) &= (1 \oplus {}_3P_4) = (1 \oplus \{(2,1,1), (1,2,1), (1,1,2)\}) \\ &= ((3,1,1), (2,2,1), (2,1,2))\end{aligned}$$

olduğundan

$$(1 \odot {}_2P_4) \cup (1 \oplus {}_3P_4) = ((1,3,1), (1,1,3), (1,2,2), (3,1,1), (2,2,1), (2,1,2)) = {}_3P_5$$

elde edilir.

${}_mP_n$ kümesinin eleman sayısı ${}_mt_n$ ile gösterilsin.

$${}_mP_n = (1 \odot {}_{m-1}P_{n-1}) \cup (1 \oplus {}_mP_{n-1})$$

olduğundan

$$ {}_{m}t_{n} = {}_{m-1}t_{n-1} + {}_{m}t_{n-1} $$

elde edilir.

Teorem 4.36. *m pozitif tamsayısı için üreteç fonksiyonu*

$$ S(m,x) = \sum_{n=m}^{\infty} {}_{m}t_{n}x^{n} = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{m} $$

dir.

İspat m pozitif tam sayı olmak üzere

$$ \begin{aligned} S(m,x) &= \sum_{n=m}^{\infty} {}_{m}t_{n}x^{n} \\ &= {}_{m}t_{m}x^{m} + \sum_{n=m+1}^{\infty} {}_{m}t_{n}x^{n} \\ &= x^{m} + x\sum_{n=m}^{\infty} {}_{m}t_{n+1}x^{n} \\ &= x^{m} + x\sum_{n=m}^{\infty} ({}_{m-1}t_{n} +_{m} t_{n})x^{n} \end{aligned} $$

elde edilir. Buradan gerekli aritmetik işlemler yapılarak

$$ \begin{aligned} S(m,x) &= x^{m} + x\sum_{n=m}^{\infty} {}_{m-1}t_{n}x^{n} + x\sum_{n=m}^{\infty} {}_{m}t_{n}x^{n} \\ &= x^{m} + x\sum_{n=m}^{\infty} {}_{m-1}t_{n}x^{n} + x\underbrace{\sum_{n=m}^{\infty} {}_{m}t_{n}x^{n}}_{S(m,x)} \\ &= x^{m} - x_{m-1}t_{m-1}x^{m-1} + x\sum_{n=m-1}^{\infty} {}_{m-1}t_{n}x^{n} + xS(m,x) \\ &= x^{m} - x^{m} + xS(m-1,x) + xS(m,x) \end{aligned} $$

elde edilir.

$$ S(m,x) = x^{m} - x^{m} + xS(m-1,x) + xS(m,x) $$

eşitliği düzenlenirse

$$ S(m,x) = \frac{xS(m-1,x)}{1-x} $$

olduğu görülür.

Tanım gereği $m = 1$ için

$$S(1,x) = \frac{x}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

dir. $m = 2$ için

$$S(2,x) = \frac{xS(1,x)}{1-x} = \frac{x\frac{x}{1-x}}{1-x} = \frac{x^2}{(x-1)^2}$$

elde edilir. Tümevarım metodu ile $m = k$ için $S(k,x) = \frac{x^k}{(1-x)^k}$ varsayılırsa $m = k + 1$ için

$$\begin{aligned} S(k+1,x) &= \frac{xS(k,x)}{1-x} \\ &= \frac{x\frac{x^k}{(1-x)^k}}{1-x} \\ &= \left(\frac{x}{1-x}\right)^{k+1} \end{aligned}$$

elde edildiğinden ispat tamamlanır. □

Önerme 4.37. *m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere*

$$_mt_n = \binom{n-1}{n-m}.$$

İspat m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere

$$\sum_{n=m}^{\infty} {}_mt_n x^n = \left(\frac{x}{1-x}\right)^m$$

$|x| < 1$ için $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{m+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m}{n} x^n$ (Weisstein 2023) eşitliği göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} \sum_{n=m}^{\infty} {}_mt_n x^n &= x^m \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{n} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{n} x^{n+m} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte indis değişikliği yapılırsa

$$\sum_{n=m}^{\infty} {}_mt_n x^n = \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n-1}{n-m} x^n$$

elde edilir ve x katsayılarını karşılaştırarak

$$_mt_n = \binom{n-1}{n-m}$$

bulunur ve ispat tamamlanır. □

$_mt_n$ için bir kaç özel durum incelenirse;

- $m = 2$ için,

$$\frac{x^2}{(1-x)^2} = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 7x^8 + ...$$

  pozitif tamsayıların üreteç fonksiyonu elde edilmektedir.

- $m = 3$ için,

$$\frac{x^3}{(1-x)^3} = x^3 + 3x^4 + 6x^5 + 10x^6 + 15x^7 + 21x^8 + 28x^9 + ...$$

  üçgensel sayıların üreteç fonksiyonu elde edilmektedir. Ayrıca $\{0, 1, 2, ..., n\}$ kümesinin 2 elemanlı alt küme sayısıdır (Sloane 2023).

- $m = 4$ için,

$$\frac{x^4}{(1-x)^4} = x^4 + 4x^5 + 10x^6 + 20x^7 + 35x^8 + 56x^9 + 84x^{10} + ...$$

  üçgen piramitsel sayıların üreteç fonksiyonu elde edilmektedir.

$_mP_n$ kümesinin elemanlarına da T çarpım fonksiyonu uygulanabilir. Yani m ve n tam sayı olmak üzere $_mP_n$ için çarpım fonksiyonu

$$_mT_n = \sum_{a_1+...+a_m=n} a_1.a_2.....a_m$$

şeklinde tanımlansın.

$$_1T_n = n \text{ ve } T_n = \sum_{m=1}^{n} {_mT_n}$$

olduğu kolaylıkla gözlemlenebilir.

Teorem 4.38. *m, n pozitif tamsayılar olmak üzere*

$$_mT_n = {_mT_{n-1}} + \sum_{i=0}^{n-1} {_{m-1}T_{n-1-i}}$$

dir.

İspat Teorem 4.34 deki

$$_mP_n = (1 \odot_{m-1} P_{n-1}) \cup (1 \oplus_m P_{n-1})$$

eşitliğinden yararlanılarak ve çarpım fonksiyonu kullanılarak

$$\begin{aligned} T(_mP_n) &= {_mT_n} = \left(\sum_{a \in _{m-1}P_{n-1}} \overbrace{a_1.a_2...a_{m-1}}^{\bar{a}} \right) + \left(\sum_{b_1+b_2+...+b_m=n-1} (1+b_1).b_2...b_m \right) \\ &= \sum_{a \in _{m-1}P_{n-1}} \bar{a} + \sum_{b_2+...+b_m=n-1-b_1} b_2.....b_m + \sum_{b \in _mP_{n-1}} \bar{b} \\ &= {_{m-1}T_{n-1}} + \left(\sum_{i=1}^{n-1} {_{m-1}T_{n-1-i}} \right) +_m T_{n-1} \\ &= {_mT_{n-1}} + \sum_{i=0}^{n-1} {_{m-1}T_{n-1-i}} \end{aligned}$$

elde edilir. □

Örnek 4.39. *$n = 5$ ve $m = 3$ için*

$$_3P_5 = \{(1,3,1), (1,1,3), (3,1,1), (1,2,2), (2,2,1), (2,1,2)\}$$

olduğundan

$$_3T_5 = 3+3+3+4+4+4 = 21$$

görülür. Aynı zamanda

$$_3P_4 = (2+1+1, 1+2+1, 1+1+2)$$

olduğundan

$$_3T_4 = 2+2+2 = 6$$

olur. Ayrıca

$$_2P_4 = ((3,1), (1,3), (2,2))$$

olduğundan

$$_2T_4 = 3+3+4 = 10$$

dir.

$$_2P_3 = (1+2, 2+1)$$

olduğundan ${}_2T_3 = 4$. *Ayrıca* ${}_2T_2 = 1$ *olduğundan*

$$\begin{aligned} {}_3T_5 &= {}_3T_4 + \sum_{i=0}^{5-1} {}_{3-1}T_{5-1-i} \\ &= {}_3T_4 + \sum_{i=0}^{4} {}_2T_{4-i} \\ &= {}_3T_4 +_2 T_4 +_2 T_3 +_2 T_2 \\ &= \quad 6 + 10 + 4 + 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.40. m *ve* n *pozitif tamsayılar olmak üzere,*

$$\sum_{n=m}^{\infty} {}_mT_n x^n = \frac{x^m}{(1-x)^{2m}}$$

dir.

İspat

$$\begin{aligned} H(m,x) &= {}_mT_m\, x^m + \sum_{n=m+1}^{\infty} {}_mT_n\, x^n = x^m + \sum_{n=m+1}^{\infty} \left({}_mT_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} {}_{m-1}T_{n-1-i} \right) x^n \\ &= x^m + \sum_{n=m}^{\infty} {}_mT_n x^{n+1} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} {}_{m-1}T_{n-1-i} x^n \\ &= x^m + x \sum_{n=m}^{\infty} {}_mT_n x^n + \sum_{n=m+1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} {}_{m-1}T_{n-1-i} x^n \end{aligned} \tag{4.17}$$

dir. $m-1 \leq m+l-i$ iken ${}_{m-1}T_{n-1-i} \neq 0$ olduğu ve böylece $i \leq \; l+1$ için ${}_{m-1}T_{m+l-i} \neq 0$ olduğu gözlemlenir.

$$\begin{aligned} \sum_{n=m+1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} {}_{m-1}T_{n-1-i} x^n &= \sum_{l=\,0}^{\infty} \sum_{i=0}^{1+l} {}_{m-1}T_{m+l-i} x^{m+1+l} = \sum_{l=\,0}^{\infty} \sum_{i=0}^{l+1} {}_{m-1}T_{m+l-i} x^{m+1+l} \\ &= x \sum_{l=\,0}^{\infty} \sum_{i=0}^{l+1} {}_{m-1}T_{m+l-i} x^{m+l} = x \sum_{l=\,0}^{\infty} \sum_{i=0}^{l+1} {}_{m-1}T_{m-1+i} x^{m+l} \end{aligned}$$

böylece

$$H(m,x) = x^m + xH(m,x) + x \sum_{l=\,0}^{\infty} \sum_{i=0}^{l+1} {}_{m-1}T_{m-1+i} x^{m+l}$$

$$H(m,x) = x^m + xH(m,x) + \underbrace{\sum_{l=\,0}^{\infty} x \sum_{i=0}^{l+1} {}_{m-1}T_{m-1+i} x^{m+l}}_{E(m,x)}$$

elde edilir. $H(m,x)$ ifadesini bulabilmek için $E(m,x) = \sum_{l=0}^{\infty} x \sum_{i=0}^{l+1} {}_{m-1}T_{m-1+i} x^{m+l}$ hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
E(m,x) &= x^{m+1}T_{m-1,m-1}(1+x+x^2+...) + x^{m+1}T_{m,m-1}(1+x+x^2+...) \\
&\quad + x^{m+2}T_{m+1,m-1}(1+x+x^2+...) + x^{m+3}T_{m+2,m-1}(1+x+x^2+...)... \\
&= \frac{x}{1-x}\left[x^m\, T_{m-1,m-1} + \sum_{i=m}^{\infty} T_{i,m-1}x^i + T_{m-1,m-1}\, x^{m-1} - T_{m-1,m-1}\, x^{m-1}\right] \\
&= \frac{x}{1-x}\left[x^m\, T_{m-1,m-1} + \sum_{i=m-1}^{\infty} T_{i,m-1}x^i - T_{m-1,m-1}\, x^{m-1}\right] \\
&= \frac{x}{1-x}\left[T_{m-1,m-1}x^{m-1}(x-1) + \sum_{i=m-1}^{\infty} T_{i,m-1}x^i\right] \\
&= \frac{x}{1-x}\left[x^{m-1}(x-1) + H(m-1,x)\right]
\end{aligned}$$

Böylece

$$E(m,x) = \frac{x}{1-x}\left[x^{m-1}(x-1) + H(m-1,x)\right].$$

Bu ifade düzenlenirse,

$$H(m,x) = x^m + xH(m,x) + \frac{x}{1-x}\left[x^{m-1}(x-1) + H(m-1,x)\right]$$

elde edilir. Gerekli aritmetik işlemler yapılarak

$$H(m,x) = \frac{x}{(1-x)^2}H(m-1,x)$$

şeklinde yineleme bağıntısı elde edilir. $H(0,x) = 1$ ve $H(1,x) = \frac{x}{(1-x)^2}$ olduğunudan, tümevarım ile

$$H(m,x) = \frac{x^m}{(1-x)^{2m}}$$

olduğu görülür. □

Örnek 4.41. $m = 3$ *için*

$$\frac{x^3}{(1-x)^6} = x^3 + 6x^4 + 21x^5 + 56x^6 + 126x^7 + 252x^8 + ...$$

3 *ün bileşen sayısı* 3 *olan kompozisyonu yalnızca* $(1,1,1)$ *olduğundan* ${}_3T_3 = 1$ *dir.*

4 *ün bileşen sayısı* 3 *olan kompozisyonları* $(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2)$ *olduğundan* ${}_3T_4 = 6$

dir.

5 *tamsayısının bileşen sayısı* 3 *olan kompozisyonları*

$$(2,2,1),(1,2,2),(2,1,2),(3,1,1),(1,3,1),(1,1,3)$$

olduğundan ${}_3T_5 = 21$ *olduğu gözlemlenebilir.*

Yukarıdaki teoremin öncülüğünde aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 4.42. m, n *pozitif tamsayılar olmak üzere*

$${}_mT_n = \binom{n+m-1}{2m-1}$$

dir.

İspat İspatı tümevarım ile gösterilir;

$m = 1$ için

$$H(1,x) = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + ...$$

$$\frac{x}{(1-x)^2} = H(1,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{1} x^n.$$

$m = 2$ için

$$H(2,x) = x^2 + 4x^3 + 10x^4 + 20x^5 + 35x^6 + 56x^7 + 84x^8 + ...$$

$$\frac{x^2}{(1-x)^4} = H(2,x) = \sum_{n=3}^{\infty} \binom{n}{3} x^{n-1}$$

dir.

$m = a$ için

$$H(a,x) = \frac{x^a}{(1-x)^{2a}} = \sum_{n=2a-1}^{\infty} \binom{n}{2a-1} x^{n-(a-1)}$$

olduğu kabul edilirse,

$m = a + 1$ için

$$\begin{aligned}
H(a+1,x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\binom{n}{1}x^n \sum_{n=2a-1}^{\infty}\binom{n}{2a-1}x^{n-(a-1)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{1}x^{n+1} \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2a-1}{2a-1}x^{n+2a-1-(a-1)} \\
&= x^{a+1}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{1}x^n \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2a-1}{2a-1}x^{n} \\
&= x^{a+1}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}(j+1)\binom{n-j+2a-1}{2a-1}x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}(j+1)\binom{n-j+2a-1}{2a-1}x^{n+a+1} \\
&= \sum_{n=a+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-a-1}(j+1)\binom{n-j+a-2}{2a-1}x^n
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadeden

$$H(a+1,x) = \frac{x^{a+1}}{(1-x)^{2a+2}} = \sum_{n=a+1}^{\infty}\binom{n+a}{2a+1}x^n$$

elde edilerek ispat tamamlanır. □

Örnek 4.43. *n pozitif tamsayısının 3 bileşenden oluşan kompozisyonlarının bileşenlerinin çarpımlarının toplamı*

$$H(3,x) = \sum_{n=5}^{\infty}\binom{n}{5}x^{n-2} = \frac{x^3}{(1-x)^6} = x^3+6x^4+21x^5+56x^6+126x^7+252x^8+\ldots$$

n pozitif tamsayısının 4 bileşenden oluşan kompozisyonlarının bileşenlerinin çarpımlarının toplamı

$$H(4,x) = \sum_{n=7}^{\infty}\binom{n}{7}x^{n-3} = \frac{x^4}{(1-x)^8} = x^4+8x^5+36x^6+120x^7+330x^8+792x^9+\ldots$$

${}_mP_n$ kümesinin eleman sayıları $m = 2$ için pozitif tam sayı dizisini, $m = 3$ için üçgensel sayı dizisini vermesine rağmen çarpımların toplamı ile elde edilen sayı dizisi OnLine Encyclopedia of Integer Sequences'ta (OEIS) bulunmamaktadır (Sloane 2023).

