T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

GENELLEŞMİŞ KAYMANIN DOĞURDUĞU İKİ-PARAMETRELİ BESSEL-TİPLİ POTANSİYELLER ÜZERİNE

Recep KAHRAMAN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS

TEMMUZ 2023

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

GENELLEŞMİŞ KAYMANIN DOĞURDUĞU İKİ-PARAMETRELİ BESSEL-TİPLİ POTANSİYELLER ÜZERİNE

Recep KAHRAMAN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS

TEMMUZ 2023

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞMİŞ KAYMANIN DOĞURDUĞU İKİ-PARAMETRELİ BESSEL-TİPLİ POTANSİYELLER ÜZERİNE

Recep KAHRAMAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS

Bu tez 07/07/2023 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/ Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN (Danışman)

Prof. Dr. Sinem SEZER EVCAN

Dr. Ögr. Üyesi Zafer ŞANLI

ÖZET

GENELLEŞMİŞ KAYMANIN DOĞURDUĞU İKİ-PARAMETRELİ BESSEL-TİPLİ POTANSİYELLER ÜZERİNE

Recep KAHRAMAN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN
TEMMUZ 2023; 37 sayfa

Bu tezde Laplace-Bessel diferansiyel operatörü

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{2\nu_k + 1}{x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) + \sum_{k=N+1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \quad \left(\nu_k > -\frac{1}{2},\ k = 1, \cdots, N \right)$$

tarafından üretilen genelleşmiş kayma operatörünün doğurduğu iki parametreye bağlı Bessel potansiyelleri dediğimiz bir operatörler ailesi tanımlanmıştır. Daha sonra bir dalgacık dönüşümü yardımıyla bu operatörler için ters belirleme formülleri elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Bessel potansiyelleri, Dalgacık tipli dönüşüm, Laplace-Bessel diferansiyel operatörü, Ters belirleme formülleri.

JÜRİ: Prof. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN
Prof. Dr. Sinem SEZER EVCAN
Dr. Ögr. Üyesi Zafer ŞANLI

ABSTRACT

ON BI-PARAMETRIC BESSEL-TYPE POTENTIALS GENERATED BY THE GENERALIZED TRANSLATION

Recep KAHRAMAN

MSc Thesis in MATHEMATICS
Supervisor: Prof.Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN
July 2023; 37 pages

In this thesis, a family of operators called Bessel potentials, which depend on the two parameters generated by the generalized shift operator associated with the Laplace-Bessel differential operator

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{2\nu_k+1}{x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\right) + \sum_{k=N+1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \ \left(\nu_k > -\frac{1}{2},\ k=1,\cdots,N\right),$$

is defined. Then, with the help of a wavelet transform, the inversion formulas for these operators are obtained.

KEYWORDS: Bessel potentials, Wavelet like transform, Laplace-Bessel differential operator, Inversion formulas.

COMMITTEE: Prof. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN
Prof. Dr. Sinem SEZER EVCAN
Asst. Prof. Dr. Zafer ŞANLI

ÖNSÖZ

Klasik Fourier harmonik analiz ve onun uygulamalarının önemli teknik araçlarından olan Bessel potansiyelleri, I birim operatör ve Δ Laplace diferansiyel operatörü olmak üzere, $(I-\Delta)$ diferansiyel operatörünün negatif "kesirsel" kuvvetleri olarak yorumlanan girişim tipli integral operatörlerdir. Klasik Fourier analizinde olduğu gibi Fourier-Bessel analizinin de temel teknik araçlarından biri genelleşmiş kaymanın (Laplace-Bessel kaymasının) doğurduğu Bessel potansiyelleridir.

Bu tez çalışmasında Laplace-Bessel diferansiyel operatörü Δ_B

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{2\nu_k+1}{x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\right) + \sum_{k=N+1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \ \left(\nu_k > -\frac{1}{2}, \ k=1,\cdots,N\right)$$

ile ilişkilendirilen genelleşmiş kaymanın doğurduğu Bessel potansiyellerinin bir genelleşmesi olan iki parametreye bağlı girişim tipli integral operatörler ailesi tanımlanarak uygun bir yarıgrubun ürettiği dalgacık (wavelet) tipli bir dönüşüm yardımıyla söz konusu potansiyeller için ters belirleme formülleri bulunmuştur.

Çalışma boyunca kıymetli zamanını ve değerli bilgilerini benden esirgemeyen danışmanım Sayın Prof. Dr. Simten Bayrakçı Doğan'a ve bölüm hocalarıma, maddi manevi benden desteklerini esirgemeyen aileme, bu süreçte yanımda olan arkadaşlarıma ve değerli bilgilerini paylaşan arkadaşım Güldane Yıldız'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans olarak sunduğum "Genelleşmiş Kaymanın Doğurduğu İki-Parametreli Bessel-Tipli Potansiyeller Üzerine " adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

07/07/2023

Recep KAHRAMAN

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

$\mathbb{R}^n$	: $n-$ boyutlu Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n_{N,+}$	: ilk N-değişkeni pozitif olan n-boyutlu Öklid uzayı
$\|E\|_\nu$	: E kümesinin ağırlıklı Lebesque ölçümü
$E(x,r)$	: $\mathbb{R}^n_{N,+}$uzayında x-merkezli, $r>0$ yarıcaplı yuvar
Δ_B	: Laplace-Bessel diferansiyel operatörü

Kısaltmalar:

$L_{p,\nu}(\mathbb{R}^n_{N,+})$	:	$L_{p,\nu}$
$L_p(\mathbb{R}^n)$	:	L_p
$S\left(\mathbb{R}^n\right)$	:	S
hemen hemen her	:	$h.h.$

1. GİRİŞ

Fourier harmonik analizinde Fourier serileri, Fourier dönüşümleri, potansiyel tipli integral operatörler, singüler integraller, maksimal operatörler ve çeşitli fonksiyonel uzaylar önemli rol oynamaktadır. Bazı diferansiyel operatörlerin negatif kesirsel kuvvetleri olarak yorumlanan potansiyel tipli operatörler arasında en önemlileri Riesz, Bessel ve Flett potansiyelleridir.

Klasik Bessel potansiyellerinin Fourier dönüşümü dilindeki ifadeleri

$$(\mathcal{J}\varphi)^{\wedge}(x) = (1+|x|^2)^{-\alpha/2}(\varphi)^{\wedge}(x), \ \ x \in \mathbb{R}^n, 0<\alpha<\infty$$

eşitliği ile verilir ve $I-$birim operatör ve $\Delta-$Laplace operatörü olmak üzere $(I-\Delta)$ operatörünün negatif kesirsel kuvvetleri olarak yorumlanır. Bessel potansiyelleri, Sobolev uzayları ve başka fonksiyonel uzayların genelleştirilmesinde önemli rol oynamaktadır.

Fourier harmonik analizinde Laplace diferansiyel operatörü ile ilişkili Öklid kayması yerine Bessel diferansiyel operatörü ile ilişkili Bessel kayması alınırsa Fourier-Bessel harmonik analizi elde edilir. Fourier-Bessel harmonik analizinde Bessel veya Laplace-Bessel diferansiyel operatörleri ile ilgili çalışmalar Delsarte (1938) ile başlamış ve Levitan (1951), Kipriyanov (1967), Lyakhov (1983), Trimeche (1997), Gadyiev ve Aliev (1988), Guliev (2003), Bayrakci (1998), Sezer, Bayrakçı, Yıldız, ve Kahraman (2022) ve birçok matematikçi ile devam etmiştir.

Laplace-Bessel diferansiyel operatörü

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{2\nu_k+1}{x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\right) + \sum_{k=N+1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \ \left(\nu_k > -\frac{1}{2}, \ k=1,\cdots,N\right)$$

olmak üzere genelleşmiş kaymanın doğurduğu Bessel potansiyelleri

$$F_\nu(\mathcal{J}\varphi)(x) = (1+|x|^2)^{-\alpha/2}F_\nu(\varphi)(x) \equiv (I-\Delta_B)^{-\alpha/2}f(x), \ \ 0<\alpha<\infty$$

şeklindedir.

Geçmişten günümüze Fourier veya Fourier-Bessel harmonik analizinde araştırmacılar için potansiyel operatörünün tersini belirleme ilginç problemler arasındadır. Stein (1961,1971), Lizorkin (1970), Wheeden (1968), Samko (1984), Rubin (1986, 1996), Aliev ve Bayrakci (1998) ve birçok matematikçi potansiyellerin terslerini belirlemede hipersingüler integral tekniğini kullanmıştır. Bunun yanında Rubin (1999) tarafından tanımlanan

Rubin ve Aliev (2009, 2001, 2005, 2008) tarafından geliştirilen sürekli dalgacık tipli dönüşümler vasıtasıyla Fourier veya Fourier-Bessel analizinde Riesz, Bessel ve Flett potansiyelleri için ters belirleme formülleri bulunmuştur.

Bu tez çalışmasında ilk N-değişkene Bessel ve $(n-N)$ değişkene Laplace diferansiyel operatörü uygulanarak elde edilen ve yukarıda tanımlanan Laplace-Bessel diferansiyel operatörü Δ_B ile ilişkilendirilen genelleşmiş kaymanın doğurduğu Bessel potansiyellerinin bir genelleşmesi olan iki parametreye bağlı $\mathcal{B}^{\alpha}_{\nu,\beta}$ operatörler ailesi tanımlanmıştır. Bu ailenin Fourier-Bessel dönüşümü dilindeki ifadesi

$$F_{\nu}(\mathcal{B}^{\alpha}_{\nu,\beta}\varphi)(x) = (1+|x|^{\beta})^{-\alpha/\beta}F_{\nu}(\varphi)(x) \equiv (I+(-\Delta_B)^{\beta/2})^{-\alpha/\beta}\varphi(x)$$

biçimindedir. Dolayısıyla çalışmamızda genelleşmiş kaymanın doğurduğu iki parametreye bağlı Bessel potansiyellerinin uygun bir yarıgrupla ilişkilendirilen dalgacık tipli dönüşüm kullanılarak tersleri elde edilmiştir.

Tez, Kaynak taraması, Materyal ve Metot, Bulgular ve Tartışma ve Sonuç bölümlerinden oluşmaktadır. Kaynak taraması bölümünde Fourier analizinin temel tanım ve kavramları verilmiştir. Materyal ve Metot bölümünde ilk olarak Fourier-Bessel analizinden gerekli kavramlar, genelleşmiş kaymanın doğurduğu Poisson ve Gauss-Weierrass çekirdekleri elde edilmiştir. Ardından iki parametreli yarıgrup tanımlanıp özellikleri incelenmiştir. Bulgular kısmında ise Laplace-Bessel diferansiyel operatörünün doğurduğu iki parametreye bağlı Bessel potansiyellerinin tersi uygun bir dalgacık tipli dönüşüm kullanılarak elde edilmiştir.

2. KAYNAK TARAMASI

2.1. Fourier Harmonik Analizinin Bazı Temel Kavramları

Tezimizin bu ilk kısmında ileride gerekli olacak reel analizin ve Fourier harmonik analizinin bazı temel tanım ve teoremlerini ifade edeceğiz. Klasik Poisson ve Gauss-Weierstrass çekirdeklerinin elde edilişlerini vereceğiz. İspatsız verilen teoremlerin ispatlarına yanlarında verilen kaynaklardan ulaşabiliriz. Temel tanım ve kavramlar için Folland (1984), Grafakos $(2008-2009)$ ve Stein (1971) kaynaklarına bakılabilir.

Teorem 2.1. *(Folland (1984)) (Fubini Teoremi)* $(X,\mathcal{M},\mu)$ *ve* $(Y,\mathcal{N},\nu)$ $\sigma-$*sonlu ölçüm uzayları,* $\mu\times\nu$ *ise* $\mathcal{M}\times\mathcal{N}$ *üzerinde* μ *ve* ν *nin çarpımı olsun. Eğer* $f:X\times Y\to\mathbb{R}$ *fonksiyonu* $\mu\times\nu$ *ölçümüne göre integrallenebilir ise* $h.h.x\in X$ *için* $\int\limits_Y f(x,y)d\nu(y)$ *ve* $h.h.y\in Y$ *için* $\int\limits_X f(x,y)d\mu(x)$ *integralleri sonludur ve*

$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)d(\mu\times\nu)=\int\limits_X\left(\int\limits_Y f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x)=\int\limits_Y\left(\int\limits_X f(x,y)d\mu(x)\right)d\nu(y)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2. *(Folland (1984)) (İntegraller İçin Minkowski Eşitsizliği)*

$(X,\mathcal{M},\mu)$ *ve* $(Y,\mathcal{N},\nu)$ $\sigma-$*sonlu ölçüm uzayları ve* $\varphi(x,y)$ *,* $\mathcal{M}\times\mathcal{N}$ *ölçülebilir fonksiyon ve* $p\geq 1$ *olmak üzere integraller için Minkowski eşitsizliği*

$$\left(\int\limits_X\left(\int\limits_Y|\varphi(x,y)|\,d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\leq\int\limits_Y\left(\int\limits_X|\varphi(x,y)|^p\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}d\nu(y)$$

biçimindedir.

