T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

BİRİNCİ MERTEBEDEN GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIM DAVRANIŞI İNCELEMESİ

Gökhan GÜLMEZ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEMMUZ 2023
ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

BİRİNCİ MERTEBEDEN GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIM DAVRANIŞI İNCELEMESİ

Gökhan GÜLMEZ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEMMUZ 2023

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİRİNCİ MERTEBEDEN GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIM DAVRANIŞI İNCELEMESİ

Gökhan GÜLMEZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEMMUZ 2023

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİRİNCİ MERTEBEDEN GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIM DAVRANIŞI İNCELEMESİ

Gökhan GÜLMEZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 14/07/2023 tarihinde jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Özkan ÖCALAN (Danışman)
Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ
Prof. Dr. Mustafa ALKAN

ÖZET

BİRİNCİ MERTEBEDEN GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIM DAVRANIŞI İNCELEMESİ

Gökhan GÜLMEZ

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Özkan ÖCALAN

Temmuz 2023, 31 sayfa

Bu tez çalışmasında beş bölüm yer almaktadır. İlk kısımda gecikmeli diferensiyel denklemlerle ilgili literatür taramasına ayrılmıştır. İkinci bölümde gecikmeli diferensiyel denklemleri içeren tanım ve teoremler yer almaktadır. Üçüncü bölümde aşağıdaki gibi ifade edilen sabit katsayılı-sabit gecikmeli ve değişken katsayılı-sabit gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümlerine ait salınımlılık kriterlerine yer verilmiştir.

$$z'(r) + \psi z(r - \eta) = 0$$

ve

$$z'(r) + \sum_{i=1}^{m} \psi_i z(r - \eta_i) = 0,$$

ayrıca

$$z'(r) + \psi(r) z(r - \eta) = 0$$

ve

$$z'(r) + \sum_{i=1}^{m} \psi_i(r) z(r - \eta_i) = 0$$

Dördüncü bölümde bulgular ve tartışma, son bölümde ise sonuç kısmı yer almaktadır.

ANAHTAR KELİMELER: Sabit gecikme terimi, Diferensiyel denklem, Gecikmeli diferensiyel denklem, Salınımlı çözüm, Salınımlı olmayan çözüm.

JÜRİ: Prof. Dr. Özkan ÖCALAN
Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ
Prof. Dr. Mustafa ALKAN

ABSTRACT

INVESTIGATION OF OSCILLATION BEHAVIOUR OF SOLUTIONS OF FIRST ORDER DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Gökhan GÜLMEZ

MSc Thesis in MATHEMATICS
Supervisor: Prof. Dr. Özkan ÖCALAN
JULY 2023, 31 pages

There are five chapters in this thesis. The first part is devoted to a literature review on delay differential equations. In the second part, there are definitions and theorems including delay differential equations. In the third chapter, the oscillation criteria for the solutions of constant coefficient-constant delay and variable coefficient-variable delay differential equations, which are expressed as follows, are given.

$$z'(r) + \psi z(r-\eta) = 0$$

and

$$z'(r) + \sum_{i=1}^{m} \psi_i z(r-\eta_i) = 0,$$

also,

$$z'(r) + \psi(r) z(r-\eta) = 0$$

and

$$z'(r) + \sum_{i=1}^{m} \psi_i(r) z(r-\eta_i) = 0$$

There are findings and discussion section in the forth part and conclusion part in the last part.

KEYWORDS: Constant delay term, Delay differential equation, Differential equation, Nonoscillatory solution, Oscillatory solution.

COMMITTEE: Prof. Dr. Özkan ÖCALAN
Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ
Prof. Dr. Mustafa ALKAN

ÖNSÖZ

Uygulamalı matematiğin kayda değer dallarından biri olan diferensiyel denklem kavramı çok sayıda bilim insanının dikkatini çekmeyi başarmış ve özellikle uygulama alanında birçok çalışmanın temel taşını oluşturmuştur. Ayrıca ele alınan problemlerin birçoğunda, bu problemlerin matematiksel olarak modellemesinde diferensiyel denklemlerden yardım alınmaktadır. Matematiksel modellemeler yapılırken gecikmeler söz konusu olabilir. Böylece adi diferensiyel denklemlerden farklı olarak gecikmeli diferensiyel denklemler ortaya çıkar. Bu tezde önceki çalışmalarda yer alan sabit katsayılı sabit gecikmeli ve değişken katsayılı sabit gecikmeli diferensiyel denklemler çalışılmıştır.

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "BİRİNCİ MERTEBEDEN GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIM DAVRANIŞI İNCELEMESİ" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

14/07/2023

Gökhan GÜLMEZ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

$\prod$: Çarpım sembolü

$\mathbb{Z}$: Tam sayılar kümesi

$\sum$: Toplam sembolü

$\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar kümesi

η : Gecikme terimi

1. GİRİŞ

Diferensiyel denklemler karşılaşılan problemler için bir matematiksel model olarak düşünülebilir. Diferensiyel denklemler matematik ve mühendislik biliminin ortak çalışma konusu olması nedeniyle bu alandaki çalışmalara hız kazandırmıştır.

Uygulamalı alanlarda çalışılan problemlerin birçoğuna bir diferensiyel denklem karşılık gelir. Matematiksel modellemeler yapılırken gecikmeler söz konusu olabilir. Böylece adi diferensiyel denklemlerden farklı olarak gecikmeli diferensiyel denklemler ortaya çıkar.