4.1.3. Bileşeni Tek Tamsayı Olan Kompozisyonlar

Daha önce yapılan çalışmalarda parçalanışlarda bileşeni tek tamsayılardan oluşan parçalanışların sayısı $Q(n)$ için üreteç fonksiyonu $\mid x \mid < 1$ olmak üzere

$$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2m-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} Q(n)x^n$$

şeklindedir (Apostol 1976).

Bu kısımda kompozisyonların bileşeni tek tam sayılardan oluşan kompozisyonların sayısını veren bağıntı elde edilmiş ve Fibonacci sayıları ile ilişkisi bulunmuştur.

Bir sayının tek kompozisyonları kendinden küçük eşit tek tamsayılarla oluşturulur.

$$\begin{array}{lll} n=1 & \text{için} & \{1\} \\ n=2 & \text{için} & \{(1,1)\} \\ n=3 & \text{için} & \{3,(1,1,1)\} \\ n=4 & \text{için} & \{(3,1),(1,3),(1,1,1)\} \\ n=5 & \text{için} & \{5,(1,3,1),(1,1,3),(3,1,1),(1,1,1,1)\} \end{array}$$

Bileşeni tek tamsayılardan oluşan kompozisyonların kümesi $(1 \odot \_)$ işleminden yararlanılarak inşa edilebilir.

n pozitif tamsayısının bileşeni tek tamsayılardan oluşan kompozisyonlarının kümesini O_n ile ifade edilirse,

$O_1 = \{1\}$

$O_2 = (1 \odot O_1) = \{(1,1)\}$

$O_3 = \{3\} \cup (1 \odot O_2) = \{3\} \cup \{(1,1,1)\}$

$O_4 = (1 \odot O_3) \cup (3 \odot O_1) = \{(3,1)\,(1,1,1,1)\} \cup \{(3,1)\}.$

Bu kümeleri her k pozitif tamsayısı için genelleştirmek mümkündür.

Teorem 4.44. $k \geq 1$ *tamsayısı için*

i)

$$O_{2k+1} = \{2k+1\} \cup \bigcup_{i=0}^{k-1} ((2i+1) \odot O_{2k-2i}),$$

ii)

$$O_{2k} = \bigcup_{i=0}^{k-1} ((2i+1) \odot O_{2k-2i-1}).$$

dir.

İspat $a \in O_{2k-2i}$ olsun. Yani a, $2k-2i$ sayısının bileşenleri tek tam sayı olan kompozisyonlarından herhangi biridir. $i \in \{0,...,k-1\}$ alınarak tek elemanlarının tamamını içermiş olur. $((2i+1) \odot O_{2k-2i}) \in O_{2k-2i+(2i+1)}$ yani $((2i+1) \odot O_{2k-2i}) \in O_{2k-1}$ dir. Bu kompozisyonlara $2k+1$ da eklenerek $2k+1$ tamsayısının bileşenleri tek tam sayı olan tüm kompozisyonları bulunarak

$$O_{2k+1} = \{2k+1\} \cup \bigcup_{i=0}^{k-1} ((2i+1) \odot O_{2k-2i})$$

elde edilir.

$a \in O_{2k-2i-1}$ olsun. Yani a, $2k-2i-1$ tamsayısının bileşenleri tek tam sayı olan kompozisyonlarından herhangi biridir. $i \in \{0,...,k-1\}$ alınarak tek elemanlarının tamamını içermiş olur. $((2i+1) \odot O_{2k-2i-1}) \in O_{2k-2i-1+(2i+1)}$ yani $((2i+1) \odot O_{2k-2i-1}) \in O_{2k}$. Böylece

$$O_{2k} = \bigcup_{i=0}^{k-1} ((2i+1) \odot O_{2k-2i-1}).$$

elde edilerek ispat tamamlanır. □

Örnek 4.45. *Teorem 4.44 den yararlanılarak* 5 *tamsayısının bileşeni tek tam sayı olan kompozisyonları*

$$\begin{aligned} O_5 &= \{5\} \cup \bigcup_{i=0}^{1} ((2i+1) \odot O_{4-2i}) \\ &= \{5\} \cup \{1 \odot O_4\} \cup (3 \odot O_2) \end{aligned}$$

elde edilebilir.

$$O_4 = \{(3,1),(1,3),(1,1,1)\} \textit{ ve } O_2 = \{(1,1)\}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} O_5 &= \{5\} \cup \{(1,3,1),(1,1,3),(1,1,1,1)\} \cup \{(3,1,1)\} \\ &= \{5,(1,3,1),(1,1,3),(1,1,1,1),(3,1,1)\}. \end{aligned}$$

Bu kümeler yardımıyla n tamsayısının bileşenleri tek tam sayı olan kompozisyonlarının sayıları da elde edilebilir.

Sonuç 4.46. *n tamsayısının bileşenleri tek tam sayı olan kompozisyonlarının sayısı T_n, $n = 2k+1$ veya $n = 2k$ olmak üzere,*

$$\begin{aligned} \mathsf{T}_{2k+1} &= 1 + \sum_{i=0}^{k-1} \mathsf{T}_{2k-2i}, \\ \mathsf{T}_{2k} &= \sum_{i=0}^{k-1} \mathsf{T}_{2k-2i-1} \end{aligned}$$

dir.

Teorem 4.47. *Pozitif tamsayının bileşenleri tek tam sayı olan kompozisyonlarının sayısı Fibonacci sayısıdır.*

İspat n pozitif tamsayısının tek ve çift olma durumları incelenir.

$\mathsf{T}_0 = 0$ ve $\mathsf{T}_1 = 1$ olduğu açıktır. Öncelikle

$$\begin{aligned} \mathsf{T}_{2k+1} &= 1 + \sum_{i=0}^{k-1} \mathsf{T}_{2k-2i} \\ &= 1 + \mathsf{T}_{2k} + \sum_{i=1}^{k-1} \mathsf{T}_{2k-2i} \\ &= 1 + \mathsf{T}_{2k} + \sum_{i=0}^{k-2} \mathsf{T}_{2k-2(i+1)} \\ &= \underbrace{1 + \left(\sum_{i=0}^{k-2} \mathsf{T}_{2(k-1)-2i} \right)}_{\mathsf{T}_{2k-1}} + \mathsf{T}_{2k} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\mathsf{T}_{2k+1} = \mathsf{T}_{2k-1} + \mathsf{T}_{2k}$$

elde edilir. Şimdi çift olma durumu incelenirse

$$\begin{aligned} \mathsf{T}_{2k} &= \sum_{i=0}^{k-1} \mathsf{T}_{2k-2i-1} \\ &= \mathsf{T}_{2k-1} + \sum_{i=1}^{k-1} \mathsf{T}_{2k-2i-1} \end{aligned}$$

olur. Burada indis kaydırma yapılırsa

$$\begin{aligned} \mathsf{T}_{2k} &= \mathsf{T}_{2k-1} + \sum_{i=0}^{k-2} \mathsf{T}_{2k-2(i+1)-1} \\ &= \mathsf{T}_{2k-1} + \sum_{i=0}^{k-2} \mathsf{T}_{2(k-1)-2i-1} \\ &= \mathsf{T}_{2k-1} + \mathsf{T}_{2k-2} \end{aligned}$$

elde edilir. Fibonacci özyineleme bağıntısı elde edildiğinden ispat tamamlanır. □

Teorem 4.48. *$n \geq 1$ olmak üzere, n tamsayısı için bir tamsayının tek kompozisyonunun çarpım toplamı o_n ile gösterilmek üzere çift veya tek indisli terimleri için yineleme bağıntıları*

$$\begin{aligned} o_{2n} &= o_{2n-1} + 2o_{2n-2} + o_{2n-3} - o_{2n-4} \\ o_{2n+1} &= 3o_{2n-2} + 3o_{2n-1} - o_{2n-4}. \end{aligned}$$

dir.

İspat n poztitif tam sayı olmak üzere Teorem 4.44 ile

$$\begin{aligned} o_{2n+1} &= 2n + 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{b \in O_{2(n-i)}} (2i+1)\bar{b} \\ &= 2n + 1 + \sum_{i=0}^{n-1} (2i+1) o_{2(n-i)} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} o_{2n+3} &= 2n + 1 + 2 + \sum_{i=0}^{n} (2i+1) o_{2(n-i+1)} \\ &= 2 + o_{2n+2} + \left(2n + 1 + \sum_{i=0}^{n-1} (2i+1) o_{2(n-i)}\right) + 2\sum_{i=0}^{n-1} o_{2(n-i)} \\ &= 2 + o_{2n+2} + o_{2n+1} + 2\sum_{i=1}^{n} o_{2i} \end{aligned}$$

dir.

o_{2n+3} ve o_{2n+1} arasındaki fark hesaplandığında

$$o_{2n+3} = o_{2n+2} + 2o_{2n+1} + o_{2n} - o_{2n-1} \tag{4.18}$$

elde edilir. Teorem 4.44 ile

$$o_{2n} = \sum_{i=0}^{n-1} (2i+1) o_{2(n-i)-1}.$$

Buradan

$$\begin{aligned} o_{2n+2} &= o_{2n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} (2i+1+2) o_{2(n-i)-1} \\ o_{2n+2} &= o_{2n+1} + o_{2n} + 2\sum_{i=1}^{n} o_{2i-1}. \end{aligned}$$

o_{2n+2} ve o_{2n} arasındaki farktan çift terimler için öz yineleme elde edilir.

$$o_{2n+2} = o_{2n+1} + 2o_{2n} + o_{2n-1} - o_{2n-2}.$$

(4.18) eşitliğinde o_{2n+2} yerine yazılarak

$$o_{2n+3} = 3o_{2n} + 3o_{2n+1} - o_{2n-2}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Teorem 4.49. *Bir tamsayının bileşenleri tek tam sayı olan kompozisyonlarının bileşenlerinin çarpım toplamları*

$$o(x) = 1 + x^2 (x+1) \frac{-2x + x^2 - 1}{x + 2x^2 + x^3 - x^4 - 1}$$

dir ($|x| < 1$).

İspat Bir n tamsayısı için bir tamsayının tek kombinasyonunun çarpım toplamının çift veya tek indisli terimleri için yineleme bağıntıları

$$\begin{aligned} o_{2n+3} &= 3o_{2n} + 3o_{2n+1} - o_{2n-2} \\ o_{2n+2} &= o_{2n+1} + 2o_{2n} + o_{2n-1} - o_{2n-2} \end{aligned}$$

dir.

$$o(x) = \sum_{n=1}^{\infty} o_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} o_{2n} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} o_{2n+1} x^{2n+1}$$

olduğundan buradaki toplamlar bulunmalıdır.

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} o_{2n} x^{2n} \\ B(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} o_{2n+1} x^{2n+1}. \end{aligned}$$

Tek indisli özyineleme bağıntısı kullanılarak

$$(1 - 3x^2)B(x) = x^3(3 - x^2)A(x) + 4x^3 \tag{4.19}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$A(x) = \frac{x\,(x^2+1)}{(x^2-1)^2} B(x) + \frac{x^2\,(x^2+1)}{(x^2-1)^2}, \tag{4.20}$$

elde edilir. (4.19) ve (4.20) eşitlikleri birleştirilerek hem $A(x)$ hem de $B(x)$ bulunur,

$$\begin{aligned} B(x) &= -x^3 \frac{5x^2-6x^4+x^6-4}{(x+2x^2+x^3-x^4-1)(x-2x^2+x^3+x^4+1)} \\ A(x) &= x^2 \frac{(x^2+1)^2}{(x-2x^2+x^3+x^4+1)(-x-2x^2-x^3+x^4+1)}. \end{aligned}$$

Böylece üreteç fonksiyonu

$$\begin{aligned} o(x) &= 1+x^2(x+1)\frac{-2x+x^2-1}{x+2x^2+x^3-x^4-1} \\ &= 1+x^2+4x^3+7x^4+15x^5+32x^6+65x^7+.. \end{aligned}$$

elde edilir. □

n pozitif tamsayısının bileşeni tek tamsayılardan oluşan kompozisyonlarının sayısı tek Fibonacci sayıları olmasına rağmen çarpımlarının toplamının oluşturduğu dizi OnLine Encyclopedia of Integer Sequences'ta (OEIS) bulunmamaktadır (Sloane 2023).

4.1.4. Kısıtlanmış Tek Kompozisyonlar

Bu kısımda bileşenleri tek tam sayı olan ve bileşeninin büyüklüğü bir değerden küçük olan kompozisyonlar incelenecektir. Yani toplamları $m = 2t+1$ sabit tamsayısından küçük olan bir n tamsayısının bileşimine odaklanılacaktır. n, t pozitif tamsayılar olmak üzere n tamsayısının tek kompozisyonlarının bileşeni en fazla $2t+1$ olan kompozisyon kümesi için $O_{n,2t+1}$ gösterimi kullanılacaktır.

$$O_{n,m} = \left\{(2a_1+1, 2a_2+1, ..., 2a_k+1) : 2(a_1+...+a_k)+k = n,\ a_i \le m \text{ ve } i,k \in \mathbb{Z}^+.\right\}$$

$n \le m$, için $O_{n,m} = O_n$ olduğu açıktır. Kısıtlanmış tek kompozisyonlar için $(1\odot_{-})$ işlemi; n pozitif tam sayı, i pozitif tek tam sayı ve $b = (2b_1+1, 2b_2+1, ..., 2b_k+1)$ olmak üzere

$$(i \odot b) = (i, 2b_1+1, 2b_2+1, ..., 2b_k+1),$$

olacaktır. Bu tanım yardımıyla elemanların kümesi

$$i \odot O_n = \{i \odot b : b \in O_n\}. \tag{4.21}$$

ile gösterilsin.

Örnek 4.50. 5 *tamsayısının kompozisyonları*

$$\{5,(4,1),(1,4),(2,3),(3,2),(3,1,1),(1,3,1),(1,1,3),(2,2,1),(2,1,2),$$
$$(1,2,2),(2,1,1,1),(1,1,1,2),(1,2,1,1),(1,1,2,1),(1,1,1,1,1)\}$$

olmak üzere 16 *kompozisyonu vardır.* 5 *tamsayısının tek kompozisyonları*

$$\{5,(3,1,1),(1,3,1),(1,1,3),(1,1,1,1,1)\}$$

dir. Tek kompozisyonlarının bileşeninin büyüklüğü en fazla 3 *olan kompozisyon kümesi*

$$O_{5,3}=\{(3,1,1),(1,3,1),(1,1,3);(1,1,1,1,1)\}$$

dir.

Önerme 4.51. $t,n,$ *pozitif tamsayılar olmak üzere*

$$O_{n,m}=\bigcup_{i=0}^{t}((2i+1)\odot O_{n-2i-1,m}) \tag{4.22}$$

dir.