Teorem 2.3. *(Folland (1984)) (Lebesque baskın yakınsama teoremi)* $(X,\mathcal{M},\mu)$ *ölçüm uzayında* $\{f_n\}$ *ölçülebilir fonksiyonlar dizisi ve* f *fonksiyonu verilmiş olsun.*

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\ h.h.x\in X$$

ve

$$|f_n(x)|\leq\varphi(x),\ \ \forall n$$

olacak şekilde X de integrallenebilir φ fonksiyonu var olsun. Bu durumda f fonksiyonu X de integrallenebilirdir ve aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\, dx = \int\limits_X f(x)\, dx.$$

Tanım 2.4. *$n-$boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, ..., x_n) : x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$ ve $\mathbb{R}^n$ üzerinde Lebesque ölçümünü göz önüne alalım. $L_p \equiv L_p(\mathbb{R}^n)$ - Lebesque uzayı*

$$L_p(\mathbb{R}^n) = \{\ f : f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ Lebesque ölçülebilir}, \|f\|_p < \infty, 1 \leq p < \infty\}$$

ve

$$\|f\|_p = (\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx)^{\frac{1}{p}},\ \ dx = dx_1...dx_n$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $p = \infty$ için

$$L_\infty(\mathbb{R}^n) = \{f : f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ Lebesque ölçülebilir}, \|f\|_\infty < \infty\}$$

ve

$$\|f\|_\infty = ess \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|$$

biçimindedir. $1 \leq p \leq \infty$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayı tam - normlu uzay yani, Banach uzayıdır.

$\mathbb{R}^n$ uzayında her mertebeden sürekli kısmi türevlenebilir fonksiyonların lineer uzayı $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. Ayrıca $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$ için $x \cdot y = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$ ve $|x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ dir. Bundan başka $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ notasyonu ile kısmi türevi göstereceğiz. Yüksek mertebeden kısmi türevler için multi - index notasyonu kullanılır.

$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ multi - index olmak üzere

$$|\alpha| = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\ ,\ \alpha! = \prod_{k=1}^{n} \alpha_k!\ \ ,\ \ \partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} ... \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

dir. $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$x^\alpha = \prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k}$$

şeklindedir.

$C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ uzayının bir alt uzayı olan $S(\mathbb{R}^n)$- Schwartz uzayını tanımlayalım. Bu uzay her mertebeden türevlenebilir, kendisi ve tüm türevleri hatta polinomla çarpılsa dahi sonsuzlukta hızla sıfıra giden fonksiyonların normlu uzayıdır. Schwartz uzayı

$$S = \left\{ f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{(N,\alpha)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^N |\partial^{\alpha} f(x)| < \infty, \forall\, N,\ \alpha \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Örneğin $\mathbb{R}^n$ de $f(x) = e^{-|x|^2}$ fonksiyonu Schwartz uzayına aittir. Her mertebeden türevlenebilir , kendisi ve tüm türevleri (hatta polinom ile çarpılsa dahi) hızla sıfıra giden (sonsuzlukta limiti sıfır olan) fonksiyondur. Kolayca görülebilir ki $\mathbb{R}^n$ de $f(x) = e^{-|x|}$ fonksiyonu Schwartz uzayına ait değildir.

Schwartz uzayı $S(\mathbb{R}^n)$, L_p uzayında yoğun olduğundan L_p uzayı için test fonksiyonları uzayı olarak bilinir. Ayrıca aşağıda tanımlayacağımız Fourier dönüşümü Schwartz uzayını, Schwartz uzayına taşır.

Tanım 2.5. *$f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere f fonksiyonunun Fourier dönüşümü*

$$f^{\wedge}(\lambda) \equiv F(\,f\,)(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-2\pi i\, \lambda\cdot x} dx, \quad dx = dx_1 ...dx_n$$

ile tanımlanır. $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ için

$$\begin{aligned} \|f^{\wedge}\|_{\infty} &= ess \sup_{\lambda\in\mathbb{R}^n} |f^{\wedge}(\lambda)| \\ &\leq ess \sup_{\lambda\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \left|e^{-2\pi i\lambda\cdot x}\right| dx = \|f\|_1 \end{aligned}$$

olduğundan $f^{\wedge}$, $h.h.\lambda \in \mathbb{R}^n$ için anlamlıdır.

Fourier dönüşümünün bazı özellikleri aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 2.6. *$f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ olsun.*

a) f'nin Fourier dönüşümü $f^{\wedge}$ lineerdir.

b) $h \in \mathbb{R}^n$ için $\sigma^h f(x) = f(x-h)$ olmak üzere

$$\left(\sigma^h f\,\right)^{\wedge}(\lambda) = e^{-2\pi i\, \lambda h} f^{\wedge}(\lambda)$$

eşitliği sağlanır.

c) $k \neq 0$ olmak üzere $\left(\,\delta^k f\,\right)(x) = f(kx)$ olmak üzere

$$\left(\,\delta^k f\,\right)^{\wedge}(\lambda) = \frac{1}{k} f^{\wedge}\left(\frac{\lambda}{k}\right)$$

eşitliği sağlanır.

d) $f'\ f'', ..., f^{(m)}, ... \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *ve* $f, f', ..., f^{(m)}, ... \in S$ *olsun. Bu durumda*

$$\left(f^{(m)}\right)^{\wedge}(\lambda) = (2\pi i\lambda)^m f^{\wedge}(\lambda)\,,\ m \in \mathbb{N}$$

ve

$$\frac{d^m f^{\wedge}(\lambda)}{d\,\lambda^m} = ((-2\pi i x)^m f)^{\wedge}(\lambda)\,,\ m \in \mathbb{N}$$

dir.

e) $f, g \in\ L_1(\mathbb{R}^n)$ *olmak üzere*

$$(f * g)^{\wedge}(\lambda) = f^{\wedge}(\lambda)\, g^{\wedge}(\lambda)$$

dir.

2.2. Klasik Gauss-Weierstrass ve Poisson Çekirdekleri

Bu kısımda çalıştığımız konunun kapsamlı ele alınması amacıyla klasik Gauss-Weierstrass ve Poisson çekirdeklerinin elde edilişini vereceğiz.

$f(x) = e^{-\pi a|x|^2}, a > 0,\ x \in (\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümüne **Gauss-Weierstrass Çekirdeği** denir.

Önce $\mathbb{R}$' de elde edelim ve $f(x) = e^{-\pi a x^2}$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulalım. $f(x) = e^{-\pi a x^2}$ olmak üzere

$$f'(x) = (-2a\pi x)\, f(x) \quad \text{ve} \quad f^{\wedge}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x.t} f(t)\, dt$$

Ayrıca

$$(f')^{\wedge}(x) = (2\pi i x)\, f^{\wedge}(x)$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi f'nin Fourier dönüşümünün türevini bulalım:

$$\begin{aligned}
(f^{\wedge})'(x) &= \frac{d}{dx}\int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-2\pi i x.t} dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx}\left(f(t)\, e^{-2\pi i x.t}\right) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} (-2\pi i t)\, f(t)\, e^{-2\pi i x.t} dt = ((-2\pi i t)\, f(t))^{\wedge}(x) \\
&= \left(\frac{i}{a}(-2\pi a t)\, f(t)\right)^{\wedge}(x) = \left(\frac{i}{a} f'(t)\right)^{\wedge}(x) \\
&= \frac{i}{a} 2\pi i x f^{\wedge}(x) = \left(-\frac{2\pi x}{a}\right) f^{\wedge}(x)
\end{aligned}$$

olur. Bu kısımda $f^{\wedge}(x) = g(x)$ diyelim ve $g'(x) = -\frac{2\pi x}{a} g(x)$ diferansiyel denklemini çözelim.

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = -\frac{2\pi x}{a}$$

eşitliğinin her iki tarafından integral alırsak

$$\begin{aligned} \ln g(x) + c_1 &= -\frac{2\pi x^2}{2a} \\ \ln g(x) &= -\frac{\pi x^2}{a} + c_2 \\ g(x) &= c_3 e^{-\frac{\pi x^2}{a}} \end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi bulduğumuz bu sonucu $f^{\wedge}(x) = g(x)$ eşitliğinde yerine yazalım:

$$f^{\wedge}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-2\pi i x.t} dt = c_2 e^{-\frac{\pi x^2}{a}}$$

ve c_2'yi bulabilmek için $x = 0$ alalım. Buradan

$$c_2 = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi a t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$f^{\wedge}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-2\pi i x.t} dt = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\pi x^2}{a}}$$

dir. $\mathbb{R}^n$ de $f(x) = e^{-\pi a |x|^2}$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulalım.

$$\begin{aligned} f^{\wedge}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi a |t|^2} e^{-2\pi i x.t} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi a \left(t_1^2 + \cdots + t_n^2\right)} e^{-2\pi i (x_1 t_1 + \cdots + x_n t_n)} dt_1 \cdots dt_n \\ &= \prod_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi a t_k^2} e^{-2\pi i x_k t_k} dt_k = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\pi x_k^2}{a}} \\ &= \frac{1}{a^{n/2}} e^{-\frac{\pi |x|^2}{a}}. \end{aligned}$$

Böylece Gauss-Weierstrass Çekirdeği

$$W(x, a) = \frac{1}{a^{n/2}} e^{-\frac{\pi |x|^2}{a}}$$

ile bulunur.

Şimdi ise $f(x) = e^{-2\pi\alpha|x|}$, $\alpha > 0$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünün

$$f^{\wedge}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-2\pi i x.\lambda} dx = c_n \frac{\alpha}{\left(\alpha^2 + |\lambda|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} \tag{2.1}$$

ve

$$c_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$$

Poisson Çekirdeği olduğunu görelim. Bunun için aşağıdaki eşitliği kullanacağız.

$$e^{-\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} e^{-\frac{\beta^2}{4y}} dy, \quad \beta > 0 \tag{2.2}$$

Bunun için ilk olarak (2.1) eşitliğini $\alpha = 1$ için gösterelim.

(2.2) eşitliğini, Fubini teoremini ve Gauss-Weierstrass çekirdeğini kullanarak

$$\begin{aligned}
f^{\wedge}(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi|x|} e^{-2\pi i x.\lambda} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^{\infty} \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} e^{-\frac{4\pi^2|x|^2}{4y}} e^{-2\pi i x.\lambda} dy \right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\pi^2|x|^2}{y}} e^{-2\pi i x.\lambda} dx \right) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\pi^2|x|^2}{y}} e^{-2\pi i x.\lambda} dx \right) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} \left(\frac{\pi}{y}\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi|\lambda|^2 y}{\pi}} dy \\
&= \frac{1}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^{\infty} e^{-y-|\lambda|^2 y} y^{\frac{n-1}{2}} dy
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu son ifadeye değişken değiştirme uygulayalım:

$$y\left(1 + |\lambda|^2\right) = t \text{ ve } dt = \left(1 + |\lambda|^2\right) dy$$

Buradan

$$\begin{aligned}
f^{\wedge}(\lambda) &= \frac{1}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^{\infty} e^{-t} \left(\frac{t}{1 + |\lambda|^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\left(1 + |\lambda|^2\right)} dt \\
&= \frac{1}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{\left(1 + |\lambda|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{n+1}{2}-1} dt \\
&= \pi^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \frac{1}{\left(1 + |\lambda|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\forall\alpha > 0$ için (2.3) gözönüne alınarak

$$\begin{aligned}
f^{\wedge}(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi\alpha|x|}e^{-2\pi i x.\lambda}dx = \cdots |y| = \alpha\,|x|\,, dy = \alpha^n dx \cdots \\
&= \alpha^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi|y|}e^{-2\pi i\frac{y}{\alpha}.\lambda}dy = \alpha^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi|y|}e^{-2\pi i\frac{\lambda}{\alpha}.y}dy \\
&= \alpha^{-n}\pi^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\frac{1}{\left(1+\left|\frac{\lambda}{\alpha}\right|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\
&= \alpha^{-n}\pi^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\frac{\alpha^{n+1}}{\left(\alpha^2+|\lambda|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\
&= \pi^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\frac{\alpha}{\left(\alpha^2+|\lambda|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}
\end{aligned}$$

(2.1) Poisson Çekirdeği elde edilir.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Fourier-Bessel Analizinin Bazı Tanım ve Kavramları

Bu kısımda tezimiz için gerekli olacak Fourier-Bessel analizinden temel tanım ve kavramları vereceğiz. $\mathbb{R}^n$ n-boyutlu Öklid uzayı ve $1 \leq N \leq n$ olmak üzere

$$\mathbb{R}^n_{N,+} = \left\{ x = (x', x'') \in \mathbb{R}^n,\ x' \in \mathbb{R}^N,\ x'' \in \mathbb{R}^{n-N},\ x_1, x_2, \cdots, x_N > 0 \right\}$$

uzayını tanımlayalım. $\nu = (\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_N)$ sabit tutulmuş multi-index, $k = 1, 2, \cdots, N$ için $\nu_k > -1/2$ ve $|\nu| = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_N$ olsun.