İspat $O_{n,m}$ tanımından dolayı kümedeki bileşenler pozitif tek tamsayılar olmalıdır. $O_{n,m}$ elde edilirken bileşenler toplamı n olmalıdır. Birinci bileşeni m kompozisyonun kalan bileşenlerinin toplamı $n-m$ olmalıdır. Bu bileşenlerin de en büyüğü m olacağından ifade $m\odot O_{n-m,m}$ olur ve ispat tamamlanır. □

Örnek 4.52. $n=7$ *ve* $t=2,$ *için*

$$O_{7,5}=\bigcup_{i=0}^{2}((2i+1)\odot O_{6-2i,5})=(1\odot O_{6,5})\cup(3\odot O_{4,5})\cup(5\odot O_{2,5})$$

incelendiğinde

$$O_{6,5}=\{(5,1),(3,3),(3,1,1,1),(1,5),(1,3,1,1),(1,1,3,1),(1,1,1,3),(1,1,1,1,1,1)\},$$

$$O_{4,5}=O_4=\{(3,1),(1,3),(1,1,1,1)\}$$

ve

$$O_{2,5}=O_2=\{(1,1)\}$$

kümelerinden

$$O_{7,5} = \left\{ \begin{array}{c} (5,1,1),(3,3,1),(3,1,3),(3,1,1,1,1),(1,5,1),(1,1,5),(1,3,3), \\ (1,3,1,1,1),(1,1,3,1,1),(1,1,1,3,1),(1,1,1,1,3),(1,1,1,1,1,1,1) \end{array} \right\}$$

elde edilir.

Kısıtlanmış tek kompozisyonlar için çarpım fonksiyonu $i, m, k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere;

$$o_{n,m} = T(O_{n,m}) = \sum_{\substack{a_1+a_2+\ldots+a_k=n \\ a_i \le m}} a_1.a_2.\ldots.a_k$$

tanımlansın. $n < 0$ için $o_{n,m} = 0$ dir. Böylece $n \le m$ için $o_{n,m} = o_n$ olur.

Örnek 4.53. $n = 4$ *ve* $m = 5$ *için,*

$$o_{4,5} = 3.1 + 1.3 + 1.1.1 = 7$$

elde edilir.

Teorem 4.54. n, t *pozitif tamsayılar ve* $1 < n$ *olmak üzere*

$$o_{n,m} = \sum_{i=0}^{t} (2i+1).o_{n-2i-1,m}, \tag{4.23}$$

$$o_{n,m} = o_{n-2,m} + o_{n-1,m} - m.o_{n-2t-3,m} + 2\sum_{i=1} o_{n-2i-1,m} \tag{4.24}$$

dir.

İspat (4.23) eşitliği için ispat,

$$O_{n,m} = \bigcup_{i=0}^{t} ((2i+1) \odot O_{n-2i-1,m})$$

kümesinden yararlanılarak yapılabilir. Çarpım fonksiyonuyla

$$\begin{aligned} o_{n,2t+1} &= \sum_{i=0}^{t} \sum_{b \in O_{n-2i-1,2t+1}} (2i+1).\overbrace{a_1.a_2.\ldots.a_k}^{\bar{b}} \\ &= 2\sum_{i=0}^{t} i \sum_{b \in O_{n-2i-1,2t+1}} \bar{b} + \sum_{i=0}^{t} \sum_{b \in O_{n-2i-1,2t+1}} \bar{b} \\ &= 2\sum_{i=0}^{t} i.o_{n-2i-1,2t+1} + \sum_{i=0}^{t} o_{n-2i-1,2t+1} \\ &= \sum_{i=0}^{t} (2i+1).o_{n-2i-1,2t+1} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (4.23) eşitliği için ispat tamamlanır. (4.24) eşitliği için;

$$\begin{aligned} o_{n-2,2t+1} &= \sum_{i=0}^{t}((2i+1).o_{n-2i-3,2t+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{t+1}((2i-1).o_{n-2i-1,2t+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{t+1}2i.o_{n-2i-1,2t+1} - \sum_{i=1}^{t+1}o_{n-2i-1,2t+1} \end{aligned}$$

elde edilir ve gerekli aritmetik işlemler yapılarak

$$\begin{aligned} o_{n-2,2t+1} &= \sum_{i=1}^{t+1}2i.o_{n-2i-1,2t+1} + \sum_{i=1}^{t+1}o_{n-2i-1,2t+1} - \sum_{i=1}^{t+1}o_{n-2i-1,2t+1} - \sum_{i=1}^{t+1}o_{n-2i-1,2t+1} \\ &= \sum_{i=0}^{t}(2i+1).o_{n-2i-1,2t+1} + (2t+3).o_{n-2t-3,2t+1} - o_{n-1,2t+1} - 2\sum_{i=1}^{t+1}o_{n-2i-1,2t+1} \\ &= o_{n,2t+1} + 2t.o_{n-2t-3,2t+1} + 3o_{n-2t-3,2t+1} - o_{n-1,2t+1} \\ &\quad -2o_{n-2t-3,2t+1} - 2\sum_{i=1}^{t}o_{n-2i-1,2t+1} \\ &= o_{n,2t+1} - o_{n-1,2t+1} + (2t+1).o_{n-2t-3,2t+1} - 2\sum_{i=1}^{t}o_{n-2i-1,2t+1} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$o_{n,2t+1} = o_{n-2,2t+1} + o_{n-1,2t+1} - (2t+1).o_{n-2t-3,2t+1} + 2\sum_{i=0}^{t}o_{n-2i-1,2t+1}$$

elde edilerek ispat tamamlanır. □

Örnek 4.55. *(4.22) eşitliğinde $n = 7$ ve $t = 2$ alınırsa,*

$$O_{7,5} = \bigcup_{i=0}^{2}((2i+1)\odot O_{6-2i,5}) = (1\odot O_{6,5})\cup(3\odot O_{4,5})\cup(5\odot O_{2,5}).$$

$$O_{6,3} = \bigcup_{i=0}^{1}((2i+1)\odot O_{5-2i,3}) = (1\odot O_{5,3})\cup(3\odot O_{3,3}).$$

$$O_{7,3} = \bigcup_{i=0}^{1}((2i+1)\odot O_{6-2i,3}) = (1\odot O_{6,3})\cup(3\odot O_{4,3})$$

kümeleri elde edilir.

(4.23) *eşitliğinden,* $o_{7,5} = 58,\ o_{6,3} = 22$ *ve* $o_{7,3} = 43$ *olduğu gözlemlenir.*

(4.24) eşitliğinden $o_{n,m}$ *değerleri hesaplanabilir;*

$n = 7$ *ve* $t = 2$ *için,*

$$\begin{aligned} o_{7,5} &= o_{6,5} + o_{5,5} - 5.o_{2,5} + 2(o_{4,5} + o_{2,5}) \\ &= 32 + 15 - 5.1 + 2.8 \\ &= 58, \end{aligned}$$

$n = 6$ *ve* $t = 1$ *için,*

$$\begin{aligned} o_{6,3} &= o_{4,3} + o_{5,3} - 3.o_{1,3} + 2o_{3,3} \\ &= 7 + 10 - 3.1 + 2.4 \\ &= 22, \end{aligned}$$

$n = 7$ *ve* $t = 1$ *için,*

$$\begin{aligned} o_{7,3} &= o_{6,3} + o_{5,3} - 3.o_{2,3} + 2o_{4,3} \\ &= 22 + 10 - 3.1 + 2.7 \\ &= 43 \end{aligned}$$

elde edilir.

4.2. Kompozisyon Renklendirmeleri ve Desenler

Bu bölümde kompozisyonların renklendirmeleri üzerine çalışmalar yapılacaktır. Renklendirmeyle elde edilecek desen sayıları için üreteç fonksiyonları bulunacak, kompozisyonların renklendirmeleriyle elde edilen desenler oluşturulacaktır.

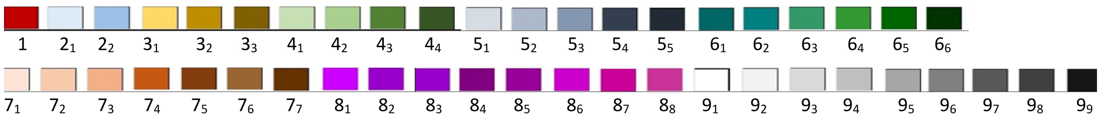
Son yıllarda yapılan çalışmalarda, bir m tamsayısının n-renk kompozisyonu (veya renk kompozisyonları), bir parçalanışın n boyutulu bileşeninin n rengini alabileceği kompozisyonu olarak tanımlanmaktadır (Agarval, 1987; Agarval, 2000; Shapcott, 2012).

Örnek 4.56. $n = 3$ *için* 8 *tane* n*-renk kompozisyonu vardır. Bunlar*

$$(1_1, 1_1, 1_1), (2_1, 1_1), (2_2, 1_1), (1_1, 2_1), (1_1, 2_2), (3_1), (3_2), (3_3)$$

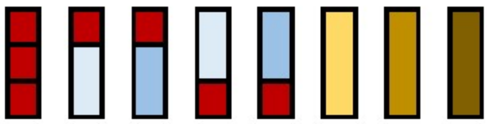
dir.

Renklendirme işlemi yaparken her bir bileşenin farklı rengi olması için bazı bileşenlerin Şekil 4.3 deki gibi renk kataloğu oluşturalım.



Şekil 4.3. Bileşen Renk Kataloğu

Bu katalog yardımıyla 3 tamsayısının 8 tane renk kompozisyonunun görseli aşağıdaki gibi 3x1 boyutlu dikdörtgenlerde temsil edilebilir,



Şekil 4.4. 3'ün n-renk kompozisyonları

Kompozisyon kümelerinden desenler yapmak için kümelerin elemanları arasında da bir düzene ihtiyaç vardır.

m bir pozitif tam sayı olsun. Sözcük sırasına göre, $1 \odot P_{m-1}$ kümesinin öğeleri $1 \odot P_{m-1} = \{p_{m,1}, ..., p_{m,2^{m-2}}\}$ gibi sıralanabilir. Ayrıca, $1 \oplus P_{m-1}$ kümesinin elemanları $\{q_{m,1}, ..., q_{m,2^{m-2}}\}$ gibi ters sözcük sırasına göre sıralanabilir. Böylece

$$P_m = \{a_{m,i} = p_{m,i} : a_{m,i} \in 1 \odot P_{m-1}\} \cup \{a_{m,2^{m-2}+i} = q_{m,i} : q_{m,i} \in 1 \oplus P_{m-1}\}$$

elde edilir. O halde, P_{m+1} kümesinin tüm öğeleri sıralanabilir.

Ayrıca $a_{m,1} = (1, ..., 1)$, $a_{m,2} = (1, ..., 1, 2)$, ve $a_{m,2^{m-1}} = (m)$ olduğu da gözlemlenebilir.

4.2.1. Pozitif Bir Tamsayının Renk Kompozisyonları

Agarwal (2000) çalışmasındaki tanımda n-renk kompozisyonundaki bileşenlerin konumu göz ardı edilmiştir. Bileşenin kompozisyonlardaki konumlarına göre kompozisyonları renklendirmek istenirse, n-renk kompozisyonu kavramını Tanım 4.57 daki kavrama genelleştirmek gerekmektedir.

Tanım 4.57. *n pozitif bir tam sayı ve α, β renk kümeleri olsun (α kümesi, n boyutundaki parçanın α_n rengini alabileceği anlamına gelir). m tamsayının kompozisyonunun n boyutundaki ilk kısmı α_n rengini ve n boyutundaki diğer kısımları β_n rengini alıyorsa bu kompozisyon $(\alpha - \beta)$-renk kompozisyonu olarak adlandırılır.*

Şimdi renk kompozisyonları için bir algoritma verelim.

Algoritma 2 Bir pozitif tamsayının $P[\_]$ kompozisyonlarından n-renk kompozisyonlarının $CC[\_]$ kümesini döndüren algoritmadır.

procedure **COMP**(P[_]: Bir tamsayının matrisi; CC[_]: Dizi matrisi)
    Local variables: $a, k, l, C[\_] : integer;$
    Local variables: $s : string;$
    $k, l \leftarrow 0;$
    $s \leftarrow "";$
    while $0 < P[k+1]$ **do**
        $s \leftarrow s + to\_string(P[k]) + "\_1 + ";$
        $C[k] \leftarrow 1;$
        $k++;$
    end while
    $C[k] \leftarrow 1;$
    $s \leftarrow s + to\_stringP[k] + "\_1";$
    $CC[l] \leftarrow s;$
    while $0 < a$ **do**
        $a \leftarrow 1;$
        $b, k \leftarrow 0;$
        while $0 < P[k$ **do**
            while $C[k] < P[k]$ **do**
                $k++;$
            end while
            $a \leftarrow k - 1;$
            while $C[k] = P[k]$ **do**
                $k++;$
            end while
            $b \leftarrow k - 1;$
        end while
        $C[a]++;$
        if $C[b] = P[b]$ **then**
            $i \leftarrow a + 1;$

And we need to put some additional text between…

Algoritma 2 (Devamı)

```
            while 0 < P[j][l+1] do
                C[i] ← 1;
                i++;
            end while
        end if
        t ← 0;
        s ← "";
        while 0 < P[k+1] and 0 <= a do
            s ← s + to_string(P[k]) + "_" + to_string(C[k]) + " + ";
            t++;
        end while
        if 0 <= a then
            s ← s + to_stringP[k] + "_" + to_string(C[k]);
        end if
        l++;
        CC[l] ← s;
    end while
end procedure
```

İmplementasyon 2: Herhangi bir pozitif tamsayının kompozisyonu için bir C++ implementasyonu ve örnek olarak 9 tamsayısının $(3, 2, 4)$ kompozisyonlarının renklendirmesinin bulunması.

```
%% C++ code
#include <iostream>
#include <stdlib.h>
#include <windows.h>
using namespace std;
int main(void)
{
int n;
int P[7]={ 3,2,4,0, 0,0,0 };
int C[7];
int a=1;int k=0;
int b=-1;
int l=0;
k=0;
while (0<P[k+1]){
          C[k]=1;
          cout<<" "<<P[k]<<"_ 1 + "; k++;
  }
  C[k]=1;
  cout<<" "<<P[k]<<"_ 1 ";
  while (0<=a){
        a=1;
        b=0;
        k=0;
```

```
 while (0<P[k]){
   while (0<P[k] && C[k]<P[k]){  k++;}
          a=k-1;
          while (0<P[k] && C[k]==P[k]){  k++;}
                b=k-1;
                }
C[a]++;
cout<<"\n " ;
 if (P[b]==C[b]) {int i=a+1; while  (0<P[i] ) {C[i]=1;i++;}
     }
  int t=0;
  while (0<P[t+1] && 0<=a ){
cout<<" "<<P[t]<<"_ "<<C[t]<<" + "; t++;}
    if (0<=a ){ cout<<" "<<P[t]<<"_ "<<C[t]<<" ";}
}
   }
```

Tanım 4.58. *Bir m tamsayının $(\alpha - \beta)$-renk kompozisyonlarının birleştirilmesiyle elde edilen desene, m'nin $(\alpha - \beta)$-deseni denir.*

Bu tanım, Agarval (2000) kaynağındaki n-renk kompozisyonunun bir genellemesidir. Şimdi bir tamsayının $(\alpha-\beta)$-renk kompozisyonlarının sayısının ve bir tamsayının $(\alpha-\beta)$-deseni üzerinde durulacaktır. (4.1) eşitliği ile bir tamsayının $(\alpha - \beta)$-renk kompozisyon sayıları için üreteç fonksiyonu ve $(\alpha - \beta)$-desenleri arasındaki ilişkiler elde edilecektir.