$E \subset \mathbb{R}^n_{N,+}$ ölçülebilir kümesinin Lebesgue ölçümü

$$|E|_\nu = \int\limits_E (x')^{2\nu+1}\, dx \ \text{ ve } \ (x')^{2\nu+1}\, dx = x_1^{2\nu_1+1} \cdots x_N^{2\nu_N+1} dx_1 \cdots dx_n$$

şeklinde olsun. Ayrıca $\mathbb{R}^n_{N,+}$ uzayında x-merkezli, $r > 0$ yarıçaplı yuvar

$$E(x, r) = \{ y \in \mathbb{R}^n_{N,+} : |x - y| < r \}$$

şeklinde tanımlansın. Orijin merkezli, $r > 0$ yarıçaplı yuvarın Lebesgue ölçümü ise

$$|E(0, r)|_\nu = \frac{\omega(n, \nu, N)}{r^{n+2|\nu|+N}}$$

şeklindedir ve burada $\omega(n, \nu, N) = |E(0, 1)|_\nu$ dir.

Lebesgue ölçülebilir fonksiyonların ağırlıklı Lebesgue uzayı $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$L_{p,\nu} \equiv L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right) = \left\{ f : \|f\|_{p,\nu} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} |f(x)|^p (x')^{2\nu+1}\, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

ile tanımlanır. Burada $(x')^{2\nu+1}\, dx = x_1^{2\nu_1+1} \cdots x_N^{2\nu_N+1} dx_1 \cdots dx_n$ dir.

Ayrıca genelleşmiş kayma için

$$\|T^y f\|_{p,\nu} \leq \|f\|_{p,\nu},\ 1 \leq p \leq \infty,\ y \in \mathbb{R}^n_{N,+} \tag{3.4}$$

ve

$$\|T^y f - f\|_{p,\nu} \to 0,\ |y| \longrightarrow 0 \tag{3.5}$$

sağlanır. (Aliev , Bayrakci 1998 ; Levitan 1951)

Tezimizde kullanacağımız Laplace-Bessel diferansiyel operatörü

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{2\nu_k + 1}{x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) + \sum_{k=N+1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2},$$

ile tanımlanır. Burada $\nu_k > -1/2,\ k = 1, 2, \cdots, N$ dir. Bu diferansiyel operatör ilk N-değişkene Bessel diferansiyel operatörü, $n - N$ değişkene de Laplace diferansiyel operatörü uygulanarak elde edilmiştir.

Laplace-Bessel diferansiyel operatörü Δ_B ile ilişkilendirilen genelleşmiş kayma operatörü ise

$$T^y f(x) = \prod_{k=1}^{N} \frac{\Gamma(\nu_k + 1)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu_k + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi} f\left((x', y')_\theta, x'' - y''\right) d_\nu(\theta)$$

şeklinde olup

$$(x', y')_\theta = \left((x_1, y_1)_{\theta_1}, \cdots, (x_N, y_N)_{\theta_N}\right), \quad (x_k, y_k)_{\theta_k} = \left(x_k^2 - 2x_k y_k \cos\theta_k + y_k^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$k = 1, \cdots, N$ ve $d_\nu(\theta) = \prod\limits_{k=1}^{N} \sin^{2\nu_k} \theta_k d\theta_k$ dır.

Fourier-Bessel dönüşümü ve ters Fourier-Bessel dönüşümü ise $x \in \mathbb{R}^n_{N,+}$ olmak üzere

$$(F_\nu f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n_{N,+}} f(y) e^{-i\langle x'', y''\rangle} \prod_{k=1}^{N} j_{\nu_k}(x_k, y_k) (y')^{2\nu+1} dy$$

ve

$$\left(F_\nu^{-1} f\right)(x) = c(n, \nu, N) (F_\nu f)(x', -x'')$$

ile tanımlanır.

Burada

$$c(n, \nu, N) = \left[(2\pi)^{n-N} 2^{2|\nu|} \prod_{k=1}^{N} \Gamma^2(\nu_{k+1})\right]^{-1} \tag{3.6}$$

olarak ifade edilir. Ayrıca $\langle x'', y''\rangle = x_{N+1} y_{N+1} + \cdots + x_n y_n$ dir.

$j_p(t), p > -1/2$ fonksiyonu ise normalleştirilmiş Bessel fonksiyonu olup birinci tip Bessel fonksiyonu ile ilişkisi şöyledir:

$$j_p(t) = 2^p \Gamma(p+1) t^{-p} J_p(t),\ j_p(0) = 1,\ \ 0 < t < \infty. \tag{3.7}$$

$S\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right)$, $\mathbb{R}^n_{N,+}$ uzayında Schwartz test fonksiyonları uzayı olmak üzere Fourier-Bessel dönüşümü, $S\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right)$ uzayının bir otomorfizmidir ve $\phi \in L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right)$ radial ise $F_\nu \phi$ de radial olur. (Zasorin 1986; Kipriyanov 1997)

$S\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right)$ uzayından alınmış fonksiyonlar için genelleşmiş girişim operatörü

$$(f \circledast g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} f(y)\left(T^y g\right)(x)\left(y'\right)^{2\nu+1} dy, \; x \in \mathbb{R}^n_{N,+}$$

şeklindedir. Genelleşmiş girişim aşağıda verilen Young eşitsizliğini de sağlar:

$$\|\varphi \circledast \psi\|_{r,\nu} \leq \|\varphi\|_{p,\nu} \|\psi\|_{q,\nu}, \; 1 \leq p, q, r \leq \infty \text{ ve } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$$

(Kipriyanov 1997).

Ayrıca klasik Fourier dönüşümünde olduğu gibi Fourier-Bessel dönüşümü de genelleşmiş girişim operatörünü çarpmaya dönüştürür. Yani, $f, g \in S\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right)$ olmak üzere

$$F_\nu (f \circledast g) = (F_\nu f)(F_\nu g)$$

dir.

Tezde kullanılacak önemli araçlardan biri olan genelleşmiş Hardy-Littlewood maksimal operatörü

$$(M_\nu f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^{n+N+2|\nu|}\omega(n,\nu,N)} \int\limits_{E(0,r)} T^y f(x)\left(x'\right)^{2\nu+1} dx$$

ile tanımlıdır. $M_\nu f$, $1 < p \leq \infty$ için $(L_{p,\nu}, L_{p,\nu})$-güçlü ve $(L_{1,\nu}, L_{1,\nu})$-zayıf tiplidir. (Guliev 1998, 2003, 2006)

Burada $E(0,r) = \left\{y \in \mathbb{R}^n_{N,+} : |x-y| > 0\right\}$ ve $\omega(n,\nu,N) = |E(0,1)|_\nu$ dir.

Bundan başka genelleşmiş Minkowski eşitsizliği, $\varphi(x,y)$ fonksiyonu $\mathbb{R}^m_x \times \mathbb{R}^n_y$ de ölçülebilir fonksiyon ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\left\| \int\limits_{\mathbb{R}^m_y} \varphi(x,y)\, dy \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n_x)} \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n_y} \|\varphi(\cdot,y)\|_{L_p(\mathbb{R}^n_x)} dy$$

şeklindedir.

3.2. Genelleşmiş Abel-Poisson ve Gauss-Weierstrass Çekirdeği

Bu kısmında genelleşmiş kaymanın doğurduğu Abel-Poisson çekirdeğini ve Gauss-Weierstrass çekirdeğini elde edelim. Bu iki çekirdeği sırasıyla $y \in \mathbb{R}^n_{N,+}$ olmak üzere $e^{-t|y|}$ ve $e^{-t|y|^2}$

fonksiyonlarının Fourier-Bessel dönüşümlerinden elde edeceğiz. İlk olarak $F_\nu\left(e^{-|y|}\right)(x)$ ifadesini hesaplayalım. Bunun için

$$e^{-\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} e^{-\beta^2/4z} dz$$

eşitliğini kullanacağız. (Stein, Weiss 1971). Böylece

$$F_\nu\left(e^{-|y|}\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^n_{N,+}} e^{-|y|} e^{-i\langle x'', y''\rangle} \prod_{k=1}^N j_{\nu_k}(x_k y_k)(y')^{2\nu+1} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^n_{N,+}} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} e^{-|y|^2/4z} dz\right] e^{-i\langle x'', y''\rangle} \prod_{k=1}^N j_{\nu_k}(x_k y_k)(y')^{2\nu+1} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} \left(\prod_{k=1}^N \int_0^\infty e^{-y_k^2/4z} j_{\nu_k}(x_k y_k) y_k^{2\nu_k+1} dy_k\right)\left(\prod_{k=N+1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-y_k^2/4z} e^{-ix_k y_k} dy_k\right) dz$$

olur. Buradan (3.6) ve (3.7) ifadelerini göz önüne alıp

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/4z} e^{-ixy} dy = 2\sqrt{\pi z} e^{-zx^2}$$

ve

$$\int_0^\infty y^{\nu+1} e^{-ty^2} J_\nu(\beta y)\, dy = \frac{\beta^\nu}{(2t)^{\nu+1}} e^{-\beta^2/4t};\ \operatorname{Re} t > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -1,$$

eşitliklerini kullanarak (Gradshteyn, Ryzhik 1994)

$$F_\nu\left(e^{-|y|}\right)(x) = \left(\sqrt{c(n,\nu,N)}\right)^{-1} 2^{|\nu|+\frac{n+N+1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma\left(|\nu| + \frac{N+n+1}{2}\right)}{\left(1+|x|^2\right)^{|\nu|+\frac{N+n+1}{2}}}$$

elde edilir. Bundan başka

$$F_\nu(f(\lambda y))(x) = \lambda^{-2|\nu|-N-n} F_\nu(f(y))\left(\frac{x}{\lambda}\right),\ \lambda > 0$$

olduğundan $\alpha > 0$ olmak üzere

$$F_\nu(e^{-t|y|})(x) = \left(\sqrt{c(n,\nu,N)}\right)^{-1} \frac{2^{|\nu|+\frac{n+N+1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \Gamma\left(|\nu| + \frac{N+n+1}{2}\right) \frac{t}{\left(t^2+|x|^2\right)^{|\nu|+\frac{N+n+1}{2}}}$$

olur. Böylece, genelleşmiş kaymanın doğurduğu Abel-Poisson çekirdeğini

$$p_\nu(|x|;t) = \sqrt{c(n,\nu,N)} \frac{2^{|\nu|+\frac{n+N+1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \Gamma\left(|\nu| + \frac{N+n+1}{2}\right) \frac{t}{(t^2+|x|^2)^{|\nu|+\frac{n+N+1}{2}}} \quad (3.8)$$

şeklinde tanımlarız. Tanımdan kolaylıkla görülür ki

$$F_\nu\left(p_\nu\left(|\cdot|\,;t\right)\right)(x)=e^{-t|x|},\ x\in\mathbb{R}^n_{N,+},\ t>0$$

dir.

Şimdi de genelleşmiş kaymanın doğurduğu Gauss-Weierstrass çekirdeğini elde edelim. Öncelikle

$$\begin{aligned}F_\nu(e^{-t|y|^2})\,(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} e^{-t|y|^2}e^{-i\langle x'',y''\rangle}\prod_{k=1}^{N} j_{\nu_k}\left(x_k y_k\right)\left(y'\right)^{2\nu+1}dy\\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} \prod_{k=1}^{N} e^{-ty_k^2} j_{\nu_k}\left(x_k y_k\right) y_k^{2\nu_k+1}dy_k \prod_{k=N+1}^{n} e^{-ty_k^2}e^{-ix_k y_k}dy_k\\ &= \prod_{k=1}^{N}\int\limits_0^\infty e^{-ty_k^2} j_{\nu_k}\left(x_k y_k\right) y_k^{2\nu_k+1}dy_k \prod_{k=N+1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ty_k^2}e^{-ix_k y_k}dy_k\end{aligned}$$

olur. Böylece (3.6) ve (3.7) kullanılarak

$$F_\nu(e^{-t|y|^2})\,(x)=\left(\sqrt{c\left(n,\nu,N\right)}\right)^{-1}2^{-\frac{n+N+2|\nu|}{2}}t^{-\frac{n-N}{2}}e^{\frac{-|x|^2}{4t}}$$

bulunur. Genelleşmiş kaymanın doğurduğu Gauss-Weierstrass çekirdeği ise

$$g_\nu\left(|x|\,;t\right)=\sqrt{c\left(n,\nu,N\right)}2^{-\frac{n+N+2|\nu|}{2}}t^{-\frac{n-N}{2}}e^{\frac{-|x|^2}{4t}} \tag{3.9}$$

ile tanımlanır. Ayrıca, $F_\nu\left(g_\nu\left(|\cdot|\,;t\right)\right)(x)=e^{-t|x|^2},\ t>0,\ x\in\mathbb{R}^n_{N,+}$ eşitliği tanımdan açıktır.

3.3. İki-Parametreli Bessel Çekirdeği, Yarı Grubu ve Özellikleri

Tanım 3.7. $x\in\mathbb{R}^n_{N,+}$, $0<t<\infty$ *ve* $0<\beta<\infty$ *olmak üzere Genelleşmiş kaymanın doğurduğu iki-parametreli Bessel çekirdeği*

$$w_\nu^{(\beta)}\left(|x|\,;t\right)=F_\nu^{-1}(e^{-t|y|^\beta})\,(x)=c\left(n,\nu,N\right)\int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} e^{-t|y|^\beta}e^{i\langle x'',y''\rangle}\prod_{k=1}^{N} j_{\nu_k}\left(x_k y_k\right)\left(y'\right)^{2\nu+1}dy$$

ile tanımlanır.

Görülür ki $\beta=1$ için $w_\nu^{(1)}\left(|x|\,;t\right)=p_\nu\left(|x|\,;t\right)$ Abel-Poisson çekirdeği ve $\beta=2$ için $w_\nu^{(2)}\left(|x|\,;t\right)=g_\nu\left(|x|\,;t\right)$ Gauss-Weierstrass çekirdeğidir.

İki-parametreli $w_\nu^{(\beta)}(|x|;t)$ Bessel çekirdeğinin (3.8) ve (3.9) ifadelerinde tanımlanan Abel-Poisson ve Gauss-Weierstrass çekirdeklerinde olduğu gibi açıkça bir ifadesi olmasa bile bazı önemli özellikleri aşağıdaki teoremde ispatlanmıştır.

Teorem 3.8. ***a)*** $x, y \in \mathbb{R}^n_{N,+},\ 0 < t < \infty,\ 0 < \beta < \infty$ *olsun. Buradan*

$$w_\nu^{(\beta)}\left(\lambda |x|;\lambda^\beta t\right) \ = \lambda^{-(2|\nu|+n+N)} w_\nu^{(\beta)}(|x|;t)$$

ve $\lambda = t^{-1/\beta}$ *için*

$$w_\nu^{(\beta)}(|x|;t) = t^{-\frac{n+N+2|\nu|}{\beta}} w_\nu^{(\beta)}\left(t^{-1/\beta}|x|;1\right). \tag{3.10}$$

b) $0 < \beta \leq 2$ *için*

$$w_\nu^{(\beta)}(|x|;t) > 0. \tag{3.11}$$

c) $\beta = 2k,\ k \in \mathbb{N}$ *için*

$$w_\nu^{(\beta)}(|x|;t) \in S\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right). \tag{3.12}$$

d) $0 < \beta \leq 2$ *ya da* $\beta = 2k,\ k \in \mathbb{N}$ *için*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} w_\nu^{(\beta)}(|x|;t)\,(x')^{2\nu+1}\,dx = 1. \tag{3.13}$$

İspat $x, y \in \mathbb{R}^n_{N,+},\ 0 < t < \infty$ ve $0 < \beta < \infty$ olsun.

a)

$$w_\nu^{(\beta)}\left(\lambda |x|, \lambda^\beta t\right) = c(n,\nu,N) \int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} e^{-t\lambda^\beta |y|^\beta} e^{i\langle \lambda x'', y''\rangle} \prod_{k=1}^{N} j_{\nu_k}(\lambda x_k y_k)\,(y')^{2\nu+1}\,dy$$

$$\cdots \left(y = \lambda^{-1} z,\ dy = \lambda^{-n} dz \text{ dönüşümü yapılırsa}\right) \cdots$$

$$\begin{aligned}
&= c(n,\nu,N) \int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} e^{-t\lambda^\beta \left|\lambda^{-1} z\right|^\beta} e^{i\left\langle \lambda x'', \lambda^{-1} z''\right\rangle} \prod_{k=1}^{N} j_{\nu_k}\left(\lambda x_k \lambda^{-1} z_k\right) \left(\left(\lambda^{-1} z\right)'\right)^{2\nu+1} \lambda^{-n} dz \\
&= \lambda^{-(2|\nu|+n+N)} c(n,\nu,N) \int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} e^{-t|z|^\beta} e^{i\langle x'', z''\rangle} \prod_{k=1}^{N} j_{\nu_k}(x_k \lambda z_k)\,(z')^{2\nu+1}\,dz \\
&= \lambda^{-(2|\nu|+n+N)} w_\nu^{(\beta)}(|x|;t).
\end{aligned}$$

Burada özel olarak $\lambda = \alpha^{-\frac{1}{\beta}}$ olarak alınırsa

$$w_\nu^{(\beta)}\left(|x|, t\right) = t^{-\frac{n+N+2|\nu|}{\beta}} w_\nu^{(\beta)}\left(t^{-\frac{1}{\beta}}|x|, 1\right). \tag{3.14}$$

b) $0 < \beta \leq 2$ olsun. Bu durumda I.A Gobulov (1980) makalesindeki Bernstein teoremine göre $[0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan, sonlu, $\mu_\beta\left([0, \infty)\right) = 1$ olan ve

$$e^{-z^{\beta/2}} = \int\limits_0^\infty e^{-\xi z} d\mu_\beta\left(\xi\right)$$

eşitliğini sağlayan bir μ_β ölçümü vardır. $z = t^{2/\beta}|y|^2$ yazarsak

$$e^{-t|y|^\beta} = \int\limits_0^\infty e^{-t^{2/\beta}\xi|y|^2} d\mu_\beta\left(\xi\right) \tag{3.15}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} w_\nu^{(\beta)}\left(|x|; t\right) &= F_\nu^{-1}\left(e^{-t|y|^\beta}\right)(x) \\ &= F_\nu^{-1}\left(\int\limits_0^\infty e^{-t^{2/\beta}\xi|y|^2} d\mu_\beta\left(\xi\right)\right)(x) \\ &= \int\limits_0^\infty F_\nu^{-1}\left(e^{-t^{2/\beta}\xi|y|^2}\right)(x)\, d\mu_\beta\left(\xi\right) \\ &= c\left(n, \nu, N\right)\int\limits_0^\infty F_\nu\left(e^{-t^{2/\beta}\xi|y|^2}\right)\left(x', -x''\right)(x)\, d\mu_\beta\left(\xi\right) \\ &= \sqrt{c\left(n, \nu, N\right)}2^{-\frac{n+N+2|\nu|}{2}} t^{-\frac{n-N}{\beta}} \int\limits_0^\infty \xi^{-\frac{n-N}{2}} e^{\frac{-|x|^2}{4\xi}t^{-2/\beta}} d\mu_\beta\left(\xi\right) > 0 \end{aligned} \tag{3.16}$$

elde edilir.

c) $\beta = 2k,\ k \in \mathbb{N}$ olsun.

$$e^{-|y|^{2k}} \in S\left(\mathbb{R}_{N,+}^n\right)$$

olduğundan

$$F_\nu^{-1}\left(e^{-t|y|^{2k}}\right)(x) = w_\nu^{(2k)}\left(|x|; t\right) \in \mathbb{R}_{N,+}^n$$

olur. Böylece $w_\nu^{(2k)}\left(|x|; t\right)$; $\mathbb{R}^n$ üzerinde sonsuz pürüzsüz ve hızla azalandır. Yani negatif olmayan her $k_1, \cdots, k_n$ ve $m_{1,\cdots,}m_n$ tamsayıları için

$$\lim_{|x|\to\infty} |x_1|^{m1} \cdots |x_n|^{m_n} \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}} w_\nu^{(2k)}\left(|x|; t\right) = 0$$

eşitliği sağlanır.

d) $\beta = 2k,\ k \in \mathbb{N}$ olsun. (c) den elde edildiği üzere $w_\nu^{(2k)}(|x|\,;t) \in S\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right)$ olduğundan $w_\nu^{(2k)}(|x|\,;t) \in L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right)$ olur. Ayrıca tanımdan

$$F_\nu\left(w_\nu^{(2k)}(|x|\,;t)\right) = e^{-t|y|^{2k}}$$

olduğundan

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} w_\nu^{(2k)}(|x|\,;t)\, e^{-i\langle x'',y''\rangle} \prod_{k=1}^{N} j_{\nu_k}(x_k y_k)\,(x')^{2\nu+1}\,dx = e^{-t|y|^{2k}}$$

şeklinde yazılabilir. Son eşitlikte $y = (0,0,\cdots,0) \in \mathbb{R}^n_{N,+}$ olarak alınırsa

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} w_\nu^{(2k)}(|x|\,;t)\,(x')^{2\nu+1}\,dx = 1$$

elde edilir. Şimdi $0 < \beta < 2$ durumuna bakalım. $w_\nu^{(\beta)}(|x|\,;t)$ çekirdeğinin tanımından, Fubini teoreminden ve (3.15) formülünden

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} w_\nu^{(\beta)}(|x|\,;t)\,(x')^{2\nu+1}dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} e^{-t|y|^\beta} e^{i\langle x'',y''\rangle} \prod_{k=1}^{N} j_{\nu_k}(x_k y_k)\,(y')^{2\nu+1}\,dy \right) (x')^{2\nu+1}dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} \left(\int\limits_0^\infty e^{-t^{2/\beta}\xi|y|^2} d\mu_\beta(\xi) \right) e^{i\langle x'',y''\rangle} \prod_{k=1}^{N} j_{\nu_k}(x_k y_k)\,(y')^{2\nu+1}\,dy \right] (x')^{2\nu+1}dx \\
&= \int\limits_0^\infty \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} e^{-t^{2/\beta}\xi|y|^2} e^{i\langle x'',y''\rangle} \prod_{k=1}^{N} j_{\nu_k}(x_k y_k)\,(y')^{2\nu+1}\,dy \right) (x')^{2\nu+1}dx \right] d\mu_\beta(\xi) \\
&= \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} w_\nu^{(2)}\left(|x|\,;t^{2/\beta}\xi\right)(x')^{2\nu+1}dx \right) d\mu_\beta(\xi)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} w_\nu^{(2)}\left(|x|\,;t^{2/\beta}\xi\right)(x')^{2\nu+1}dx = 1$$

olduğundan

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} w_\nu^{(\beta)}\left(|x|\,;t\right)(x')^{2\nu+1}dx=\int\limits_0^\infty d\mu_\beta\left(\xi\right)=1$$

elde edilir. □

Tanım 3.9. *Genelleşmiş kaymanın doğurduğu iki-parametreli Bessel yarıgrubu girişim tipli bir integral operatördür. Şöyle ki, iki-parametreli Bessel çekirdeği* $w_\nu^{(\beta)}\left(|x|\,;t\right)$, $t>0$, $\beta>0$, $x\in\mathbb{R}^n_{N,+}$ *ve* $f\in L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right)$ *olmak üzere* $W_{\nu,t}^{(\beta)}f$ *ile gösterilen iki-parametreli Bessel yarıgrubu*

$$W_{\nu,t}^{(\beta)}f\left(x\right)=\left(w_\nu^{(\beta)}\left(|.|\,;t\right)\circledast f\right)=\int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} w_\nu^{(\beta)}\left(|y|\,;t\right)T^yf\left(x\right)\left(y'\right)^{2\nu+1}dy$$

ile tanımlanır.

Bu integral operatörün yarıgrup özelliği

$$W_{\nu,r+s}^{(\beta)}f=W_{\nu,r}^{(\beta)}W_{\nu,s}^{(\beta)} \tag{3.17}$$

eşitliğin her iki yanından Fourier-Bessel dönüşümü alınarak görülür. Yani, $x\in\mathbb{R}^n_{N,+}$ ve $s,r>0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}F_\nu\left(W_{\nu,r+s}^{(\beta)}f\right)(x) &= e^{-(r+s)|x|^\beta}\left(F_\nu f\right)(x)\\ &= e^{-r|x|^\beta}e^{-s|x|^\beta}\left(F_\nu f\right)(x)=e^{-r|x|^\beta}\left(F_\nu W_s^{(\beta)}\right)(x)\\ &= F_\nu\left(W_r^{(\beta)}W_s^{(\beta)}f\right)(x)\end{aligned}$$

Aşağıdaki teorem ile bu integral operatörünün bazı özelliklerini ispatlayalım.