Teorem 4.59. *α, β renk kümeleri olsun. Eğer $T(\beta, x)$ bir tamsayının β-renk kompozisyonunun sayısının üreteç fonksiyonu ve $S(\alpha, x)$ α'nın eleman sayısı için bir üreteç fonksiyonu ise, o zaman $(\alpha - \beta)$-renk kompozisyon sayısının üreteç fonksiyonu*

$$T(\alpha, \beta, x) = S(\alpha, x)(1 + T(\beta, x))$$

dir.

İspat $T(\beta, n)$, bir n tamsayısının β-renk kompozisyonunun sayısı olsun. $T(\beta, x)$'nin bir tamsayının β-renk kompozisyonu sayısının üreteç fonksiyonu olduğunu varsayalım,

$$T(\beta, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T(\beta, n)x^n.$$

(4.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned} T(\alpha, \beta, n+1) &= \alpha_1 T(\beta, n) + \sum_{y=1}^{n} \alpha_{1+y} T(\beta, n-y) \\ &= \sum_{y=1}^{n+1} \alpha_y T(\beta, n+1-y) \end{aligned}$$

ve böylece

$$\begin{aligned} T(\alpha, \beta, x) &= \alpha_1 x + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{y=1}^{n+1} \alpha_y T(\beta, n+1-y) x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{y=1}^{n} \alpha_y T(\beta, n-y) x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n (1 + \sum_{n=1}^{\infty} T(\beta, n) x^n) \\ &= S(\alpha, x)(1 + T(\beta, x)) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 4.59 kullanılarak, bazı iyi bilinen özdeşlikler yeniden elde edilebilir ve herhangi bir renklendirme kuralına sahip kompozisyonların sayıları için üreteç fonksiyonu elde edilebilir.

1) $\alpha = \beta$ ise $T(\alpha, \beta, x) = T(\beta, x)$ olur ve buradan

$$T(\beta, x) = \frac{S(\alpha, x)}{1 - S(\alpha, x)}$$

sonucu elde edilir.

2) α, β renk dizisindeki her parça bir renk alabilir (yani $\alpha = \beta = \{1, 1, ...\}$). Bu, pozitif tam sayıların β-renk kompozisyonlarının sayıları için üreteç fonksiyonunun, pozitif tamsayıların kompozisyonlarının sayısı için üreteç fonksiyonu ile aynı olduğu anlamına gelir,

$$S(\alpha, x) = \frac{x}{1 - x}$$

ve böylece Teorem 4.59 den

$$T(\beta, x) = \frac{x}{1-2x}$$

pozitif tamsayıların kompozisyon sayıları için üreteç fonksiyonudur. Bu nedenle, pozitif bir m tamsayısının kompozisyon sayısının 2^{m-1} olduğu yeniden elde edilmiştir.

Teorem 4.60. *m pozitif bir tam sayı ve $T_m(\alpha, \beta)$ ($T_m(\beta)$, sırasıyla) (α, β)-renk kompozisyonlarının ((β)-renk kompozisyonları) sayısı olmak üzere*

$$T_m(\alpha, \beta) = \alpha_m + \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i T_{m-i}(\beta)$$

dir.

İspat m pozitif bir tam sayı ve $T_m(\alpha, \beta)$ ($T_m(\beta)$, sırasıyla) (α, β)-renk kompozisyonlarının ((β)-renk kompozisyonları) sayısı olmak üzere

$$\begin{aligned} T(\beta, x) &= \sum_{m=1}^{\infty} T_m(\beta) x^m, \\ T(\alpha, \beta, x) &= \sum_{m=1}^{\infty} T_m(\alpha, \beta) x^m, \\ S(\alpha, x) &= \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m x^m. \end{aligned}$$

Teorem 4.59 ve serilerde Cauchy çarpımı yardımıyla

$$\begin{aligned} T(\alpha, \beta, x) &= \left(\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m x^m \right) \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} T_m(\beta) x^m \right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\alpha_m + \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i T_{m-i}(\beta) \right) x^m \end{aligned}$$

elde edilir. x katsayılarını karşılaştırarak

$$T_m(\alpha, \beta) = \alpha_m + \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i T_{m-i}(\beta)$$

elde edilir. □

Sonuç 4.61. *β renk kümesi olsun. O zaman pozitif bir m tam sayısının β-renk kompozisyonlarının $T_m(\beta)$ sayısı için özyineleme bağıntısı*

$$T_m(\beta) = \beta_m + \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i T_{m-i}(\beta)$$

dır.

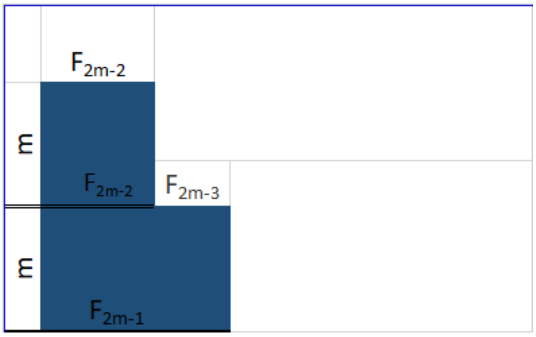
İspat Teorem 4.59 de eş değer olan renk kümeleri seçilirse, yani $\alpha = \beta$ seçilirse, m pozitif tamsayısı için $T_m(\beta) = T_m(\alpha, \beta)$. Böylece

$$T_m(\beta) = \beta_m + \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i T_{m-i}(\beta)$$

elde edilir. □

4.2.2. Pozitif Bir Tamsayının n-renk Kompozisyonları

m pozitif tamsayısı için $1 \odot P_{m-1}$ kümesinin elemanları, birinci kısmı 1 ve diğerleri $(m-1)$ tamsayısının kompozisyonu olan m kompozisyonlarıdır ve dolayısıyla $1 \odot P_{m-1}$ tarafından üretilen n-renk kompozisyonlarının sayısı F_{2m-2} dir. Bunlar Şekil 4.5 deki gibi yapılır ve sırasına göre birleştirilirse $m \times F_{2m-2}$ boyutlu A_m şekli oluşturulur.



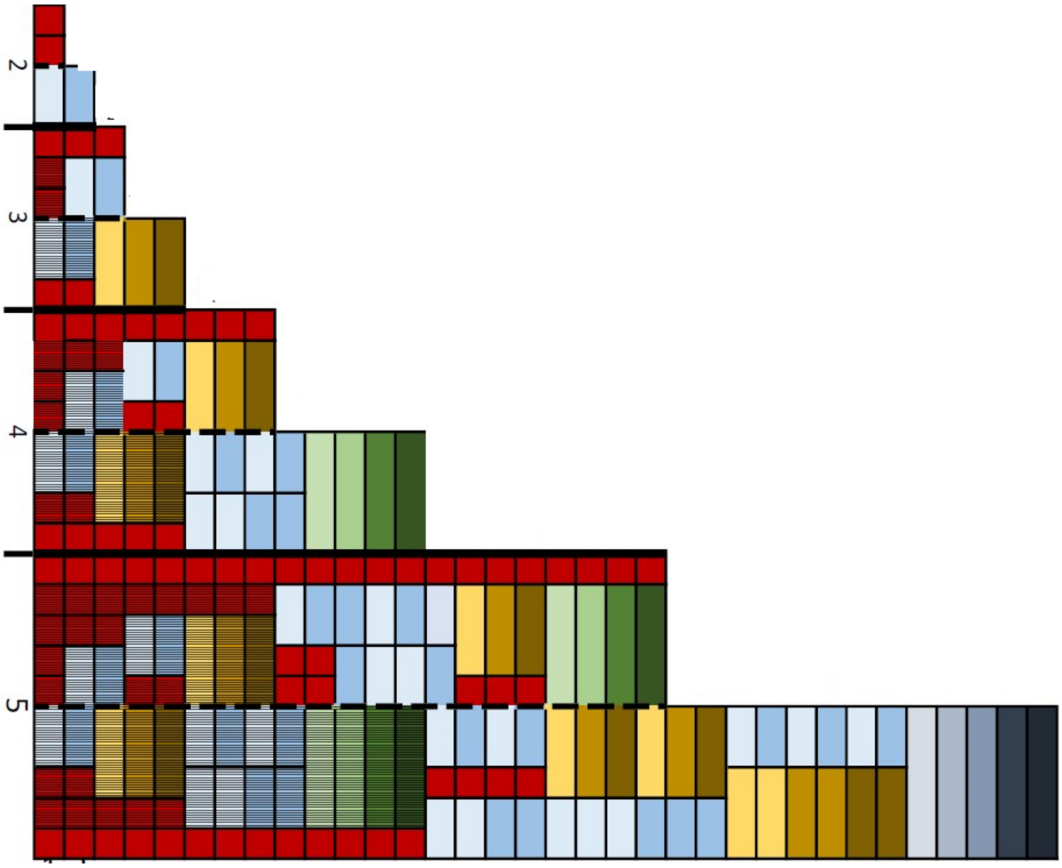
Şekil 4.5. $1 \odot P_m$ ve $1 \oplus P_m$ kümeleri tarafından oluşturulan dikdörtgenlerin boyutları.

Diğer yandan, $1 \oplus P_{m-1}$ kümesinin elemanları, m tamsayısının ilk bileşeni hariç, $m-1$ tamsayısının kompozisyonlarının bileşenleriyle aynı sırada olan m tamsayısının diğer kompozisyonlarıdır. m tamsayısının n-renk kompozisyonlarının sayısı F_{2m} olduğu için, $1 \oplus P_{m-1}$ kümesi tarafından üretilen n-renk kompozisyonlarının sayısı F_{2m-1} olur. Daha sonra $1 \oplus P_{m-1}$ kümesindeki sıralama kullanılarak ve Şekil 4.5 deki gibi $1 \oplus P_{m-1}$ tarafından oluşturulan n-renk kompozisyonları birleştirilerek, Şekil 4.5 in altındaki $m \times F_{2m-1}$ boyutuna sahip dikdörtgen B_m elde edilir. $1 \oplus P_{m-1}$ kümesindeki düzen nedeniyle, B_m deseninin B_{m-1} içerir. Ayrıca, Şekil 4.5 deki her bir adımın uzunluğunun Fibonacci sayıları olduğu ve dolayısıyla alanlarının oranının altın oran olduğu gözlemlenir. n tamsayısı büyüdükçe dikdöretgenlerin alanları altın orana yaklaşmaktadır. Yani

$$\lim_{m\to\infty} \frac{B_m}{A_m} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

dir.

(4.1) eşitliği kullanılarak, pozitif bir m tam sayısının n-renk kompozisyonlarının bir deseni yapılabilir. (4.1) eşitliği nedeniyle, m tamsayısının n-renk kompozisyonlarının deseninin $m-1$ tamsayısının n-renk kompozisyonlarının desenini içerir. Oluşturulan desendeki her adımın uzunluğu Fibonacci sayılarıdır.



Şekil 4.6. $2, 3, 4$ ve 5 tamsayılarının n-renk kompozisyonlarının desenleri.

Pozitif tamsayıların kompozisyonlarının bileşenlerine farklı renklendirme kuralları uygulanarak bunların farklı örüntüleri elde edilir ve sayıları için üreteç fonksiyonları bulunabilir. Teorem 4.59 kullanılarak, pozitif tamsayıların herhangi bir renk kompozisyonunun sayıları için üreteç fonksiyonları bulunur.

4.2.3. Pozitif Bir Tamsayının İlk Bileşeni Tek Renk Olan Renk Kompozisyonları

Bu bölümde, $\alpha = \{1, 1, 1, 1, ..., 1\}$ ve β pozitif tam sayılar kümesi olduğunda yani ilk bileşeni bir renk alırken, k büyüklüğündeki diğer kısımlar k renk alabiliyorken, pozitif tamsayıların $(\alpha - \beta)$-renk kompozisyonları ele alınacaktır.

Pozitif bir m tamsayısı renk kompozisyonuna göre $(1 \odot P_m)$ ve $(1 \oplus P_m)$ kümeleri tarafından oluşturulan ilk kısımları beyaz renk alıp ve k büyüklüğündeki diğer bileşenler k renk alan desen üzerinde de çalışılacaktır.

Teorem 4.62. *Pozitif bir m tamsayısının, ilk bileşenleri bir renk ve k büyüklüğündeki diğer bileşenleri k renk alabilen renk kompozisyonunun sayısı, m. tek Fibonacci sayısı F_{2m-1}'dir.*

İspat $\alpha = \{1, 1, ..., 1\}$ ve β pozitif tam sayı kümesi olsun. Bu, ilk parçanın bir renk olduğu ve k boyutundaki diğer parçanın k rengi alabileceği anlamına gelir.

$$S(\alpha, x) = \frac{x}{1-x}$$

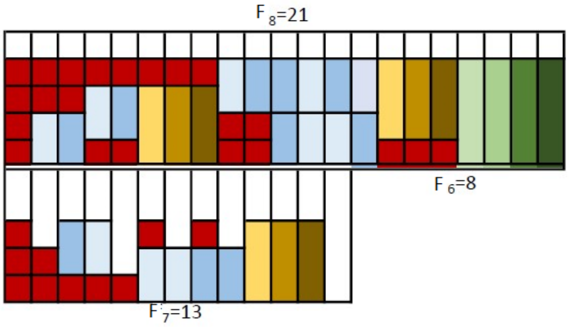
ve böylece $T(\beta, x)$ pozitif tamsayıların renk kompozisyonlarının sayıları için üreteç fonksiyonudur. Teorem 4.59 den

$$T(\alpha, \beta, x) = \frac{x - x^2}{1 - 3x + x^2} = x + 2x^2 + 5x^3 + 13x^4 + 34x^5 + 89x^6....$$

üreteç fonksiyonu elde edilir. Pozitif tamsayıların ilk bileşeni bir renk, k büyüklüğündeki diğer kısımları k-renk alabilecek şekilde renk kompozisyonlarının sayısını üreten fonksiyondur. Ayrıca $T(\alpha, \beta, x)$ tek Fibonacci sayıları için üreteç fonksiyonu olduğundan ispat tamamlanır. $\square$

Bir m tamsayının $1 \odot P_m$ ve $1 \oplus P_m$ kümeleri tarafından oluşturulan elemanlara odaklanılacaktır. $1 \odot P_m$ kümesinin elemanları, ilk kısmı beyaz ve diğerleri $(m-1)$ tamsayısının n-renk kompozisyonu olan m tamsayısının bazı renk kompozisyonlarını üretir ve dolayısıyla bu renk kompozisyonunun sayıları F_{2m-2} dir. Benzer şekilde $1 \oplus P_m$ kümesinin elemanları da diğerlerini oluşturur ve bu nedenle bunların sayısı F_{2m-3} olur.

Örnek 4.63. 5 *tamsayısının renk kompozisyonlarının sayısının renklendirme kuralına göre* 5. *tek Fibonacci sayısı* 34 *tür.*



Şekil 4.7. 5 tamsayısının ilk bileşeni beyaz olan renk kompozsiyon deseni.

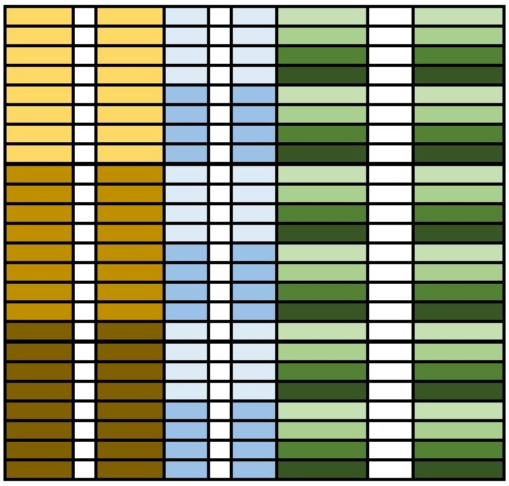
4.2.4. Pozitif Bir Tamsayının Palindrom Renk Kompozisyonları

Bu bölümde renklere göre palindrom olan kompozisyonlar üzerine çalışılacaktır.