Teorem 3.10. $f\in L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right)$, $1\leq p\leq\infty$, $\beta=2k,\ k\in\mathbb{N}$ *ya da* $0<\beta\leq 2$ *olsun. Bu durumda*

a)

$$\left\|W_{\nu,t}^{(\beta)}f\right\|_{p,\nu}\leq c\left(\beta\right)\|f\|_{p,\nu} \tag{3.18}$$

sağlanır. Burada $c\left(\beta\right)=\int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}}\left|w_\nu^{(\beta)}\left(|x|\,,t\right)\right|\left(x'\right)^{2\nu+1}dx$ *dir. Yani iki-parametreli Bessel integral operatörü* $W_{\nu,t}^{(\beta)}$, $L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right)$ *uzayında sınırlıdır.*

b)

$$\lim_{t\to 0^+}\left(W_{\nu,t}^{(\beta)}f\right)(x)=f\left(x\right). \tag{3.19}$$

Burada limit hem L_p- normunda hem de $h.h.x \in \mathbb{R}^n_{N,+}$ için noktasal anlamdadır. $f \in L_{\infty,\nu} = C_0$ durumunda yakınsama düzgündür.

c) *$M_\nu f$ genelleşmiş Hardy-Littlewood maksimal operatörü olmak üzere*

$$\sup_{t>0}\left|\left(W^{(\beta)}_{\nu,t} f\right)(x)\right| \leq c\left(M_\nu f\right)(x). \tag{3.20}$$

d)

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n_{N,+}}\left|\left(W^{(\beta)}_{\nu,t} f\right)(x)\right| \leq t^{-\frac{n+N+2|\nu|}{p\beta}} c\left\|f\right\|_{p,\nu},\ 1 \leq p < \infty. \tag{3.21}$$

İspat

a) İntegraller için Minkowski eşitsizliği göz önüne alınırsa

$$\left\|W^{(\beta)}_{\nu,t} f\right\|_{p,\nu} = \left\|\int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} w^{(\beta)}_\nu\left(|y|;t\right) T^y f(x)\left(y'\right)^{2\nu+1} dy\right\|_{p,\nu}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} w^{(\beta)}_\nu\left(|y|;t\right) T^y f(x)\left(y'\right)^{2\nu+1} dy\right|^p \left(x'\right)^{2\nu+1} dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}}\left|w^{(\beta)}_\nu\left(|y|;t\right)\right|^p\left|T^y f(x)\right|^p\left(x'\right)^{2\nu+1} dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(y'\right)^{2\nu+1} dy \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}}\left|w^{(\beta)}_\nu\left(|y|;t\right)\right|\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}}\left|T^y f(x)\right|^p\left(x'\right)^{2\nu+1} dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(y'\right)^{2\nu+1} dy \\
&= \left\|T^y f\right\|_{p,\nu}\int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}}\left|w^{(\beta)}_\nu\left(|y|;t\right)\right|\left(y'\right)^{2\nu+1} dy
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son ifadeye (3.14) bağıntısı uygulanarak ve (3.5) eşitsizliği göz önüne alınarak

$$
\begin{aligned}
&= \|T^y f\|_{p,\nu} \int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} t^{-\frac{n+N+2|\nu|}{\beta}} \left| w_\nu^{(\beta)} \left(t^{-\frac{1}{\beta}} |y| \, ; 1 \right) \right| (y')^{2\nu+1} \, dy \\
&\quad \cdots \left(y = t^{\frac{1}{\beta}} z, \ dy = t^{\frac{1}{\beta}} dz \right) \cdots \\
&= \|T^y f\|_{p,\nu} \, t^{-\frac{n+N+2|\nu|}{\beta}} \int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} \left| w_\nu^{(\beta)} (|z| \, ; 1) \right| \left(\prod_{k=1}^{N} \left(\alpha^{1/\beta} z_k \right)^{2\nu+1} \right) t^{\frac{n}{\beta}} dz \\
&= \|T^y f\| \, t^{-\frac{n+N+2|\nu|}{\beta}} t^{\frac{n}{\beta}} t^{\frac{2|\nu|+N}{\beta}} \int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} \left| w_\nu^{(\beta)} (|z| \, ; 1) \right| (z')^{2\nu+1} \, dz \\
&\leq c(\beta) \, \|f\|_{p,\nu}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

b) Önce $\lim_{t \to 0^+} \left(W_{\nu,t}^{(\beta)} f \right)(x) = f(x)$ limitini $L_{p,\nu}-$normunda gösterelim. $f \in L_{p,\nu}$, $1 \leq p \leq \infty$ $(L_{\infty,\nu} \equiv C_0)$, $0 < \beta \leq 2$ ya da $\beta = 2k, \ k \in \mathbb{N}$ ise

$$
\int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} w_\nu^{(\beta)} (|x| \, , t) \, (x')^{2\nu+1} \, dx = 1
$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
&\left(W_{\nu,t}^{(\beta)} f \right)(x) - f(x) = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} w_\nu^{(\beta)} (|y| \, , t) \, T^y f(x) \, (y')^{2\nu+1} \, dy - \int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} f(x) \, w_\nu^{(\beta)} (|y| \, , t) \, (y')^{2\nu+1} \, dy
\end{aligned}
$$

olur. Burada integraller için Minkowski eşitsizliğine göre

$$
\left\| W_{\nu,t}^{(\beta)} f - f \right\|_{p,\nu} \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} \left| w_\nu^{(\beta)} (|y| \, , t) \right| \|T^y f - f\|_{p,\nu} \, (y')^{2\nu+1} \, dy
$$

$$
\begin{aligned}
&= t^{-\frac{n+N+2|\nu|}{\beta}} \int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} \left| w_\nu^{(\beta)} \left(t^{-\frac{1}{\beta}} |y| \, , 1 \right) \right| \|T^y f - f\|_{p,\nu} \, (y')^{2\nu+1} \, dy \\
&\quad \cdots \left(y = t^{-\frac{1}{\beta}} z, \ dy = t^{-\frac{1}{\beta}} dz \right) \cdots \\
&= t^{-\frac{n+N+2|\nu|}{\beta}} \int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} \left| w_\nu^{(\beta)} (|z| \, , 1) \right| \left\| T^{\alpha^{-1/\beta} z} f - f \right\|_{p,\nu} \left(t^{1/\beta} \right)^{n+N+2|\nu|} (z')^{2\nu+1} \, dy \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} \left| w_\nu^{(\beta)} (|z| \, , 1) \right| \left\| T^{\alpha^{-1/\beta} z} f - f \right\|_{p,\nu} (z')^{2\nu+1} \, dy
\end{aligned}
$$

bulunur.

$$\left\| T^{\alpha^{-1/\beta}z} f - f \right\|_{p,\nu} \leq 2 \left\| f \right\|_{p,\nu}$$

eşitsizliğinden ve

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \left\| T^{t^{-1/\beta}z} f - f \right\|_{p,\nu} = 0$$

olduğundan Lebesgue baskın yakınsama teoremi gereğince

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \left\| W_{\nu,t}^{(\beta)} f - f \right\|_{p,\nu} = 0$$

elde edilir.

c) Bir $\varphi \in L_{1,\nu}$ fonksiyonunun

$$\int_{\mathbb{R}^n_{N,+}} \rho\left(|x|\right) \left(x'\right)^{2\nu+1} dx < \infty$$

koşulunu sağlayan, azalan, pozitif ve radial $\rho\left(|x|\right)$ majorantı varsa bu durumda her $f \in L_{p,\nu}$ $(1 \leq p \leq \infty)$ ve

$$\varphi_\varepsilon\left(x\right) = \varepsilon^{-(n+N+2|\nu|)} \varphi\left(\frac{1}{\varepsilon} x\right)$$

için

$$\sup_{\varepsilon > 0} \left|\left(\varphi_\varepsilon \circledast f\right)(x)\right| \leq \left\|\rho\right\|_{1,\nu} \left(M_\nu f\right)(x) \qquad (3.22)$$

olur. Bu ifadenin doğruluğu, Aliev ve Bayrakci (1998) makalesindeki Teorem 2.1' in ispatına benzer şekilde kolayca görülebilir. $\rho\left(|x|\right) = w_\nu^{(\beta)}\left(|x|\,;1\right),\ \varepsilon = t^{\frac{1}{\beta}}$ koyulup, (3.14) ve (3.22) hesaba katılarak, her $0 < \beta \leq 2$ ya da $\beta = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ için

$$\sup_{t>0} \left|\left(W_{\nu,t}^{(\beta)} f\right)(x)\right| \leq c\left(M_\nu f\right)(x)$$

burada

$$c = \int_{\mathbb{R}^n_{N,+}} \left|w_\nu^{(\beta)}\left(|x|\,,1\right)\right| \left(x'\right)^{2\nu+1} dx < \infty$$

dir. Gerçekten de (3.16) eşitliğinde $t = 1$ alınırsa görülür ki $w_\nu^{(\beta)}\left(|x|\,;1\right)$ monoton azalan ve $\beta = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ için $w_\nu^{(\beta)}\left(|x|\,;1\right) \in S\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right)$ olduğundan azalan, radial ve integrallenebilir bir majorantı vardır.

d) Genelleşmiş girişim için Young eşitsizliğinde $r = \infty$ durumu ve (3.14) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n_{N,+}} \left|\left(W_{\nu,t}^{(\beta)} f\right)(x)\right| = \left\|w_\nu^{(\beta)}\left(|\cdot|\,;t\right) \circledast f\right\|_{\infty,\nu} \leq \left\|f\right\|_{p,\nu} \left\|w_\nu^{(\beta)}\left(|x|\,;t\right)\right\|_{q,\nu}\ ;\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$
\begin{aligned}
&= \|f\|_{p,\nu}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} \left|w^{(\beta)}_{\nu}(|x|\,;t)\right|^q (x')^{2\nu+1}dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= t^{-\frac{n+N+2|\nu|}{\beta}} t^{\frac{n+N+2|\nu|}{q\beta}} \|f\|_{p,\nu}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}} \left|w^{(\beta)}_{\nu}(|z|\,;1)\right|^q (z')^{2\nu+1}dz\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= t^{-\frac{n+N+2|\nu|}{p\beta}} \|f\|_{p,\nu}\left\|w^{(\beta)}_{\nu}(|\cdot|\,;1)\right\|_{q,\nu}
\end{aligned}
$$

elde edilir. □

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. İki-parametreli Bessel Potansiyeli Ve Özellikleri

Tanım 4.11. *Genelleşmiş kaymanın doğurduğu iki-parametreli Bessel potansiyeli,* $I + (-\Delta_B)^{\beta/2}$ *diferansiyel operatörünün* $(-\alpha/\beta)$ *kesirsel kuvveti olarak yorumlanır ve formal olarak*

$$\mathcal{B}^{\alpha}_{\nu,\beta} f = \left(I + (-\Delta_B)^{\beta/2}\right)^{-\frac{\alpha}{\beta}} f, \; f \in S\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right)$$

ile tanımlanır. $\beta = 1$ *ve* $\beta = 2$ *için sırasıyla, genelleşmiş kaymanın doğurduğu Bessel ve Flett potansiyellerine karşılık gelir. Bu potansiyelin açık ifadesi şöyledir:*

$$\mathcal{B}^{\alpha}_{\nu,\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_0^{\infty} t^{\alpha/\beta} e^{-t} W^{(\beta)}_{\nu,t} f\,(x)\, \frac{dt}{t} \tag{4.23}$$

Burada $\left\{W^{(\beta)}_{\nu,t} f\right\}_{t\geq 0}$ *operatörü genelleşmiş kaymanın doğurduğu iki parametreli Bessel yarıgrubudur.*

Aşağıdaki teoremle $\mathcal{B}^{\alpha}_{\nu,\beta} f$ potansiyelinin başlıca özelliklerini kanıtlayalım.

Teorem 4.12. $1 \leq p \leq \infty$ *ve* $f \in L_{p,\nu}$ *olsun.*

a) $\forall \alpha, \beta > 0$ *için*

$$\left\|\mathcal{B}^{\alpha}_{\nu,\beta} f\right\|_{p,\nu} \leq c\,(\beta)\, \|f\|_{p,\nu} \tag{4.24}$$

sağlanır. Özel olarak $0 < \beta \leq 2$ *için* $c\,(\beta) = 1$ *yazabiliriz.*

b) $\mathcal{B}^{\alpha}_{\nu,\beta} f$ *girişim tipli bir operatör olup* $x \in \mathbb{R}^n_{N,+}$ *ve* $\alpha, \beta > 0$ *için*

$$F_\nu\left(\mathcal{B}^{\alpha}_{\nu,\beta} f\right)(x) = \left(1 + |x|^{\beta}\right)^{-\frac{\alpha}{\beta}} F_\nu\,(f)\,, \; f \in S\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right). \tag{4.25}$$

c) $\forall \alpha, \beta > 0$ *için* $\mathcal{B}^{\alpha}_{\nu,\beta}$ *operatörü* $S\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right)$ *uzayında bir otomorfizmdir. Yani*

$$\mathcal{B}^{\alpha}_{\nu,\beta} : S\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right) \to S\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right). \tag{4.26}$$

d) $\beta > 0$ *için* $\left\{B^{\alpha}_{\nu,\beta} f\right\}_{\alpha\geq 0}$ *ailesi yarıgrup özelliğini sağlar. Yani*

$$\mathcal{B}^{\alpha_1+\alpha_2}_{\nu,\beta} = \mathcal{B}^{\alpha_1}_{\nu,\beta} \mathcal{B}^{\alpha_2}_{\nu,\beta}\,, \;\; \left(\alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \; \mathcal{B}^{0}_{\nu,\beta} = E\right). \tag{4.27}$$

İspat

$1 \leq p \leq \infty$ ve $f \in L_p\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right)$ olsun.

a) Potansiyelin tanımından ve integraller için genelleşmiş Minkowski eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{B}_{\nu,\beta}^{\alpha}f\right\|_{p,\nu} &= \left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)}\int\limits_0^\infty t^{\alpha/\beta}e^{-t}W_{\nu,t}^{(\beta)}f(x)\,\frac{dt}{t}\right\|_{p,\nu} \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)}\int\limits_0^\infty t^{\alpha/\beta-1}e^{-t}\left\|W_{\nu,t}^{(\beta)}f(x)\right\|_{p,\nu}dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)}\Gamma(\alpha/\beta)\left\|W_{\nu,t}^{(\beta)}f(x)\right\|_{p,\nu} \\ &= \left\|W_{\nu,t}^{(\beta)}f(x)\right\|_{p,\nu}\end{aligned}$$

elde edilir. (3.18) den

$$\left\|W_{\nu,t}^{(\beta)}f\right\|_{p,\nu} \leq c(\beta)\left\|f\right\|_{p,\nu}$$

olduğundan

$$\left\|\mathcal{B}_{\nu,\beta}^{\alpha}f\right\|_{p,\nu} \leq c(\beta)\left\|f\right\|_{p,\nu}$$

elde edilir. Ayrıca Teorem 3.8 d) şıkkına göre $0 < \beta \leq 2$ için $c(\beta) = 1$ olur.

b) $f \in S\left(\mathbb{R}_{N,+}^n\right)$ ve $\alpha > 0,\ \beta > 0$ olsun.

$$\begin{aligned}F_\nu\left(\mathcal{B}_{\nu,\beta}^{\alpha}f\right)(x) &= F_\nu\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)}\int\limits_0^\infty t^{\alpha/\beta}e^{-t}W_{\nu,t}^{(\beta)}f(y)\,\frac{dt}{t}\right)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)}\int\limits_0^\infty t^{\alpha/\beta-1}e^{-t}F_\nu\left(W_{\nu,t}^{(\beta)}f(y)\right)(x)\,dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)}\int\limits_0^\infty t^{\alpha/\beta-1}e^{-t}F_\nu\left(w_\nu^{(\beta)}(|y|\,;t)\circledast f(y)\right)(x)\,dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)}\int\limits_0^\infty t^{\alpha/\beta-1}e^{-t}e^{-t|x|^\beta}(F_\nu f)(x)\,dt \\ &= \frac{(F_\nu f)(x)}{\Gamma(\alpha/\beta)}\int\limits_0^\infty t^{\alpha/\beta-1}e^{-t\left(1+|x|^\beta\right)}dt \\ &\cdots\left(t = u\left(1+|x|^\beta\right)^{-1},\ dt = du\left(1+|x|^\beta\right)^{-1}\right)\cdots \\ &= \frac{(F_\nu f)(x)}{\Gamma(\alpha/\beta)}\left(1+|x|^\beta\right)^{-1}\left(1+|x|^\beta\right)^{1-\alpha/\beta}\int\limits_0^\infty u^{\alpha/\beta-1}e^{-u}du \\ &= \left(1+|x|^\beta\right)^{-\alpha/\beta}(F_\nu f)(x).\end{aligned}$$

c) $F_\nu : S\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right) \to S\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right)$ bir otomorfizm olduğundan $\varphi \in S\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right)$ için

$$F_\nu\left(\mathcal{B}^\alpha_{\nu,\beta}\varphi\right)(z) = \left(1+|z|^\beta\right)^{-\alpha/\beta}\left(F_\nu\varphi\right)(z)\,,\ z \in \mathbb{R}^n_{N,+}$$

sağlanır. Burada her $\varphi \in S\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right)$ için

$$\mathcal{B}^\alpha_{\nu,\beta}\varphi(x) = F_v^{-1}\left(\left(1+|z|^\beta\right)^{-\alpha/\beta}\left(F_\nu\varphi\right)(z)\right)(x)$$

sağlanır. $\varphi \in S\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right)$ olduğundan $F_\nu\varphi \in S\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right)$ olur ve buradan

$$\left(1+|z|^\beta\right)^{-\alpha/\beta}\left(F_\nu\varphi\right)(z) \in S\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right)$$

olur. Sonuç olarak

$$F_v^{-1}\left(\left(1+|z|^\beta\right)^{-\alpha/\beta}\left(F_\nu\varphi\right)(z)\right)(x) \in S\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right).$$

d) $\mathcal{B}^{\alpha_1+\alpha_2}_{\nu,\beta} = \mathcal{B}^{\alpha_1}_{\nu,\beta}B^{\alpha_2}_{\nu,\beta}$ olduğunu her iki taraftan Fourier-Bessel dönüşümü alarak görelim.(4.25) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
F_\nu\left(\mathcal{B}^{\alpha_1+\alpha_2}_{\nu,\beta}\right) &= \left(1+|x|^\beta\right)^{-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\beta}}\left(F_\nu f\right)(x) \\
&= \left(1+|x|^\beta\right)^{-\frac{\alpha_1}{\beta}}\left(1+|x|^\beta\right)^{-\frac{\alpha_2}{\beta}}\left(F_\nu f\right)(x) \\
&= \left(1+|x|^\beta\right)^{-\frac{\alpha_1}{\beta}} F_\nu\left(\mathcal{B}^{\alpha_2}_{\nu,\beta}f\right)(x) \\
&= F_\nu\left(\mathcal{B}^{\alpha_1}_{\nu,\beta}\left(\mathcal{B}^{\alpha_2}_{\nu,\beta}f\right)\right)(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Fourier-Bessel dönüşümleri eşit olan fonksiyonların kendileri de eşit olduğundan

$$\mathcal{B}^{\alpha_1+\alpha_2}_{\nu,\beta} = \mathcal{B}^{\alpha_1}_{\nu,\beta}\mathcal{B}^{\alpha_2}_{\nu,\beta}$$

elde edilir. □

$B^\alpha_{\nu,\beta}$ iki-parametreli Bessel potansiyeli için ters bulma formülünde kullanacağımız $\mathcal{A}\varphi \equiv \mathcal{A}^{(\beta)}_\mu\varphi$ dalgacık tipli dönüşümü tanımlayalım.

Tanım 4.13. *μ ölçümü $[0,\infty)$ aralığında tanımlı sonlu Borel ölçümü ve $\varphi \in L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right)$ olsun. $W^{(\beta)}_{\nu,t}\varphi$, iki-parametreli Bessel yarıgrubu olmak üzere dalgacık tipli dönüşüm*

$$\mathcal{A}\varphi \equiv \mathcal{A}^{(\beta)}_\mu\varphi(x,t) = \mu(\{0\})\,\varphi(x) + \int_0^\infty e^{-st}\left(W^{(\beta)}_{\nu,st}\varphi\right)(x)\,d\mu(s) \qquad (4.28)$$

ile tanımlanır. Burada $x \in \mathbb{R}^n_{N,+}$ ve $s > 0$ dir.

$\mathcal{A}_{\mu}^{(\beta)}$ dalgacık tipli dönüşümünün $\varphi \in L_{p,\nu},\ 1 \leq p \leq \infty$ için iyi tanımlı olduğu (3.18) den ve Genelleşmiş Minkowski eşitsizliğinden kolayca görülür. Yani,

$$\left\|\mathcal{A}_{\mu}^{(\beta)}\varphi\left(\cdot,s\right)\right\|_{p,\nu} \leq \int\limits_{0}^{\infty} e^{-st}\left\|W_{\nu,t}^{(\beta)}\varphi\right\|_{p,\nu} d\left|\mu\right|(t) \leq c\left(\beta\right)\left\|\mu\right\|\left\|\varphi\right\|_{p,\nu}$$

ve burada $\left\|\mu\right\| = \int\limits_{0}^{\infty} d\left|\mu\right|(t) < \infty$ dir. Dolayısıyla dalgacık tipli dönüşüm $\mathcal{A}_{\mu}^{(\beta)}$, $L_{p,\nu}$ uzayından $L_{p,\nu}$ uzayına sınırlıdır. (Rubin 1999)

4.2. İki-parametreli Bessel Potansiyelinin Tersi

Bu son kısımda amacımız, yukarıda tanımladığımız dalgacık tipli dönüşümü kullanarak iki-parametreli Bessel potansiyelinin tersini belirlemek olacaktır. Potansiyelin tersini belirlerken Rubin'in yöntemini kullanacağız. Öncelikle Rubin'in (1999) makalesindeki Lemma 1.3'ün bir özel halini verelim.

Önteorem 4.14. *μ ölçümü $[0,\infty)$ aralığında tanımlı sonlu Borel ölçümü olsun. μ ölçümünün $(\theta+1)$. mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali*

$$\left(I^{\theta+1}\mu\right)(s) = \frac{1}{\Gamma\left(\theta+1\right)}\int\limits_{0}^{s}\left(s-t\right)^{\theta} d\mu\left(t\right),\ s>0,\ \theta>0 \tag{4.29}$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca

$$K_{\theta}\left(s\right) = \frac{1}{s}\left(I^{\theta+1}\mu\right)(s)\,,(0<s<\infty) \tag{4.30}$$

diyelim. μ ölçümü aşağıdaki özellikleri sağlasın:

Bir $\gamma > \theta$ sayısı için

$$\int\limits_{1}^{\infty} t^{\gamma} d\left|\mu\right|(t) < \infty \tag{4.31}$$

$$\int\limits_{0}^{\infty} t^{j} d\mu\left(t\right) = 0;\ j = 0,1,2,3,\cdots,[\theta]\,. \tag{4.32}$$

Bu durumda $K_{\theta}\left(s\right)$ fonksiyonu, azalan ve integrallenen majoranta sahip olup,

$$C_{\theta,\mu} \equiv \int\limits_{0}^{\infty} K_{\theta}\left(s\right) ds = \left\{ \begin{array}{ll} \Gamma\left(-\theta\right)\int\limits_{0}^{\infty} z^{\theta} d\mu\left(z\right), & \theta \neq 1,2,3,\cdots\ \textit{ise} \\ \left(-1\right)^{\theta+1}\frac{1}{\theta!}\int\limits_{0}^{\infty} z^{\theta}\ln z\, d\mu\left(z\right), & \theta = 1,2,3,\cdots\ \textit{ise} \end{array} \right\} \tag{4.33}$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca $\widetilde{\mu}$ *ile* μ *ölçümünün Laplace döüşümü gösterilirse, yani,*

$$\widetilde{\mu} = \int_0^\infty e^{-tz} d\mu(z)$$

şeklinde tanımlanırsa,

$$C_{\theta,\mu} \equiv \int_0^\infty t^{-1-\theta} \widetilde{\mu}(t)\, dt \tag{4.34}$$

eşitliği sağlanır.

Önteorem 4.15. $\mathcal{B}^{\alpha}_{\nu,\beta}$ *ve* $W^{(\beta)}_{\nu,t}$ *operatörleri* $L_{p,\nu} \equiv L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right)$, $(1 \le p \le \infty;\ L_{\infty,\nu} \equiv C_0)$ *uzaylarında değişmeli operatörlerdir. Yani her* $f \in L_{p,\nu}$ *için*

$$\mathcal{B}^{\alpha}_{\nu,\beta} W^{(\beta)}_{\nu,t} f = W^{(\beta)}_{\nu,t} \mathcal{B}^{\alpha}_{\nu,\beta} f \tag{4.35}$$

dir.