3 ten büyük pozitif bir tamsayı, bir c tamsayısı için $a = (c, 2, c)$ veya $a = (c, 1, c)$ kompozisyonuna sahiptir. c boyutundaki parçalar c rengini alabilir ve ortada olan parçalardan hem 2 hem de 1 renk alabilir. Bu durumda x'in deseni renge göre palindromdur ve x parçalarının palindrom rengini elde ederiz.

Tanım 4.64. *Bir tamsayının palindrom renk parçalanışı ile renk kompozisyonuna bir tamsayının palindrom renk kompozisyonu denir.*

Palindrom renk kompozisyonlarının sayılarıyla oluşan dizi $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ ile gösterilsin ve bu dizinin bazı terimlerini hesaplamak kolaydır; $c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 4, c_4 = 8, c_5 = 17, \ldots$. Buna karşılık gelen dizi OnLine Encyclopedia of Integer Sequences'ta (OEIS) bulunmamaktadır (Sloane 2023).



Şekil 4.8. $(7,5,10)$ için palindrom renk kompozisyon deseni.

Teorem 4.65. *Palindrom renk kompozisyonlarının sayısı için üreteç fonksiyonu*

$$pc(x) = x\frac{x^2 - x^4 - 1}{2x + x^2 - 2x^3 + x^5 - 1}$$

dir.

İspat Parçanın palindrom renginin tanımı nedeniyle, palindrom renk kompozisyonlarının parçaları için renk kümesi

$$\alpha = \beta = \{\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1, \alpha_5 = \alpha_6 = 2, \alpha_7 = \alpha_8 = 3...\}$$

şeklindedir. Pozitif tamsayıların üreteç fonksiyonu

$$\sum_{i=1}^{\infty} ix^i = \frac{x}{(x-1)^2}$$

dir. Bu üreteç fonksiyonu kullanılarak

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} ix^{2i+1} &= \frac{x^3}{(x^2-1)^2},\\ \sum_{i=1}^{\infty} ix^{2i+2} &= \frac{x^4}{(x^2-1)^2}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}S(\alpha, x) &= x + x^2 + \sum_{i=1}^{\infty} ix^{i+3} + \sum_{i=1}^{\infty} ix^{2i+1}\\ &= x\frac{x^4 - x^2 + 1}{(x+1)(x-1)^2}\end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra Teorem 4.59 ile palindrom renk kompozisyonlarının sayıları için üreteç fonksiyonu

$$T(\alpha, \beta, x) = x\frac{x^2 - x^4 - 1}{2x + x^2 - 2x^3 + x^5 - 1}$$

şeklinde elde edilir. □

Teorem 4.66. *$m > 4$ olmak üzere palindrom renk kompozisyonlarının özyineleme bağıntısı*

$$c_m = c_{m-5} - 2c_{m-3} + c_{m-2} + 2c_{m-1}$$

şeklindedir, burada $c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 4, c_4 = 8$.

İspat Palindrom renk kompozisyonlarının sayıları için üreteç fonksiyonu

$$\begin{aligned} pc(x) &= x\frac{x^2 - x^4 - 1}{2x + x^2 - 2x^3 + x^5 - 1} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^i. \end{aligned}$$

Buradan

$$(2x + x^2 - 2x^3 + x^5 - 1)\sum_{i=1}^{\infty} c_i x^i = x^3 - x^5 - x$$

ve böylece

$$\sum_{m=2}^{5} 2c_{m-1}x^m + \sum_{m=3}^{5} c_{m-2}x^m - \sum_{m=4}^{5} 2c_{m-3}x^m + \sum_{m=6}^{\infty}(2c_{m-1} + c_{m-2} - 2c_{m-3} + c_{m-5})x^m$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m + x^3 - x^5 - x.$$

Yukarıdaki denklemin her iki tarafındaki x katsayıları eşitlenerek

$$c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 4, c_4 = 8$$

bulunur ve

$$c_m = 2c_{m-1} + c_{m-2} - 2c_{m-3} + c_{m-5}$$

özyineleme bağıntısı elde edilir. □

Sonuç 4.67. *$m > 4$ olmak üzere pozitif bir m tamsayısının palindromik renk kompozisyonlarının c_m sayısı için rekürans bağıntısı*

$$c_m = \left\| \frac{m-1}{2} \right\| + \sum_{i=1}^{m-1} \left\| \frac{i-1}{2} \right\| c_{m-i}$$

dir.

İspat Polindromik renk kompozisyonlarının tanımı gereği, renk kümesi

$$\beta = \{\beta_m = \left\| \frac{m-1}{2} \right\| : \ m \text{ pozitif tamsayı}\}$$

şeklindedir. Sonuç 4.61 dan m pozitif tamsayısı için $c_m = c_m(\beta)$ elde edilerek ispat tamamlanır. □

4.2.5. Palindrom Kompozisyon Kümeleri

Bu kısımda, pozitif tamsayıların palindrom kompozisyonlarının kümesini, palindrom kompozisyonlarının sayıları için üreteç fonksiyonu çalışılacaktır.

m ve i pozitif tamsayılar olmak üzere, C_m, m pozitif tamsayısının bir dizi palindrom kompozisyon kümesi olsun.

$$\begin{aligned} (i \cdot P_m) &= \{(a, i, a) : x \in P_m\} = \{(a_1, ..., a_n, i, a_n, ..., a_1) : a_1 + ... + a_n = m\} \\ (i \circ P_m) &= \{(a, i, i, a) : a \in P_m\} = \{(a_1, ..., a_n, i, i, a_n, ..., a_1) : a_1 + ... + a_n = m\} \end{aligned}$$

şeklinde iki küme tanımlansın. i, j pozitif tamsayılar ve $i \neq j$ ise $(i \cdot P_m) \cap (i \circ P_m) = \emptyset$ olduğu küme tanımlarından gözlemlenir. Şimdi pozitif bir tam sayının palindrom kompozisyon kümesini karakterize edilecek ve kümedeki eleman sayısı incelenecektir.

Teorem 4.68. *m pozitif tamsayısının palindrom kompozisyon kümesi*

$$\begin{aligned} C_{2m+1} &= \cup_{i=0}^{m}((2i+1) \cdot P_{m-i}) \\ C_{2m} &= (\cup_{i=1}^{m}(2i \cdot P_{m-i})) \cup (\cup_{i=1}^{m}(i \circ P_{m-i})) \end{aligned}$$

dir.

İspat m pozitif tam sayı olmak üzere,

i) Eşitliğin sol tarafının sağ tarafta olduğunu göstermek yeterlidir. $a \in C_{2m+1}$ alınsın ve böylece $a = (a_1, ..., a_n, y, a_n, ..., a_1)$ burada $2(a_1 + ... + a_n) + y = 2m + 1$ dir. Bu nedenle bazı i ler için $y = 2i + 1$ ve böylece $a_1 + ... + a_n = m - i$. Buradan $a \in (y \cdot P_{m-i})$.

ii) $a = (t_1, ..., t_l) \in C_{2m}$. $l = 2i + 1$ ise bazı j ler için $a = (t_1, ..., t_i, 2j, t_i, ..., t_1)$ ve $t_1 + ... + t_i = m - j$. Buradan $a \in (2j \cdot P_{m-j})$. Diğer yandan, $l = 2i$ ise bazı j ler için $a = (t_1, ..., t_{i-1}, j, j, t_{i-1}, ..., t_1)$ ve $t_1 + ... + t_{i-1} + j = m$. Buradan $a \in (j \circ P_{m-j})$. □

Desen oluşturmak için C_{2m} ve C_{2m+1} kümelerinin elemanları için sıralama bağıntısına ihtiyaç vardır. İlk olarak, sözcük sırası P_m kümesinin $\{a_{m,1}, ..., a_{m,2^{m-1}}\}$ uygulanabilir.

$a \in C_{2m+1}$ olsun. Sonra bir pozitif tam sayı i ve $a = (a_{m-i,j}, i, a_{m-i,j})$ olacak şekilde bir $a_{m-i,j} \in P_{m-i}$ elemanı vardır ve a elemanı $a_{2m+1,i,j}$ ile gösterilsin.

Şimdi $a \in C_{2m}$ olsun ve dolayısıyla i, j pozitif tam sayıları ve $a_{m-i,j} \in P_{m-i}$ elemanı vardır, öyle ki a kompozisyonunun formu ya $a = (a_{m-i,j}, i, i, a_{m-i})$ ya da $a = (a_{m-i,j}, 2i, a_{m-i,j})$ dir. Sonra a, sırasıyla $a_{2m+1,i,i,j}$ ve $a_{2m+1,i,2i,j}$ olacak şekilde numaralandırılsın. Dizin sözcük sırasına göre sıralanırken C_{2m} ve C_{2m+1} kümelerinin tüm öğeleri sıralanır.

Şimdi amaç hem palindrom kompozisyonlarının hem de renk palindrom kompozisyonlarının sayısı için üreteç fonksiyonlarının genel durumu araştırılmaktadır. Bu nedenle genel form için aşağıdaki notasyonlara ihtiyaç vardır;

Palindromik tipte eksen değişimini gösteren sayıların üreteç fonksiyonu $\chi(x)$ olsun. Yani $\chi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ dir. Burada a_i merkezdeki değişim sayısını gösterecektir.
Palindromik tipte kanatların değişimini gösteren sayıların üreteç fonksiyonu $P(x)$ olsun. Yani $P(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} b_n x^n$ ve böylece b_n, n tamsayısının palindromik türündeki kanatların sayılarıdır.

Palindrom sayılar için üreteç fonksiyonların genel formunu elde etmek için $\chi(x)$ ve $P(x)$ fonksiyonlarında yeni fonksiyonlara ihtiyaç vardır:

$$Pb(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^{2i}, \qquad \chi b(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^{2i},$$
$$\chi o(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{2i+1} x^{2i}, \quad \chi e(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{2i} x^{2i}.$$

Bu serilerin Cauchy çarpımları ile aşağıdaki ifadeler elde edilir,

$$\begin{aligned}
\chi o(x)Pb(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_{2i+1}x^{2i} \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^{2i} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{m} a_{2i+1} b_{m-i} \right) x^{2m}, \\
\chi e(x)Pb(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} a_{2i}x^{2i} \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^{2i} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{2i} b_{m-i} \right) x^{2m}, \\
\chi b(x)Pb(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^{2i} \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^{2i} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i b_{m-i} \right) x^{2m}.
\end{aligned}$$

Artık palindrom kompozisyonları için $\chi(x)$ ve $p(x)$ üreteç fonksiyonlarına göre yeni üreteç fonksiyonları bulunabilir.

Teorem 4.69. *Yukarıdaki üreteç fonksiyonlarına göre palindrom kompozisyonlar için üreteç fonksiyonu*

$$pal(x) = Pb(x)\left[\chi(x) + \chi b(x)\right]$$

dir.

İspat $pal(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n$ üreteç fonksiyonu olsun. Teorem 4.68 den, herhangi bir n tamsayısı için hem α_{2n} hem de α_{2n+1} hesaplanır. Böylece

$$\begin{aligned}
pal(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{2n} x^{2n} + x \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n+1} x^{2n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{2i} p_{m-i} + \sum_{j=1}^{m} a_j p_{m-j} \right) x^{2m} + x \sum_{m=0}^{\infty} (\sum_{i=0}^{m} a_{2i+1} p_{m-i}) x^{2m} \\
&= \chi e(x) Pb(x) + \chi b(x) Pb(x) + x\left[\chi o(x) Pb(x)\right] \\
&= \chi e(x) Pb(x) + \chi b(x) Pb(x) + x\left[\chi o(x) Pb(x)\right] \\
&= Pb(x)\left[\chi e(x) + x\chi o(x) + \chi b(x)\right] \\
&= Pb(x)\left[\chi(x) + \chi b(x)\right].
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. □

Teorem 4.69 ile pozitif bir tamsayının palindrom kompozisyonlarının veya n-renk palindrom kompozisyonlarının sayıları için üreteç fonksiyonu bulunacaktır.

Teorem 4.70. *Palindrom kompozisyonlarının sayıları için üreteç fonksiyonu*

$$np(x) = x\frac{2x+1}{1-2x^2} = x + 2x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 4x^5 ...$$

dir.

İspat Palindrom kompozisyonlarındaki kanat sayıları için üreteç fonksiyonu

$$P(x) = \frac{x-1}{2x-1} = 1 + x + 2x^2 + 4x^3 + 8x^4 + ...$$

dir. Palindrom kompozisyondaki eksen değişimini gösteren sayı 1 dir ve bu nedenle üreteç fonksiyonu

$$\chi(x) = \frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + ...$$

dir. Teorem 4.69 den palindrom kompozisyonlarının sayıları için üreteç fonksiyonu

$$np(x) = x\frac{2x+1}{1-2x^2}$$

dir. □

Palindrom kompozisyonlar ile elde edilen bu sayı dizisi OnLine Encyclopedia of Integer Sequences'ta (OEIS) $2^{\left\|\frac{n}{2}\right\|}$ dizisine karşılık gelmektedir (Sloane 2023).

4.2.6. n-renk Kompozisyon Kanatlar

Bu kısımda amaç Fibonacci sayıları ile renk palindrom kompozisyonları arasındaki ilişkileri bulmaktır. Önce tam sayının palindrom kompozisyonlarını, orta kısım tek renk olacak ve kanatlar n-renk kompozisyon olacak şekildeki kompozisyonların sayısı araştırılacaktır.

Teorem 4.71. *b_m, m tamsayısının orta kısmı bir renk ve kanatları n-renk olan renk palindromların kompozisyonlarının sayısı olsun. O halde*
i) $b_{2m+1} = F_{2m+1}$,
ii) $b_{2m} = 2F_{2m-1}$.
Ayrıca bu sayılar için üreteç fonksiyonu

$$\begin{aligned}\sum_{m=2}^{\infty} b_m x^m &= 2\sum_{m=1}^{\infty} F_{2m-1}x^{2m} + \sum_{m=1}^{\infty} F_{2m+1}x^{2m+1} \\ &= \frac{(2x+1)(x-x^3)}{(x^2+t-1)(x^2-x-1)}\end{aligned}$$

dir.

İspat m pozitif tam sayı olmak üzere, b_m sayıları ve bu sayıların üreteç fonksiyonu ayrı ayrı hesaplanarak ispat iki kısımda yapılacaktır;

a) İlk olarak sayılar hesaplanacaktır

$$C_{2m+1} = \cup_{i=0}^{m-1}((2i+1)\cdot P_{m-i}) \cup \{(2m+1)\}$$

ve böylece $((2i+1)\cdot P_{m-i})$ kümesinin renk palindrom kompozisyonlarının orta kısımdaki tek renk ve k büyüklüğündeki diğer kısımların k renk aldığına göre sayısı $F_{2(m-i)}$ dir. O halde ortadaki kısım tek renk diğer kısım k renk alacak şekilde $2m+1$ lik palindrom kompozisyonlarının b_{2m+1} sayısı $2(m-i)$ indisli Fibonacci sayısının toplamıdır. Buradan

$$b_{2m+1} = \sum_{i=1}^{m} F_{2(m-i)} + 1 = \sum_{i=1}^{m} F_{2i} + 1 = F_{2m+1}.$$

Benzer şekilde

$$C_{2m} = \cup \left[_{i=1}^{m-1} (2i \cdot P_{m-i}) \cup (i \circ P_{m-i}) \right] \cup \{(2m)\} \cup \{(m, m)\}$$

ve böylece

$$b_{2m} = 2\left(\sum_{i=1}^{m-1} F_{2(m-i)} + 1 \right) = 2\left(\sum_{i=1}^{m-1} F_{2i} + 1 \right) = 2F_{2m-1}.$$

Buradan

$$b_{2m} = \sum_{i=1}^{m} F_{2(m-i)} + \sum_{i=0}^{m} F_{2(m-i)} = 2\sum_{i=0}^{m} F_{2i} = 2F_{2m-1}$$

elde edilir.

b) Bu kısımda üreteç fonksiyonu hesaplanacaktır ki Teorem 4.69 deki üreteç fonksiyonlarını araştırmak yeterlidir. O zaman renklendirme kuralına göre Teorem 4.69 deki üreteç fonksiyonları

$$\chi(x) = \frac{x}{1-x} \text{ ve } \chi b(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$$

şeklindedir.