İspat Her $\varphi \in S\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right)$ için $\mathcal{B}^{\alpha}_{\nu,\beta} W^{(\beta)}_{\nu,t} \varphi = W^{(\beta)}_{\nu,t} \mathcal{B}^{\alpha}_{\nu,\beta} \varphi$ eşitliği, eşitliğin her iki tarafından Fourier-Bessel dönüşümü alınarak görülebilir. Şöyle ki,

$$F_\nu\left(\mathcal{B}^{\alpha}_{\nu,\beta} f\right)(x) = \left(1 + |x|^\beta\right)^{-\frac{\alpha}{\beta}} (F_\nu f)(x)$$

ve

$$F_\nu\left(W^{(\beta)}_{\nu,t} \varphi\right)(x) = e^{-t|x|^\beta} (F_\nu \varphi)(x)$$

olduğundan

$$F_\nu\left(\mathcal{B}^{\alpha}_{\nu,\beta} W^{(\beta)}_{\nu,t} \varphi\right)(x) = \left(1 + |x|^\beta\right)^{-\frac{\alpha}{\beta}} e^{-t|x|^\beta} (F_\nu \varphi)(x)$$

ve

$$F_\nu\left(W^{(\beta)}_{\nu,t} \mathcal{B}^{\alpha}_{\nu,\beta} \varphi\right)(x) = e^{-t|x|^\beta} \left(1 + |x|^\beta\right)^{-\frac{\alpha}{\beta}} (F_\nu \varphi)(x)$$

sağlanır. Böylece her $\varphi \in S\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right)$ için

$$\mathcal{B}^{\alpha}_{\nu,\beta} W^{(\beta)}_{\nu,t} \varphi = W^{(\beta)}_{\nu,t} \mathcal{B}^{\alpha}_{\nu,\beta} \varphi$$

sağlanır. Ayrıca $S\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right)$ uzayı $L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right)$ uzayında yoğun, $B^{\alpha}_{\nu,\beta}$ ve $W^{(\beta)}_{\nu,t}$ operatörleri $L_{p,\nu}$ sınırlı olduğundan her $\varphi \in S\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right)$ için yukarıdaki eşitlik, her $\varphi \in L_{p,\nu}$ için sağlanır. Yani, $\forall f \in L_{p,\nu}$, $(1 \le p \le \infty;\ L_{\infty,\nu} \equiv C_0)$ için

$$\mathcal{B}^{\alpha}_{\nu,\beta} W^{(\beta)}_{\nu,t} f = W^{(\beta)}_{\nu,t} \mathcal{B}^{\alpha}_{\nu,\beta} f$$

dir. □

Önteorem 4.16. (*Stein-Weiss* (1971)) (X,m) *bir ölçüm uzayı olsun.* $\{T_\delta\}_{\delta>0}$ *lineer operatörler ailesi* $L_p(X,m)$, $(1\le p<\infty)$ *uzayında tanımlanmış olsun.*

$f\in L_p(X,m)$ olmak üzere $\sup\limits_{\delta>0}|(T_\delta f)(x)|=(T^*f)(x)$ diyelim ve T^* sub-lineer operatörünün zayıf (p,q) tipli olduğunu, yani, $\forall\lambda>0$ için

$$\mu\{y\in X:(T^*f)(x)>\lambda\}\le\left(\frac{c\,\|f\|_p}{\lambda}\right)^q$$

sağlandığını varsayalım. Eğer X'in yoğun bir alt kümesinden alınmış her x için

$$\lim_{\delta\to0}(T_\delta f)(x)=f(x)$$

sağlanırsa, hemen hemen her $x\in X$ için

$$\lim_{\delta\to0}(T_\delta f)(x)=f(x)$$

sağlanır.

Önteorem 4.17. $\gamma>1,\,\alpha>0,\,\beta>0$ *olsun. Bu durumda*

$$\int\limits_1^\gamma t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}(\gamma-t)^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\,dt=\frac{\Gamma(\alpha/\beta)}{\Gamma(1+\alpha/\beta)}\frac{1}{\gamma}(\gamma-1)^{\alpha/\beta}$$

dir. Bu eşitlik, Gradshteyn ve Ryzhik (1994) kaynağındaki 3.238(3) numaralı formülden elde edilebilir.

Esas teoremimizi ifade edebiliriz.

Teorem 4.18. *$\mathcal{A}=\mathcal{A}_\mu^\beta$ dalgacık tipli dönüşüm ve $\mathcal{B}_{\nu,\beta}^\alpha$ iki-parametreli Bessel potansiyeli, $\alpha>0$ ve $f\in L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_{N,+}^n\right)$, $1\le p<\infty$ olsun. Ayrıca $[0,\infty)$ aralığında sonlu Borel ölçümü μ, (4.31) ve (4.32) koşullarını sağlasın. Bu durumda $C_{\theta,\mu}$ (4.33) ve (4.34) de tanımlandığı gibi olmak üzere*

$$\int\limits_0^\infty\left(\mathcal{A}_\mu^{(\beta)}\mathcal{B}_{\nu,\beta}^\alpha f\right)(x,t)\,\frac{dt}{t^{1+\alpha/\beta}}\equiv\lim_{h\to0}\int\limits_h^\infty\left(\mathcal{A}_\mu^{(\beta)}\mathcal{B}_{\nu,\beta}^\alpha f\right)(x,t)\,\frac{dt}{t^{1+\alpha/\beta}}=C_{\frac{\alpha}{\beta},\mu}f \qquad (4.36)$$

eşitliği sağlanır. Burada limit hem $L_{p,v}$ $(1\le p<\infty)$ normunda hem de hemen hemen her yerde noktasal anlamdadır. $f\in C_0$ durumunda yakınsama $\mathbb{R}_{N,+}^n$ uzayında düzgündür.

İspat $f \in L_{p,\nu}$ için (4.28), Önteorem (4.15) ve (4.23) eşitlikleri ile (3.17) kullanılarak

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{A}_{\mu}^{(\beta)}\mathcal{B}_{\nu,\beta}^{\alpha}f\right)(x,t) &= \int_{0}^{\infty} e^{-st}W_{\nu,t}^{(\beta)}\mathcal{B}_{\nu,\beta}^{\alpha}f(x)\,d\mu(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-st}\mathcal{B}_{\nu,\beta}^{\alpha}W_{\nu,t}^{(\beta)}f(x)\,d\mu(s) \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-st}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)}\int_{0}^{\infty} h^{\frac{\alpha}{\beta}}e^{-h}W_{\nu,h}^{(\beta)}W_{\nu,st}^{(\beta)}f(x)\frac{dh}{h}\right)d\mu(s) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)}\int_{0}^{\infty} e^{-st}\left(\int_{0}^{\infty} h^{\frac{\alpha}{\beta}-1}e^{-h}W_{\nu,h+st}^{(\beta)}f(x)\,dh\right)d\mu(s)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte h yerine $h-st$ yazalım. Buradan

$$\begin{aligned}&\left(\mathcal{A}_{\mu}^{(\beta)}\mathcal{B}_{\nu,\beta}^{\alpha}f\right)(x,t) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)}\int_{0}^{\infty} e^{-st}\left(\int_{0}^{\infty}(h-st)_{+}^{\frac{\alpha}{\beta}-1}e^{-h+st}W_{\nu,h-st+st}^{(\beta)}f(x)\,d(h-st)\right)d\mu(s) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty}(h-st)_{+}^{\frac{\alpha}{\beta}-1}e^{-h}W_{\nu,h}^{(\beta)}f(x)\,dh\right)d\mu(s)\end{aligned}$$

olur. Burada

$$(h-st)_{+} = \left\{\begin{array}{ll}(h-st)^{\frac{\alpha}{\beta}-1}, & h > st \\ 0, & h \leq st\end{array}\right\}$$

dir.

Şimdi verilmiş bir $\delta > 0$ için Fubini teoremi ve $\left(\frac{h}{s}-t\right)_{+}^{\frac{\alpha}{\beta}-1}$ fonksiyonunun tanımı kullanılırsa

$$\int_{\delta}^{\infty} t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}\left(\mathcal{A}\mathcal{B}_{\nu,\beta}^{\alpha}f\right)(x,t)\,dt = \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty} e^{-h}W_{\nu,h}^{(\beta)}f(x)\left(\int_{\delta}^{\infty} t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}(h-st)_{+}^{\frac{\alpha}{\beta}-1}dt\right)dh\right)d\mu(s) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)}\int_{0}^{\infty} e^{-h}W_{\nu,h}^{(\beta)}f(x)\left(\int_{0}^{\infty} s^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\left(\int_{\delta}^{\infty} t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}\left(\frac{h}{s}-t\right)_{+}^{\frac{\alpha}{\beta}}dt\right)d\mu(s)\right)dh \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)}\int_{0}^{\infty} e^{-h}W_{\nu,h}^{(\beta)}f(x)\left(\int_{0}^{\frac{h}{\delta}} s^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\left(\int_{\delta}^{\frac{h}{\delta}} t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}\left(\frac{h}{s}-t\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}dt\right)d\mu(s)\right)dh\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte sırasıyla h yerine $h\delta$ ve t yerine δt yazılırsa daha sonra da Önteorem (4.17) kullanılır ve (4.29) ve (4.30) ifadeleri göz önüne alınırsa (4.37) eşitliği

$$\int_{\delta}^{\infty} t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}\left(\mathcal{A}\mathcal{B}_{\nu,\beta}^{\alpha} f\right)(x,t)\,dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\delta}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_0^{\infty} e^{-\delta h} W_{\nu,\delta h}^{(\beta)} f(x) \left(\int_0^h s^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \left(\int_{\delta}^{\frac{\delta h}{s}} t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} \left(\frac{\delta h}{s} - t \right)^{\frac{\alpha}{\beta}} dt \right) d\mu(s) \right) dh \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_0^{\infty} e^{-\delta h} W_{\nu,\delta h}^{(\beta)} f(x) \left(\int_0^h s^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \left(\int_{1}^{\frac{h}{s}} t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} \left(\frac{h}{s} - t \right) dt \right) d\mu(s) \right) dh \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_0^{\infty} e^{-\delta h} W_{\nu,\delta h}^{(\beta)} f(x) \left(\int_0^h s^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \frac{\Gamma(\alpha/\beta)}{\Gamma(\alpha/\beta+1)} \frac{s}{h} \left(\frac{h}{s} - t \right)^{\frac{\alpha}{\beta}} d\mu(s) \right) dh \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\delta h} W_{\nu,\delta h}^{(\beta)} f(x)\, K_{\frac{\alpha}{\beta}}(h)\, dh
\end{aligned} \tag{4.38}$$

haline gelir. Burada (4.30) ifadesine göre

$$K_{\frac{\alpha}{\beta}}(h) = \frac{1}{h} \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta+1)} \int_0^h (h-s)^{\frac{\alpha}{\beta}} d\mu(s)$$

dir. Teoremin ispatına iki-parametreli Bessel yarıgrubunun özelliklerini kullanarak devam edeceğiz. (4.31) ve (4.34) eşitliklerindeki

$$C \equiv C_{\frac{\alpha}{\beta},\mu} = \int_0^{\infty} K_{\frac{\alpha}{\beta}}(h)\, dh$$

notasyonunu göz önüne alarak

$$\begin{aligned}
&\int_{\delta}^{\infty} t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}\left(\mathcal{A}\mathcal{B}_{\nu,\beta}^{\alpha} f\right)(x,t)\,dt - Cf(x) = \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\delta h} W_{\nu,\delta h}^{(\beta)} f(x)\, K_{\frac{\alpha}{\beta}}(h)\, dh - \int_0^{\infty} f(x)\, K_{\frac{\alpha}{\beta}}(h)\, dh \\
&= \int_0^{\infty} \left(e^{-\delta h} W_{\nu,\delta h}^{(\beta)} f(x) - f(x) \right) K_{\frac{\alpha}{\beta}}(h)\, dh
\end{aligned}$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-\delta h}\left(W_{\nu,\delta h}^{(\beta)} f(x) - f(x)\right) K_{\frac{\alpha}{\beta}}(h)\, dh + f(x)\int\limits_0^\infty \left(1-e^{-\delta h}\right) K_{\frac{\alpha}{\beta}}(h)\, dh$$

elde edilir.

Minkowski eşitsizliği kullanılarak

$$\left\|\int\limits_\delta^\infty t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}\left(\mathcal{AB}_{\nu,\beta}^{\alpha} f\right)(\cdot,t)\, dt - Cf\right\|_{p,\nu} \le$$

$$\le \int\limits_0^\infty e^{-\delta h}\left\|W_{\nu,\delta h}^{(\beta)} f - f\right\|_{p,\nu}\left|K_{\frac{\alpha}{\beta}}(h)\right| dh + \|f\|_{p,\nu}\int\limits_0^\infty \left(1-e^{-\delta h}\right)\left|K_{\frac{\alpha}{\beta}}(h)\right| dh \qquad (4.39)$$

bulunur. Şimdi

$$0 < e^{-\delta h} < 1, \ \ \left|1-e^{-\delta h}\right| < 2, \ \ \int\limits_0^\infty \left|K_{\frac{\alpha}{\beta}}(h)\right| dh < \infty$$

olduğundan

$$\left\|W_{\nu,\delta h}^{(\beta)} f - f\right\|_{p,\nu} \le \left\|W_{\nu,\delta h}^{(\beta)} f\right\|_{p,\nu} + \|f\|_{p,\nu} \overset{3.14}{\le} c_\beta \|f\|_{p,\nu}$$

ve

$$\lim_{\delta\to\infty}\left\|W_{\nu,\delta h}^{(\beta)} f - f\right\|_{p,\nu} = 0; \ \ \lim_{\delta\to 0}\left(1-e^{-\delta h}\right) = 0$$

olduğundan Lebesgue baskın yakınsama teoremine göre (4.39) eşitsizliğinin sağ tarafının $\delta \to 0$ için limiti sıfıra eşit olur. Yani,

$$\lim_{\delta\to 0}\left\|\int\limits_\delta^\infty t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}\left(\mathcal{AB}_{\nu,\beta}^{\alpha}\right)(\cdot,t)\, dt - Cf\right\|_{p,\nu} = 0 \qquad (4.40)$$

elde edilir. Burada $p = \infty$ durumunda $L_{\infty,\nu} \equiv C_0$ kabul edildiğinden (4.40) e göre $f \in C_0$ için yakınsama düzgündür.

Şimdi, $\delta > 0$ parametresine bağlı

$$\int\limits_\delta^\infty t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}\left(\mathcal{AB}_{\nu,\beta}^{\alpha}\right)(x,t)\, dt, \ \ \left(x \in \mathbb{R}_{N,+}^n\ ,\ f \in L_{p,\nu}\right)$$

fonksiyonlar ailesinin $\delta \to 0$ için $Cf(x)$ e noktasal yakınsadığını görelim.

Bu kısımda Önteorem (4.16) kullanılacaktır. Önteoremde bahsi geçen $\{T_\delta\}_{\delta>0}$ lineer operatörler ailesini

$$(T_\delta f)(x) = \int\limits_\delta^\infty t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}\left(\mathcal{AB}_{\nu,\beta}^{\alpha}\right)(x,t)\, dt, \ \ \left(x \in \mathbb{R}_{N,+}^n\ ,\ f \in L_{p,\nu}\right)$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda (4.38) eşitliği ve (3.20) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sup_{\delta>0}\left|\left(T_\delta f\right)(x)\right| &= \sup_{\delta>0}\left|\int_\delta^\infty t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}\left(\mathcal{AB}^\alpha_{\nu,\beta}\right)(x,t)\,dt\right|,\\
&= \sup_{\delta>0}\left|\int_0^\infty e^{-\delta h}W^{(\beta)}_{\nu,\delta h}f(x)\,K_{\frac{\alpha}{\beta}}(h)\,dh\right|\\
&\le \sup_{t>0}\left|W^{(\beta)}_{\nu,t}f(x)\right|\int_0^\infty\left|K_{\frac{\alpha}{\beta}}(h)\right|dh\\
&\le c\left(M_\nu f\right)(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $M_\nu f$, genelleşmiş Hardy-Littlewood maksimal operatörüdür.

$M_\nu : L_{p,\nu} \to L_{p,\nu}$ $(1 < p \le \infty)$ güçlü ve $M_v : L_{1,\nu} \to L_{1,\nu}$ zayıf tipli olduğundan

$$T^* f(x) = \sup_{\delta>0}\left|\left(T_\delta f\right)(x)\right|$$

olmak üzere T^* operatörü $L_{p,\nu} \to L_{p,\nu}$ güçlü tipli, $L_{1,\nu} \to L_{1,\nu}$ zayıf tipli ve dolayısıyla $1 \le p \le \infty$ için $L_{p,\nu} \to L_{p,\nu}$ zayıf tipli olduğunu görürüz.

Böylece $L_{p,\nu}$, $(1 \le p \le \infty)$ uzayının yoğun bir alt kümesi olan $C_0 \cap L_{p,\nu}$ uzauında $T_\delta f$, $(\delta > 0)$ ailesi f fonksiyonuna düzgün, dolayısıyla noktasal yakınsadığından Önteorem (4.17)'e göre bu aile $\delta \to 0$ için f fonksiyonuna h.h.her yerde yakınsak olur.

Yani, $h.h.x \in \mathbb{R}^n_{N,+}$ için

$$\lim_{\delta\to 0}\int_\delta^\infty t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}\left(\mathcal{AB}^\alpha_{\nu,\beta}f\right)(x,t) = Cf(x)$$

sağlanır. Burada $C \equiv C_{\frac{\alpha}{\beta},\mu} = \int_0^\infty K_{\frac{\alpha}{\beta}}(s)\,ds$ dir. □

5. SONUÇLAR

Tezimizde ilk olarak Genelleşmiş kaymanın doğurduğu iki-parametreli Bessel yarıgrubunu tanımladık ve özelliklerini inceledik.

İki-parametreli Bessel çekirdeği $w_\nu^{(\beta)}\left(|x|\,;t\right)$, $t>0$, $\beta>0$, $x\in\mathbb{R}^n_{N,+}$ ve $f\in L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right)$ olmak üzere $W_{\nu,t}^{(\beta)}f$ ile gösterilen iki-parametreli Bessel yarıgrubu

$$W_{\nu,t}^{(\beta)}f\left(x\right)=\left(w_\nu^{(\beta)}\left(|.|\,;t\right)\circledast f\right)=\int\limits_{\mathbb{R}^n_{N,+}}w_\nu^{(\beta)}\left(|y|\,;t\right)T^yf\left(x\right)\left(y'\right)^{2\nu+1}dy$$

ile tanımlanır.

Tezimizin esas operatörü olan Genelleşmiş kaymanın doğurduğu iki-parametreli Bessel potansiyeli, $I+\left(-\Delta_B\right)^{\beta/2}$ diferansiyel operatörünün $\left(-\alpha/\beta\right)$ kesirsel kuvveti olarak yorumlanır ve formal olarak

$$\mathcal{B}^\alpha_{\nu,\beta}f=\left(I+\left(-\Delta_B\right)^{\beta/2}\right)^{-\frac{\alpha}{\beta}}f,\ f\in S\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right)$$

ile tanımlanır. $\beta=1$ ve $\beta=2$ için sırasıyla, genelleşmiş kaymanın doğurduğu Bessel ve Flett potansiyellerine karşılık gelir. Bu potansiyelin açık ifadesi şöyledir:

$$\mathcal{B}^\alpha_{\nu,\beta}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)}\int\limits_0^\infty t^{\alpha/\beta}e^{-t}W_{\nu,t}^{(\beta)}f\left(x\right)\frac{dt}{t} \tag{5.41}$$

Burada $\left\{W_{\nu,t}^{(\beta)}f\right\}_{t\geq0}$ operatörü genelleşmiş kaymanın doğurduğu iki parametreli Bessel yarıgrubudur.

İki-parametreli Bessel potansiyeli için ters bulma formülününde kullanacağımız $\mathcal{A}_\mu^{(\beta)}\varphi$ dalgacık tipli dönüşümü tanımladık. Şöyle ki

μ ölçümü $[0,\infty)$ aralığında tanımlı sonlu Borel ölçümü ve $\varphi\in L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}^n_{N,+}\right)$ olsun. $W_{\nu,t}^{(\beta)}\varphi$, iki-parametreli Bessel yarıgrubu olmak üzere dalgacık tipli dönüşüm

$$\mathcal{A}\varphi\equiv\mathcal{A}_\mu^{(\beta)}\varphi\left(x,t\right)=\mu\left(\{0\}\right)\varphi\left(x\right)+\int\limits_0^\infty e^{-st}\left(W_{\nu,st}^{(\beta)}\varphi\right)\left(x\right)d\mu\left(s\right) \tag{5.42}$$

ile tanımlanır. Burada $x\in\mathbb{R}^n_{N,+}$ ve $s>0$ dir.

Son olarak amacımızı kanıtladık. Yani, tanımladığımız dalgacık tipli dönüşümü kullanarak iki-parametreli Bessel potansiyelinin tersini belirleme formünü kanıtladık. Yani,

$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mu}^{\beta}$ dalgacık tipli dönüşüm ve $\mathcal{B}_{\nu,\beta}^{\alpha}$ iki-parametreli Bessel potansiyeli, $\alpha > 0$ ve $f \in L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_{N,+}^{n}\right)$, $1 \leq p < \infty$ olsun. Ayrıca $[0,\infty)$ aralığında sonlu Borel ölçümü μ, (4.31) ve (4.32) koşullarını sağlasın. Bu durumda $C_{\theta,\mu}$ (4.33) ve (4.34) de tanımlandığı gibi olmak üzere

$$\int_{0}^{\infty} \left(\mathcal{A}_{\mu}^{(\beta)} \mathcal{B}_{\nu,\beta}^{\alpha} f\right)(x,t) \frac{dt}{t^{1+\alpha/\beta}} \equiv \lim_{h\to 0} \int_{h}^{\infty} \left(\mathcal{A}_{\mu}^{(\beta)} \mathcal{B}_{\nu,\beta}^{\alpha} f\right)(x,t) \frac{dt}{t^{1+\alpha/\beta}} = C_{\frac{\alpha}{\beta},\mu} f$$

eşitliği sağlanır. Burada limit hem $L_{p,v}$ $(1 \leq p < \infty)$ normunda hem de hemen hemen her yerde noktasal anlamdadır. $f \in C_0$ durumunda yakınsama $\mathbb{R}_{N,+}^{n}$ uzayında düzgündür.

6. KAYNAKLAR

Aliev, I., Bayrakci S. *On inversion of B-elliptic potentials by the method of Balakrishnan-Rubin. Fract. Calc. Appl. Anal.* 1998; 1(4): 365-384.

Aliev, I.A. *Bi-parametric potentials, relevent function spaces and wavelet-like transforms. Integral Equations Operator Theory.* 2009; 65(2): 151-167.

Aliev, I.A., Rubin, B. *Parabolic potentials and wavelet transforms with the generalized translation. Studia Math.* 2001; 145: 1-16.

Aliev, I.A., Rubin, B., Sezer, S., Bayrakci (Uyhan), S. *Composite Wavelet Transforms: Applications and Perspectives. Radon Transforms, Geomerty and Wavelets. Amer. Math. Soc.*; provindence (RI): 2008. p.1-27. (contemp. math.).

Aliev, I.A., Sezer, S., Eryigit, M. *An integral transform associated to the Poisson integral and inversion of Flett potentials. J. Math. Anl. Appl.* 2006; 321(2): 691-704.

Aliev I.A., Rubin, B. *Wavelet-like transforms for admissible semi-groups; inverison formulas for potentials and Radon transfroms. j. Fourier Anl. Appl.* 2005; 11(3): 333-352.

Aliev I.A., Yücel, S. *Some generalizations of Bessel and Flett potentials associated to the Laplace-Bessel differential operator. Integral Transforms and special Functions*, 2018; 29(3): 235-251.

Delsarte, J. *Sur une extension de la formule de Taylor. J. Math. Pure Appl.* 1938; 17: 213-231.

Flett, T.M. *Temperatures, Bessel potentials and Lipschitz spaces. Proc. London MAth. Soc.* 1971; 22(3): 385-451.

Folland, G.B., Real Analysis Modern Techniquies and Their Applications. John Wiley and Sons, NY, pp.350 1984.

Gadjiev, A.D., Aliev, I.A. *Riesz and Bessel potentials generated by a generalized translation and their inverse. In: Proc. IV All-Union Winter Conf., Theory of functions and approximation*; Saratov (Russia): 1988.

Gradshteyn I., Ryzhik I. Table of integrals, series and products. Sth. ed. London: Academic press; 1994.

Guliev, V.S. 1998. *Sobolev theorems for B-Riesz potentials. Dokl. RAN*, 358 (4), 45-451.

Guliev, V.S. 2003. *On Maximal function and fractional Integral, associated with the Bessel differential operator, Mathematical Inequalities and Applications*,6,2,317-330.

Guliev, E.V. 2006. *Weighted inequality for fractional maximal functions and fanctional integrals, associated with the Laplace-Bessel differential operator*, Trans. of NAS of Azerbaijan,26(1):71-80.

Levitan, B.M.: *Expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions. Uspekhi Math. Nauk.* 1951; 6(2): 102-143.

Lizorkin, P.I. *The characterization of* $L_p^r(\mathbb{R}^n)$ *spaces in terms of hypersingular integrals, Math. Sb.* 1970; 81: 79-91.

Löfstörm, J., Peetre, J.(1969). *Approximation teorems connected with generalized translation.* Math. Sb. 1970; 81:79-91.

Lyakhov, L.N. *On classes of spherical functions and singular pseudodifferential operators. Dokl. Akad. Nauk.* 1983; 272(4): 781-784.

Rubin, B. *A method of characterization and inversion of Bessel and Riesz potentials. Izv Vyssh Uchebn Zaved MAth.* 1986; 30(5): 78-89.

Rubin, B. *Fractional integrals and potentials. Harlow: Longman; 1996. p.86 (Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics).*

Rubin, B. *Fractional integrals and wavelet transforms associated with Baschk-e-Levy representations on the sphere. Israel J. Math.* 1999; 114(1): 1-27.

Samko, S.G. *Hypersingular Integrals and Their Apllications, Izdat. Rostov Univ., Rostov-on-Dan*, 1984 (In Russian).

Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I. *Fractional integrals and derivatives. Theory and Apllications.* Gordon and Breach, London. 1993.

Sezer, S., Bayrakçı, S., Yıldız, G. and Kahraman, R., (2022) *On the BMO spaces associated with the Laplace-Bessel differential operator, Turkish Journal of Mathematics:* Vol. 46: No. 7, Article 23.

Sezer, S. *On Approximation properties of the Families of Flett and Generalized Flett potentials. Int. Journal of Math. Analysis*, 2009 ;(3)39: 1905-1915.

Stein, E.M. *The characteriztion of functions arising as potentials, I, Bull. AMer. Math. Soc.* 1961; 67: 101-104.

Stein, E.M., Weiss G. Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces. Princeton (NJ): Princeton University Press; 1971.

Trimeche, K. *Generalized walvelets and hypergroups. New York: Gordon and Breach Sci.*: 1997.

Wheeden, R.L. *On hypersingular integrals and Lebesgue spaces of differentiable functions, Trans. Amer. Math. Soc.* 1968; 134: 421-435.

ÖZGEÇMİŞ

Recep KAHRAMAN

recepkahraman1207@gmail.com

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2021-2023	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ABD, Antalya
Lisans 2017-2021	Akdeniz Üniversitesi Fakültesi, Matematik , Antalya