Kanatlardaki n-renk palindrom kompozisyonlarının sayıları için üreteç fonksiyonu, çift Fibonacci sayılarından biridir. Buradan

$$Pb(x) = 1 + \frac{x^2}{1-3x^2+x^4}.$$

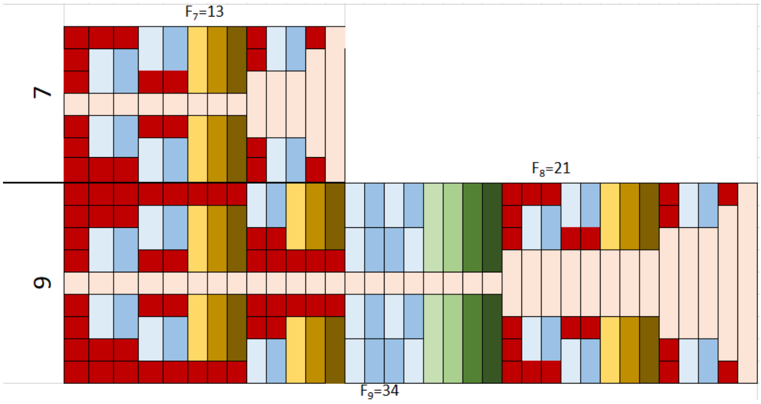
Teorem (4.69) ile, n-renk palindrom kompozisyonlarının sayıları için üreteç fonksiyonu

$$\begin{aligned} 2\sum_{m=1}^{\infty} F_{2m-1}x^{2m} + \sum_{m=1}^{\infty} F_{2m+1}x^{2m+1} &= Pb(x)\left[\chi(x) + \chi b(x)\right] \\ &= \frac{(2x+1)(x-x^3)}{(x^2+x-1)(x^2-x-1)} \\ &= x + 2x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 10x^6 + 13x^7 + ... \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanarak ispat tamamlanır. □

Bir tamsayının orta kısmı bir renk ve kanatları n renk olan renk palindromların kompozisyonlarının sayısı ile elde edilen sayı dizisi $\{1, 2, 2, 4, 5, 10, 13, 26, 34, ...\}$ OnLine Encyclopedia of Integer Sequences'ta (OEIS) bulunmamaktadır (Sloane 2023).
Renk kataloğundaki renkler kullanılarak pozitif bir tamsayının n-renk palindrom kompozisyonlarının deseni elde edilebilir.

Örnek 4.72. *7 ve 9 için n-renk palindrom kompozisyon kanatlarının desenleri*



Şekil 4.9. Orta kısmı tek renk olacak şekilde 7 ve 9 un n-renk palindrom kompozisyon kanatlarının desenleri .

Teorem 4.73. *Renk palindrom kompozisyonlarının sayıları için üreteç fonksiyonu*

$$cp_1(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + x}{x^4 - 3x^2 + 1}$$

dir.

İspat n-renk palindrom kompozisyonlarının sayılarının üreteç fonksiyonu bulmak için, n-renk palindrom kompozisyonlarındaki kanat sayıları ve n-renk palindrom kompozisyonlarındaki eksen değişimini gösteren sayıların üreteç fonksiyonları bulunmalıdır.

n-renk palindrom kompozisyon tanımı gereği, eksen pozitif tam sayıya göre değişir ve bu nedenle n-renk palindrom kompozisyondaki eksen değişimini gösteren sayılar için üreteç fonksiyonu

$$\chi(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 + 7x^7 + ...$$

dir. Diğer yandan, n-renk palindrom kompozisyonlarında kanat sayıları için üreteç fonksiyonu, çift Fibonacci sayılarıdır. O halde

$$Pb(x) = 1 + \frac{x^2}{1 - 3x^2 + x^4} = 1 + x^2 + 3x^4 + 8x^6 + 21x^8 + ...$$

dir. Teorem 4.69 ile n-renk palindrom kompozisyonları için üreteç fonksiyonu

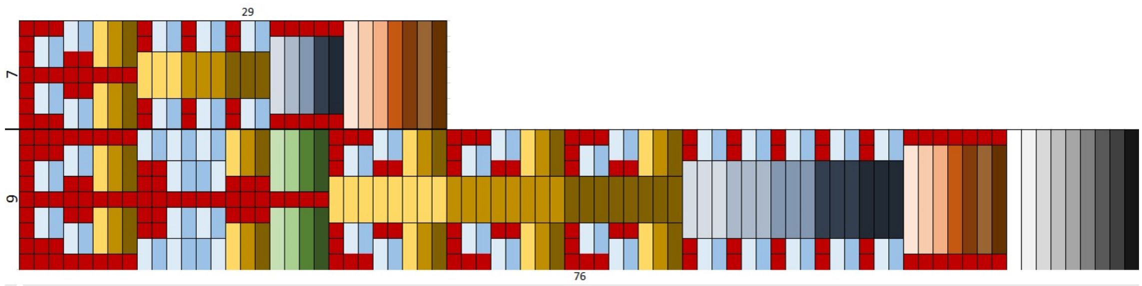
$$\begin{aligned} cp_1(x) &= Pb(x)\left[\chi(x) + \chi b(x)\right] \\ &= \frac{x^3+3x^2+x}{x^4-3x^2+1} \\ &= x+3x^2+4x^3+9x^4+11x^5+24x^6+29x^7+63x^8+76x^9+.... \end{aligned}$$

elde edilir. □

Bir tamsayının renk palindrom kompozisyonlarıyla elde edilen sayı dizisi $\{1, 3, 4, 9, 11, 24, 29, 63, ...\}$ OnLine Encyclopedia of Integer Sequences'ta (OEIS) bulunmamaktadır (Sloane 2023).

Teorem 4.68 kullanılarak, n-renk palindrom kompozisyonunun deseni çizilebilir.

Örnek 4.74. *7 tamsayısının renk palindrom kompozisyon sayısı 29 ve 9 tamsayısının renk palindrom kompozisyon sayısı yukarıdaki teoremde belirtildiği gibi 76 dır.*



Şekil 4.10. 7 ve 9 tamsayılarının renk palindrom kompozisyon deseni.

4.2.7. Kanatlarda İlk Kısımları Beyaz Diğer Kısımları n- renk Olan Kompozisyonlar

Bu kısımda Teorem 4.68 kullanılarak, kanatlarda ilk kısımları beyaz renk alacak ve k boyutlu diğer kısımlar k renk alabilecek şekilde tamsayının renk palindrom kompozisyonlarının sayısı hesaplanacaktır. Bu sayılar için üreteç fonksiyonu araştırılacaktır.

Teorem 4.75. *Kanatlarda ilk kısımları beyaz, k büyüklüğündeki diğer kısımlar k renk ve orta kısımlar tek renk alacak şekilde m pozitif tamsayının renk palindrom kompozisyonlarının sayısı c_m olsun. O halde* *i)* $c_{2m+1} = F_{2m} + 1$,

ii)$c_{2m} = 2F_{2m-2} + 2$

dir. Bu sayıların üreteç fonksiyonları da

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} c_m x^m &= 2\sum_{m=1}^{\infty}(F_{2m-2}+1)x^{2m} + \sum_{m=1}^{\infty}(F_{2m}+1)x^{2m+1}\\ &= \frac{4x^4+2x^3-2x^2-x}{x^6-4x^4+4x^2-1}\end{aligned}$$

dir.

İspat m pozitif tam sayı olmak üzere ispat iki kısımda yapılacaktır,

a) İlk olarak sayılar hesaplanacaktır.

$$C_{2m+1} = \cup_{i=0}^{m-1}((2i+1)\cdot P_{m-i}) \cup \{(2m+1)\}$$

bu nedenle $((2i+1)\cdot P_{m-i})$ kümesinin renklendirme kuralına göre renk palindrom kompozisyonlarının sayısı $F_{2(m-i)-1}$ dir. Buradan

$$c_{2m+1} = \sum_{i=0}^{m-1} F_{2(m-i)-1} + 1 = \sum_{i=1}^{m} F_{2i-1} + 1 = F_{2m} + 1$$

dir. Benzer şekilde

$$C_{2m} = \cup\left[_{i=1}^{m-1}(2i\cdot P_{m-i}) \cup (i \circ P_{m-i})\right] \cup \{(2m)\} \cup \{(m,m)\}$$

ve böylece

$$c_{2m} = 2\left(\sum_{i=1}^{m-1} F_{2(m-i)-1} + 1\right) = 2\left(\sum_{i=1}^{m-1} F_{2i-1} + 1\right) = 2F_{2m-2} + 2$$

elde edilerek sayılar hesaplanır.

b)Bu kısımda üreteç fonksiyonu elde etmek için Teorem 4.69 deki üreteç fonksiyonundan yararlanılacaktır. O zaman renklendirme kuralına göre Teorem 4.69 deki üreteç fonksiyonu

$$\chi(x) = \frac{x}{(1-x)},\ \chi b(x) = \frac{x^2}{(1-x^2)}$$

dir. n-renk palindrom kompozisyonlarındaki kanat sayıları için üreteç fonksiyonu, tek Fibonacci sayılarıdır. Buradan

$$Pb(x) = 1 + \frac{x^2-x^4}{1-3x^2+x^4}$$

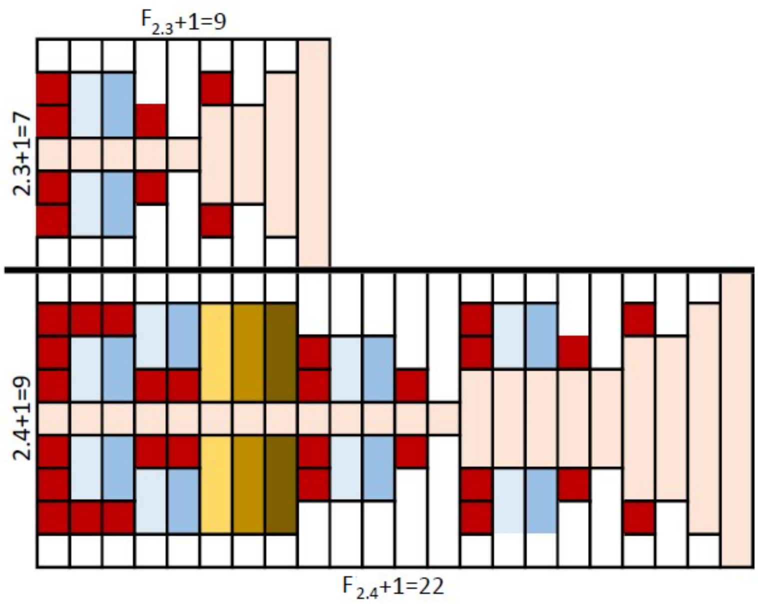
dir. Teorem 4.69 den n-renk palindrom kompozisyonlarının sayıları için üreteç fonksiyonu

$$\begin{aligned}\sum_{i=1} c_i x^i &= Pb(x)\left[\chi(x)+\chi b(x)\right] \\ &= 2\sum_{m=1}(F_{2m-2}+1)x^{2m}+\sum_{m=1}(F_{2m}+1)x^{2m+1} \\ &= \frac{4x^4+2x^3-2x^2-x}{x^6-4x^4+4x^2-1}\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanarak ispat tamamlanır. □

Bir tamsayının kanatlarda ilk kısımları beyaz, diger kısımlar n renk ve orta kısımlar tek renk alacak şekilde pozitif tamsayının renk palindrom kompozisyonlarının sayısı ile elde edilen sayı dizisi $\{1,2,2,4,4,8,9,18,22,...\}$ OnLine Encyclopedia of Integer Sequences'ta (OEIS) bulunmamaktadır (Sloane 2023).

Örnek 4.76. *7 ve 9 için ilk kısımları beyaz ve orta kısımlar tek renk alacak şekildeki renk palindrom kompozisyonlarının deseni aşağıdaki gibidir:*



Şekil 4.11. 7 ve 9 için ilk kısımları beyaz, k boyutundaki diğer kısımlar k renk ve orta kısımlar tek renk alacak şekildeki renk palindrom kompozisyonlarının desenleri.

Teorem 4.77. *İlk kısmı beyaz, k büyüklüğündeki diğerleri k rengini alan palindrom kompozisyonlarının sayılarını veren üreteç fonksiyonu*

$$
\begin{aligned}
cp_2(x) &= \frac{x-2x^5-6x^4-x^3+3x^2}{x^8-5x^6+8x^4-5x^2+1} \\
&= x+3x^2+4x^3+9x^4+10x^5+21x^6+...
\end{aligned}
$$

dir .

İspat Benzer şekilde ilk kısmı beyaz, k boyutundaki diğerleri k rengini alan palindrom kompozisyonlarda kanat sayıları için üreteç fonksiyonlarının bulunması yeterlidir ve k boyutundaki kısımları k rengini alan palindrom kompozisyonda eksen değişimini gösteren sayılardır.

$$
\begin{array}{cc}
\chi(x)=\frac{x}{(1-x)^2} & \chi b(x)=\frac{x^2}{(1-x^2)^2} \\
P(x)=1+\frac{x-x^2}{1-3x+x^2} & Pb(x)=1+\frac{x^2-x^4}{1-3x^2+x^4}
\end{array}
$$

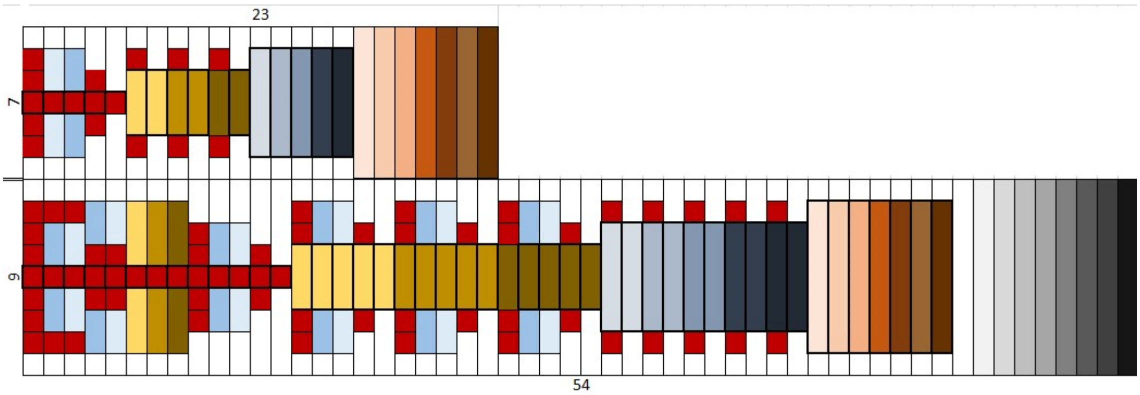
Teorem 4.69 den, üreteç fonksiyonunu

$$
\begin{aligned}
cp_2(x) &= Pb(x)\left[\chi(x)+\chi b(x)\right] \\
&= \frac{x\left(3x+x^2+1\right)\left(1-2x^2\right)}{\left(x^2+x-1\right)\left(x^2-x-1\right)\left(x-1\right)^2\left(x+1\right)^2} \\
&= x+3x^2+4x^3+9x^4+10x^5+21x^6+23x^7+48x^8+54x^9+.....
\end{aligned}
$$

elde edilir. □

Bir tamsayının ilk kısmı beyaz diger kısımları n renk alan palindrom kompozisyonlarının sayılarıyla elde edilen dizi $\{1,3,4,9,10,21,...\}$ OnLine Encyclopedia of Integer Sequences'ta (OEIS) bulunmamaktadır (Sloane 2023).

Örnek 4.78. 7 *ve* 9 *tamsayılarının ilk kısmı beyaz olan palindrom kompozisyonlarının deseni aşağıdaki gibidir:*



Şekil 4.12. 7 ve 9 tamsayılarının ilk kısmı beyaz, k boyutundaki diğerleri k rengini alan palindrom kompozisyonlarının deseni.

4.2.8. Kanatlarının Parçaları Renk Palindrom Olan Kompozisyonlar

Teorem 4.79. *Parçaları renk palindromu olan palindrom kompozisyonlarının sayıları için üreteç fonksiyonu*

$$cp_3(x) = x\frac{-2x + x^5 - x^6 - x^7 - x^9 - 1}{2x^2 + x^4 - 2x^6 + x^{10} - 1} = x + 2x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 9x^6 + ...$$

dir.

İspat Teorem 4.69 ile palindrom renk kompozisyonlarında kanat sayıları ve parçaları palindrom renkleri olan palindrom kompozisyonunda eksen değişimini gösteren sayıların üreteç fonksiyonlarının belirlenmesi gerekmektedir. Teorem 4.65 ispatıyla, üreteç fonksiyonu

$$P(x) = \chi(x) = x\frac{-x^2 + x^4 + 1}{(x+1)(x-1)^2}$$

dir. Buradan

$$Pb(x) = 1 + x^2\frac{x^4 - x^8 - 1}{2x^2 + x^4 - 2x^6 + x^{10} - 1}.$$

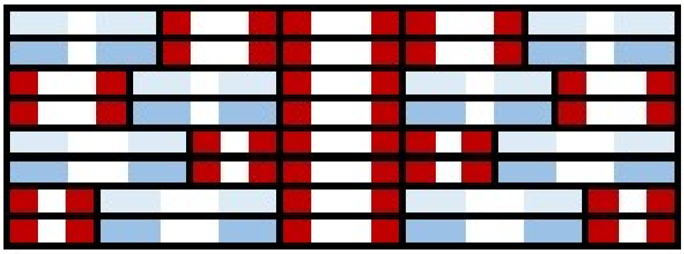
Teorem 4.69 den üreteç fonksiyonunun

$$np(x) = Pb(x)\left[\chi(x) + \chi b(x)\right] = x\frac{-2x + x^5 - x^6 - x^7 - x^9 - 1}{2x^2 + x^4 - 2x^6 + x^{10} - 1}$$

olduğu gözlemlenir. □

Parçaları renk palindrom olan kompozisyonların sayıları ile elde edilen dizi $\{1, 2, 2, 4, 5, 9, 11, 19, ...\}$ OnLine Encyclopedia of Integer Sequences'ta (OEIS) bulunmamaktadır (Sloane 2023).

Örnek 4.80. 22 *tamsayısının parçaları renk palindrom olan kompozisyonlardan biri için desen aşağıdaki gibidir:*



Şekil 4.13. 22 tamsayısının parçaları renk palindrom olan kompozisyonlardan biri.

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında parçalanış teorisinin alt başlıklarından olan kompozisyonlar için yeni bağıntı ve eşitlikler elde edilmiştir. Pozitif bir tamsayının kompozisyonlarının incelenmesi için yeni işlemler tanımlanmıştır. Bu işlemler yardımıyla yeni kümeler ifade edilmiştir. Kompozisyonlar ile ilgili başka çalışmalarda gözlemlenmeyen bu kümeler kompozisyonlara farklı bir bakış açısı ile kompozisyonların parçalarına kısıtlamalar getirmekte kolaylık sağlamıştır. Kompozisyonların parçaları için; bileşen sayısı, bileşen büyüklüğü için üst sınırlandırma, bileşenlerinin tek tamsayısı, palindromik bileşenlerden oluşması gibi kısıtlamalar getirilmiştir. Pozitif bir tamsayının kompozisyonlarını belirleyen implementasyon yazılmıştır.

Pozitif bir tamsayının kompozisyonlarının bileşen büyüklüğü için bir üst sınır belirlenerek bu kısıtlamayı sağlayan kompozisyon sayıları ile Fibonacci sayıları, Tribonacci sayıları, Tetranacci sayıları elde edilmiştir. Daha genel bir ifadeyle n-nacci sayıları gözlemlenmiştir. Pozitif bir tamsayının kompozisyonlarının bileşen büyüklüğü için bir üst sınır belirlenerek elde edilen parça sayılarına tez çalışmasında tanımlanan çarpım fonksiyonunun uygulanması ile sayı dizileri elde edilmiştir. Bu sayı dizilerinden biri çok iyi bilinen Jacobsthal sayı dizisidir. Pozitif tamsayıların kompozisyonları ile yapılan araştırmalarda literatürde var olan ve olmayan sayı dizileri elde edilmiştir (Bu sayı dizileri OnLine Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS) ta araştırılmıştır.).

- n pozitif tamsayısının bileşen büyüklüğü kısıtlamasına göre kompozisyon sayıları incelenirken aşağıdaki sayı dizileri elde edilmiştir;

  n tamsayısının bileşeni en fazla 2 olan kompozisyon sayıları iyi bilinen Fibonacci dizisini yani $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...\}$ dizisini vermektedir (Teorem 4.26).

  n tamsayısının bileşeni en fazla 3 olan kompozisyon sayıları Tribonacci dizisini yani $\{1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, ...\}$ dizisini vermektedir (Teorem 4.26).

  n tamsayısının bileşeni en fazla 4 olan kompozisyon sayıları Tetranacci dizisini yani $\{1, 1, 2, 4, 8, 15, 29, 56, ...\}$ dizisini vermektedir (Teorem 4.26).

- n pozitif tamsayısının bileşen büyüklüğü kısıtlamasına göre kompozisyonlarının çarpım toplamları incelenirken aşağıdaki sayı dizileri elde edilmiştir;

n pozitif tamsayısının bileşeni en fazla 2 olan kompozisyonlarının çarpım toplamları ile $\{1, 3, 5, 11, 21, ...\}$ dizisi yani Jacobsthal sayı dizisi elde edilmiştir (Teorem 4.32). Bu sayı dizileri literatürde var olmakla birlikte kompozisyonlarla da elde edilen dizilerdir. Fakat n tamsayısının bileşen büyüklüğü kısıtlamasına göre kompozisyonlarının çarpım toplamları incelenirken literatürde olmayan sayı dizileri de elde edilmiştir.

n tamsayısının bileşeni en fazla 3 olan kompozisyonlarının çarpım toplamları ile literatürde bulunmayan $\{1, 3, 8, 17, 42, 100, 235, ...\}$ dizisi elde edilmiştir (Teorem 4.32).

- n pozitif tamsayısının bileşen sayısı kısıtlamasına göre kompozisyon sayıları incelenirken aşağıdaki sayı dizileri elde edilmiştir;

  n pozitif tamsayısının bileşen sayısı 2 olan kompozisyonlarının sayısı pozitif tam sayı dizisini yani $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$ dizisini vermektedir (Önerme 4.37)

  n tamsayısının bileşen sayısı 3 olan kompozisyonlarının sayısı üçgensel sayı dizisini yani $\{1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ...\}$ dizisini vermektedir (Önerme 4.37).

  n tamsayısının bileşen sayısı 4 olan kompozisyonlarının sayısı üçgen piramitsel sayı dizisini yani $\{1, 4, 10, 20, 35, 56, 84...\}$ dizisini vermektedir (Önerme 4.37).

- n pozitif tamsayısının bileşen sayısı kısıtlamasına göre kompozisyonlarının çarpım toplamları incelenirken aşağıdaki sayı dizileri elde edilmiştir;

  n tamsayısının bileşen sayısı 1 olan kompozisyonlarının çarpım toplamları pozitif tam sayı dizisini yani $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$ dizisini vermektedir (Teorem 4.40).

  n tamsayısının bileşen sayısı 2 olan kompozisyonlarının çarpım toplamları üçgen piramitsel sayı dizisini yani $\{1, 4, 10, 20, 35, 56, 84...\}$ dizisini vermektedir (Teorem 4.40). Bu sayı dizileri literatürde var olmakla birlikte kompozisyonlarla da elde edilen dizilerdir. Fakat n tamsayısının bileşen sayısı kısıtlamasına göre kompozisyonlarının çarpım toplamları incelenirken literatürde olmayan sayı dizileri de elde edilmiştir.

  n tamsayısının bileşen sayısı 3 olan kompozisyonlarının çarpım toplamları ile literatürde bulunmayan $\{1, 6, 21, 56, 126, 252, ...\}$ dizisi elde edilmiştir (Teorem 4.40).

n tamsayısının bileşen sayısı 4 olan kompozisyonlarının çarpım toplamları ile literatürde bulunmayan $\{1, 8, 36, 120, 330, 792, ...\}$ dizisi elde edilmiştir (Teorem 4.40).

- n pozitif tamsayısının tek kompozisyonlarının sayıları tek Fibonacci sayılarından oluşan diziye tekabül ederken n tamsayısının tek kompozisyonlarının çarpım toplamları literatürde bulunmayan $\{1, 1, 4, 7, 15, 32, 65, ...\}$ sayı dizisini vermektedir (Teorem 4.49).

- n pozitif tamsayısının palindrom renk kompozisyonlarının sayısıyla literatürde bulunmayan $\{1, 2, 4, 8, 17, 35, 73, 151, ...\}$ dizisi elde edilmiştir (Teorem 4.65).

- Palindrom kompozisyonlar ile elde edilen bu sayı dizisi OnLine Encyclopedia of Integer Sequences'ta (OEIS) $2^{\|\frac{n}{2}\|}$ dizisine karşılık gelmektedir.

- Bir tamsayının orta kısmı bir renk ve kanatları n renk olan renk palindromların kompozisyonlarının sayısı ile literatürde bulunmayan $\{1, 2, 2, 4, 5, 10, 13, 26, 34, ...\}$ dizisi elde edilmiştir (Teorem 4.71).

- Bir tamsayının renk palindrom kompozisyonlarıyla literatürde bulunmayan $\{1, 3, 4, 9, 11, 24, 29, 63, ...\}$ dizisi elde edilmiştir (Teorem 4.73).

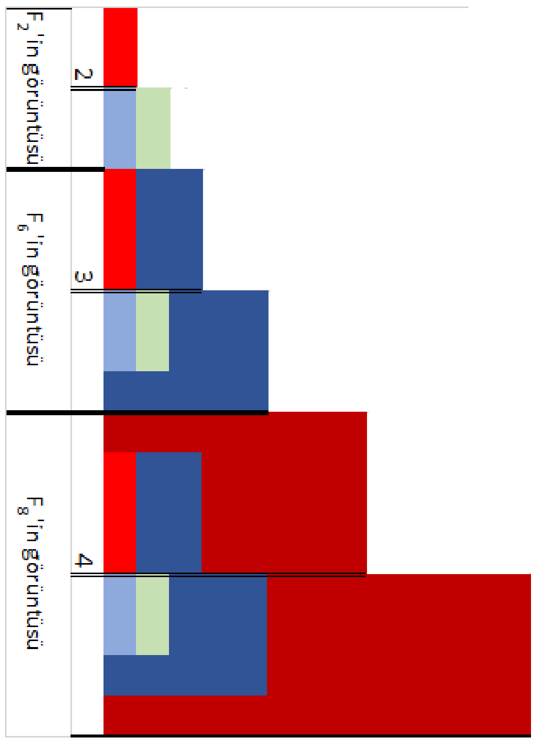
- Bir tamsayının kanatlarda ilk kısımları beyaz, diğer kısımlar n renk ve orta kısımlar tek renk alacak şekilde pozitif tamsayının renk palindrom kompozisyonlarının sayısı ile literatürde bulunmayan $\{1, 2, 2, 4, 4, 8, 9, 18, 22, ...\}$ dizisi elde edilmiştir (Teorem 4.75).

- Bir tamsayının ilk kısmı beyaz diğer kısımları n renk alan palindrom kompozisyonlarının sayılarıyla literatürde bulunmayan $\{1, 3, 4, 9, 10, 21, ...\}$ dizisi elde edilmiştir (Teorem 4.77).

- Parçaları renk palindrom olan kompozisyonların sayıları ile de literatürde bulunmayan $\{1, 2, 2, 4, 5, 9, 11, 19, ...\}$ dizisi elde edilmiştir (Teorem 4.80).

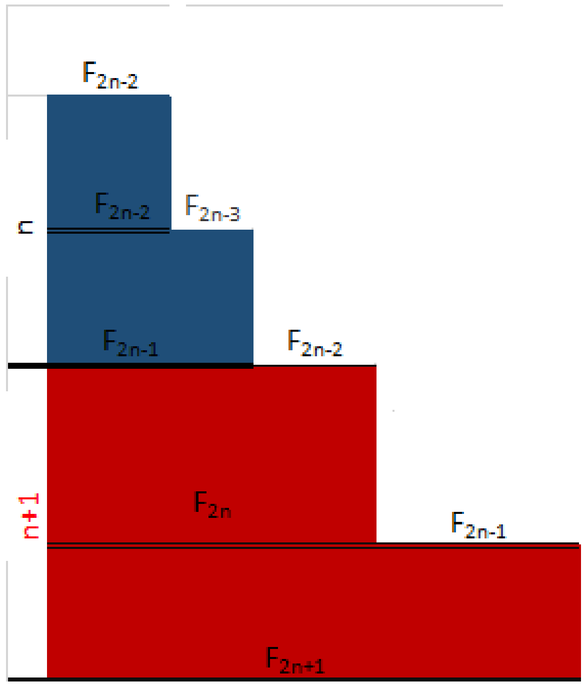
Kompozisyonlar ile elde edilen sayı dizilerinin yanı sıra kompozisyonlar için renklendirmeler yapılmıştır. Kompozisyon renklendirmesini veren implementasyon yazılmıştır.

Kompozisyon desenleri oluşturulmuştur. Bu desenlerin düzenlerinde de Fibonacci sayıları gözlemlenerek altın oran belirtilmiştir. Pozitif bir tamsayının kompozisyonları araştırılırken tanımlanan işlemler yardımıyla ardışık iki sayıdan büyük olan sayının kompozisyonları küçük olan sayıdan üretilmektedir. Ardışık sayıların kompozisyonlarının desenleri oluşturulduğunda her bir sayının deseni kendinden büyük ardıl sayının deseni içerisinde yer almaktadır.



Şekil 5.14. Her bir sayının deseni kendinden büyük ardıl sayının deseni içerisinde.

n tamsayısının büyük ve küçük dikdörtgenleri arasında ki oran, n tamsayısı büyüdükçe altın orana yaklaşır.



Şekil 5.15. Desenlerin içinde altın oran.

6. KAYNAKLAR

Agarwal, A. 1990. On a new kind of numbers. Fibonacci Quaterly, 28 (3): 194-199.

Agarwal, A. 2000. N-colour compositions. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 31 (11): 1421-1428.

Agarwal, A. 2003. An analogue of Euler's identity and new combinatorial properties of n-colour compositions. Journal of computational and applied mathematics, 160 (1-2): 9-15.

Agarwal, A. and Andrews, G.E. 1987. Rogers-Ramanujan identities for partitions with "N copies of N". Journal of Combinatorial Theory, Series A, 45 (1): 40-49.

Al, B. 2018. Mac Mahon Partition Analysis in Positive Integers, MSc Thesis in Mathematics, Akdeniz University, Antalya.

Al, B. and Alkan, M. 2019. Some Relations Between Partitions and Fibonacci Numbers. Proceedings Book of The 2nd Mediterranean International Conference of Pure & Applied Mathematics and Related Areas, 14-17.

Al, B. and Alkan, M. 2020. On Relations for the Partitions of Numbers. Filomat, 34 (2).

Andrews, G., 1976. The theory of partitions, Addison. Wesley Publishing Company. London-Amsterdam-Sydney-Tokyo.

Andrews, G.E. 1983. Euler's pentagonal number theorem. Mathematics Magazine, 56 (5): 279-284.

Andrews, G.E. 1998a. The theory of partitions. Cambridge university press.

Andrews, G.E. and Eriksson, K. 2004. Integer partitions. Cambridge University Press.

Andrews, G.E., Hirschhorn, M.D. and Sellers, J.A. 2010. Arithmetic properties of partitions with even parts distinct. The Ramanujan Journal, 23 (1-3): 169-181.

Andrews, L. C. 1998b. Special functions of mathematics for engineers. 2nd ed. SPIE Press and Oxford University Press, 479.

Apostol, T.M. 1951. On the Lerch zeta function.

Apostol, T. M. 1976. Introduction to analytic number theory. Springer-Verlag, 304-321.

Apostol, T.M. 1998. Introduction to analytic number theory. Springer Science & Business Media.

Archibald, M., Blecher, A., Knopfmacher, A. and Mays, M. 2020. Inversions and Parity in Compositions of Integers. Journal of Integer Sequences, 23 (2): 3.

Báez-Duarte L. 1997. Hardy–Ramanujan's asymptotic formula for partitions and the central limit theorem. Advances in Mathematics, Volume 125, Issue 1, 114-120. doi.org/10.1006/aima.1997.1599.

Battaloglu, R. ve Şimşek, Y. 2021. On New Formulas of Fibonacci and Lucas Numbers Involving Golden Ratio Associated with Atomic Structure in Chemistry. SYMMETRY-BASEL, vol.13, no.8 .

Bartel, J., Bhaduri, R.K., Brack, M., Murthy, M.V.N. 2017. Asymptotic Prime Partitions of Integers, Physical Review E, 95 5-1.

Baumann, M. H. 2018. Die k -boyutlu Champagnerpyramide. Mathematische Semesterberichte (Almanca). 66 : 89–100. doi : 10.1007/s00591-018-00236-x

Bell, J. 2005. Euler and the pentagonal number theorem. arXiv preprint math/0510054.

Bernedt, B. C. Lecture notes on the theory of partitions. pp.1-21.

Birmajer, D., Gil, J.B. and Weiner, M.D. 2017. $(an+ b) $-color compositions. arXiv preprint arXiv:1707.07798.

Brown, J. L. 1969. Unıque representatıons of ıntegers as sums of dıstınct Lucas Numbers, The Fibonacci Quarterly, 7:3 (Oct.), 243-252.

Brown, J. L. 1961. Note on Complete sequences of integers, American Mathematical Monthly, 68:6, 557-560.

Chen, S.-C. 2011. On the number of partitions with distinct even parts. Discrete Mathematics, 311 (12): 940-943.

Chinn, P., Grimaldi, R. and Heubach, S. 2003. Rises, levels, drops, and"+" signs in compositions: extensions of a paper by Alladi and Hoggatt. The Fibonacci Quarterly, 41 (3): 229-239.

Deza, E. and Deza, M.M. 2012. Figurate numbers. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Donatz, M. and Marsaglia, N. 2011. Generalizing Euler's Pentagonal Number Theorem To Multipartitions. REU Program in Mathematics at Oregon State University.

Euler, L. 1751. Observationes analyticae variae de combinationibus. Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, 64-93.

Euler, L. 1988. Introduction To Analysis Of The Infinite. Springer-Verlag (translation by J.D. Blanton).

Ewell, J. 2004. Recurrences for the partition function and its relatives. Rocky Mountaın Journal Of Mathematıcs, 34 (2). Springer.

Ewell, J.A. 1980. Recurrences for two restricted partition functions. Fibonacci Quart, 18 (1): 2.

Fellmann, E. A. and Mikhajlov, G. K.,(editors) 1998. Leonhardi Euleri opera omnia. Series quarta A: Commercium epistolicum. Volumen secundum: Commercium cum Johanne (I) Bernoulli et Nicolao (I) Bernoulli. Birkäuser, Basel.

Gessel, I.M. and Li, J. 2013. Compositions and Fibonacci identities. arXiv preprint arXiv:1303.1366.

Gil, J.B. and Tomasko, J.A. 2021. Fibonacci colored compositions and applications. arXiv preprint arXiv:2108.06462.

Guo, Y. H. 2012. Some n-color Compositions. Journal of Integer Sequences, 15(1), Article 12.1.2.

Gupta, H. 1970. Partitions–A survey. Journal of Res. of Nat. Bur. Standards-B Math. Sciences B, 74 1-29.

Hardy, G.H., Wright, E.M. 1960. An introduction to the Theory of Numbers, 4th ed., Clarendon Press, Oxford, 273-295.

Hardy, G.H. and Wright, E.M. 1979. An introduction to the theory of numbers. Oxford university press.

Heubach, S. and Mansour, T. 2004. Compositions of n with parts in a set. Congressus Numerantium, 168 127.

Heubach, S. and Mansour, T. 2009. Combinatorics of compositions and words. CRC Press.

Hoggatt Jr, V.E. and Bicknell-Johnson, M. 1978. Convolution arrays for Jacobsthal and Fibonacci polynomials. The Fibonacci Quarterly, 16 (5): 385-402.

Hoggatt Jr, V.E. and Lind, D. 1968. Fibonacci and binomial properties of weighted compositions. Journal of Combinatorial Theory, 4 (2): 121-124.

Hoggatt Jr.,V. E. 1969. Fibonacci and Lucas numbers. Boston: Houghton Mifflin Company, 7-9.

Horadam, A. 1996. Jacobsthal number representation. The Fibonacci Quarterly, 34 (1): 40-54.

Janjić, M. 2017. Some formulas for numbers of restricted words. arXiv preprint arXiv:1702.01273.

Juskevic, A. P. Smirnov, V. I., and Habicht, W.,(editors) 1975. Leonhardi Euleri Opera Omnia. Series quarta A: Commercium epistolicum. Volumen primum: Descriptio commercii epistolici. Birkhäuser, Basel.

Juškevič, A.P. and Taton, R., 1980. Leonhard Euleri Commercium Epistolicum. Birkhauser, Basel.

Juškevič, A.P. and Winter, E. 2022. Leonhard Euler und Christian Goldbach: Briefwechsel 1729–1764. Walter de Gruyter GmbH & Co KG.

Koch, D. 2016. The Pentagonal Number Theorem and All That.

Koshy, T. 2001. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Volume 2. John Wiley & Sons.

MacMahon, P. 1921. Note on the parity of the number which enumerates the partitions of a number. Proc. Cambridge Phil. Soc, 281-283.

Mana, P. 1969. Problem B-152, The Fibonacci Quarterly, 7:3 (Oct.), 336.

Merca, M. 2016a. Fast computation of the partition function. Journal of Number Theory, 164 405-416.

Merca, M. 2016b. A note on the partitions involving parts of k different magnitudes. Journal of Number Theory, 162 23-34.

Merca, M. 2017a. New relations for the number of partitions with distinct even parts. Journal of Number Theory, 176 1-12.

Merca, M. 2017b. On the number of partitions into parts of k different magnitudes. Discrete Mathematics, 340 (4): 644-648.

Merzouk, H., Boussayoud, A. and Chelgham, M. 2020. Generating Functions of Generalized Tribonacci and Tricobsthal Polynomials. Montes Taurus Journal of Pure and Applied Mathematics, 2 (2): 7-37.

Narang, G. and Agarwal, A. 2006. n-Colour self-inverse compositions. Proceedings of the Indian Academy of Sciences-Mathematical Sciences, 257-266.

Narang, G. and Agarwal, A. 2008. Lattice paths and n-colour compositions. Discrete Mathematics, 308 (9): 1732-1740.

Ozdemir, G. and Simsek, Y. 2016. Generating functions for two-variable polynomials related to a family of Fibonacci type polynomials and numbers. Filomat, 30 (4): 969-975.

Ozdemir, G., Simsek, Y. and Milovanović, G.V. 2017. Generating functions for special polynomials and numbers including Apostol-type and Humbert-type polynomials. Mediterranean Journal of Mathematics, 14 1-17.

Stanley, R.P. 2011. Enumerative Combinatorics. Cambridge studies in Advanced Mathematics, 1.

Shapcott, C. 2012. C-color compositions and palindromes, Fibonacci Quart. 50 (2012), no. 4, 297–303. Fibonacci Quart, 50 (4): 297-303.

Simsek, Y. 2019. Generating functions for finite sums involving higher powers of binomial coefficients: Analysis of hypergeometric functions including new families of polynomials and numbers. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 477 (2): 1328-1352.

Sloane, N.J.A. 2023. The on-line encyclopedia of integer sequences(OEIS), Available at: http://oeis.org/?language=english.

Srivatsan, C.S., Murthy, M.V.N., Bhaduri, R.K. 2006. Gentile Statistics and Restricted Partitions, Pramana, 66, 3, 485 494.

Zoghbi, A.C. 1993. Algorithms for Generating Integer Partitions, M.S. Thesis, University of Ottawa.

Zoghbi, A.C., Stojmenovic, I. 1998. Fast Algorithms for Generating Integer Partitions, International Journal of Computer Mathematic, 70, 2, 319-332.

Watson, G. 1937. Two tables of partitions. Proceedings of the London Mathematical Society, 2 (1): 550-556.

Weisstein, E. W. 2023. Üçgen SayıṀatematik Dünyası (https://mathworld.wolfram.com/TriangularNumber.html)(E.T. 21.05.2023).

Weisstein, E. W. 2023. Negative Binomial Series. Wolfram MathWorld. (E.T. 08.05.2023).

Wilf, H., 1994. Generating functionology, Ed. Academic Press Inc., Available online at:https://www2.math.upenn.edu/~wilf/gfology2.pdf.

Anonymous 1: http://empslocal.ex.ac.uk/people/staff/mrwatkin/zeta/partitioning.htm [Son Erişim Tarihi: 27.03.2023].

ÖZGEÇMİŞ

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2015-2018	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans 2011-2015	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Öğretim Görevlisi 2020-devam	Akdeniz Üniversitesi Manavgat Meslek Yüksek Yüksekokulu, Bilgisayar Teknolojileri ve Programlama Bölümü, Antalya

ESERLER

Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler

1- Al, B. and Alkan, M. (2020). On Relations for the Partitions of Numbers. *Filomat*, 34 (2), 567-574. Doi: 10.2298/FIL2002567A.

Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitaplarında basılan bildiriler

1- Al, B. and Alkan, M. (2018). A Note On The Relations Among Partitions. The Mediterranean International Conference of Pure&Applied Mathematics and Related Areas (MICOPAM 2018), Antalya, Türkiye, 26 Ekim 2018.

2- Al, B. and Alkan, M. (2019). Some Relations Between Partitions and Fibonacci Numbers. The 2nd Mediterranean International Conference of Pure&Applied Mathematics and Related Areas (MICOPAM2019), Paris, Fransa, 28-31 Ağustos 2019, ss.14-17.
3- Al, B. and Alkan, M. (2019). A Note On The Number Of Odd Dıstınct Partıtıon. International Symposiumon Advanced Engineering Technologies, Kahramanmaraş, Türkiye, 02 Mayıs 2019.
4- Al, B. and Alkan, M. (2019). Identities Related to the Bernoulli and the Euler Numbers and Polynomials. International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM), Rhodes, Yunanistan, 23-28 Eylül 2019, cilt.2293.
5- Al, B. and Alkan, M. (2019). Some Relations among Apostol-Euler Polynomials, Changhee and Stirling Numbers. International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM), Rhodes, Yunanistan, 23-28 Eylül 2019, cilt.2293.
6- Al, B. and Alkan, M. (2021). Note on non-commutative partition. The 3rd&4th Mediterranean International Conference of Pure&Applied Mathematics and Related Areas (MICOPAM 2020-2021), Antalya, Türkiye, 11-12 Kasım 2021, ss.70-73.
7- Al, B. and Alkan, M. (2022). Compositions Restricted to the Largest Part. 1st International Conference on Engineering and Applied Natural Sciences, Konya,Türkiye, 10 Mayıs 2022, ss.2423-2425.
8- Al, B. and Alkan, M. (2022). Bir TamSayının Parça Sayısıyla Kısıtlanmış Kompozisyonları. 1st International Conference on Engineering and Applied Natural Sciences, Konya,Türkiye, 10 Mayıs 2022, ss.2474-2476.
9- Al, B. and Alkan, M. (2022). A Note on Relation Between Partititons Number and Odd Partitions Number For a Positive Integers. 4th International Conference on Applied Engineering and Natural Sciences, Konya, Türkiye, 10 Kasım 2022, ss.28-30.
10- Al, B. and Alkan, M. (2022). Compositions Restricted to the Number of Part. 4th International Conference on Applied Engineering and Natural Sciences, Konya, Türkiye, 10 Kasım 2022.
11- Al, B. and Alkan, M. (2022). Relations Between Odd Parts and Distinct Odd Parts of a Positine Integers. 4th International Conference on Applied Engineering and Natural Sciences, Konya, Türkiye, 10 Kasım 2022.

12- Al, B. and Alkan, M. (2022). A Note on Fibonacci Numbers and Compositions. 4th International Conference on Applied Engineering and Natural Sciences, Konya, Türkiye, 10 Kasım 2022.

13- Al, B. and Alkan, M. (2022). A Note on Color Compositions and the Patterns. The 5th Mediterranean International Conference of Pure&Applied Mathematics and Related Areas (MICOPAM 2022), Antalya, Türkiye, 27 Ekim 2022, ss.158-161.

14- Al, B. and Alkan, M. (2022). Odd Compositions and Odd Partitions on Positive Integers. The 5th Mediterranean International Conference of Pure&Applied Mathematics and Related Areas (MICOPAM 2022), Antalya, Türkiye, 27 Ekim 2022, ss.45-48.

Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitaplarında basılan özetler

1- Al, B. and Alkan, M. (2022). A Note on the Composition of a Positive Integer Whose Parts Are Odd Integers. International Conference on Artificial Intelligence and Applied Mathematics in Engineering 2022, Baku, Azerbaycan, 20-22 Mayıs 2022, ss.141.

2- Al, B. and Alkan, M. (2022). A Note on Compositions of Positive Integers. International Conference on Artificial Intelligence and Applied Mathematics in Engineering 2022, Baku, Azerbaycan, 20-22 Mayıs 2022, ss.140.

Uluslararası yayınevleri tarafından yayımlanmış kitap bölümleri

1- Al, B. (2022). İktisadi ve İdari Bilimlerde Güncel Çalışmalar. Palet Yayınları, Konya, ss.7-20. ISBN: 978-625-6401-01-3.

2- Al, B. (2022). İktisat ve Matematik. Palet Yayınları, Konya, ss.151-173. ISBN: 978-625-6401-01-3.