Gecikmeli bir diferensiyel denklem $\eta(r) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $\lim_{r\to\infty} \eta(r) = \infty$ ve $\eta(r) < r$ ifadeleri sağlandığında

$$z'(r) = h(r, z(r), z(\eta(r))) \tag{1.1}$$

şeklindedir. Buradan anlaşılacağı üzere $z'(r)$ nin değişim oranı sadece $z(r)$ değerine değil, $z(\eta(r))$ değerine de bağlıdır.

$$z'(r) + z(r-3) + z(r+\frac{1}{3}) = 0,$$

$$z'(r) + z(r+2) - 5 = 0,$$

$$z''(r) + 3z'(r) + z(r-\frac{3}{2}) = 1,$$

$$z'''(r) - 4z'(r - \sin^2 r) - z(\frac{r}{3}) + r = 1$$

şeklindeki denklemler gecikmeli diferensiyel denklemlerdir.

Salınımlılık teorisi uygulamalı bilimlerde yer alan problemlere ait salınım hareketlerini ele alan diferensiyel denklemler teorisinin köklü bir dalı olarak düşünülebilir. Diğer taraftan salınımlılık teorisi belirli bir denkleme veya sisteme salınan çözümlerinin varlığını, yokluğunu ve bu tür çözümlerin davranışlarını ele almaktadır. Şimdi aşağıda verilen gecikmeli diferensiyel denklemi ele alalım.

$$z'(r) + \psi(r) z(\eta(r)) = 0 \tag{1.2}$$

(1.2) denklemine ait çözümlerin salınımlılılığı ile ilgili ilk sonuç Myshkis (1950) tarafından verilmiştir. Eğer

$$\limsup_{r\to\infty} [r - \eta(r)] < \infty \ \text{ ve} \liminf_{r\to\infty} [r - \eta(r)] \liminf_{r\to\infty} \psi(r) > \frac{1}{e}$$

ise (1.2) denklemine ait tüm çözümler salınımlıdır. Koplatazde ve Chanturija (1982), (1.2) denklemine ait çözümlerinin salınımlı olması ile ilgili aşağıdaki sonucu vermişlerdir. $\eta(r)$ monoton olmayan ya da azalmayan bir gecikme olsun. Böylece

$$\liminf_{r\to\infty} \int\limits_{\eta(r)}^{r} \psi(s)ds > \frac{1}{e}.$$

Ayrıca

$$\int\limits_{\eta(r)}^{r} \psi(s)ds \leq \frac{1}{e}$$

ise (1.2) denkleminin salınımsız bir çözümü olur.

Gyóri ve Ladas (1991),

$$z'(r) + \psi z(r-\eta) = 0 \tag{1.3}$$

denklemini ele almışlardır. Burada $\psi, \eta \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

(i) (1.3) denklemine ait her çözüm salınımlı,

(ii) $\psi\eta > \frac{1}{e}$

ifadeleri birbirine denk olur.

Yukarıda verilen bilgiler ışığında, bu yüksek lisans tez çalışmasında sabit gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılık davranışları incelenmiş ve denklemlerin çözümlerinin salınımlı olması için salınımlılık kriterleri verilmiştir.

İkinci bölümde temel tanım, teorem ve önceki çalışmalara ayrılmıştır..

Üçüncü kısımda ise sabit gecikmeli ve sabit katsayılı

$$z'(r) + \psi z(r-\eta) = 0$$

ve

$$z'(r) + \sum_{i=1}^{m} \psi_i z(r-\eta_i) = 0,$$

sabit gecikmeli ve değişken katsayılı

$$z'(r) + \psi(r) z(r-\eta) = 0$$

ve

$$z'(r) + \sum_{i=1}^{m} \psi_i(r) z(r-\eta_i) = 0$$

diferensiyel denklemler için elde edilen salınımlılık koşullarına yer verilmiştir.

Son bölümde tartışma ve sonuç kısmı yer almaktadır.

2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI

Bu kısımda tezimizde ihtiyaç duyacağımız temel bilgilere yer verilecektir.

2.1. Gecikmeli Diferensiyel Denklemler

İlk olarak

$$z'(r) + \sum_{i=1}^{m} \psi_i(r) z(r - \eta_i) = 0 \tag{2.1}$$

denklemini ele alalım.

Tanım 2.1. *$1 \leq i \leq m$ için $\eta_i \in \mathbb{R}^+$, $\eta_i(r) = r - \eta_i$ ve $\eta = \max\{\eta_1, \eta_2, ..., \eta_m\}$ olmak üzere $r \geq r_1$ için z, $[r_1, \infty)$ aralığında sürekli diferensiyellenebilir ve z, (2.1) denklemini sağlarsa $z \in C\left[[r_1 - \eta, \infty), \mathbb{R}\right]$ (2.1) denklemine ait bir çözümü olur ve bu çözüm $[r_1, \infty)$ üzerinde bir çözüm olarak adlandırılır (Györi ve Ladas 1990).*

r_1 bir başlangıç noktası olmak üzere, $\phi \in C\left[[r_1 - \eta, r_1), \mathbb{R}\right]$ başlangıç fonksiyonu verilmiş olsun. Böylece (2.1) denklemi $r_1 - \eta \leq r \leq r_1$ için

$$z(r) = \phi(r) \tag{2.2}$$

olacak şekilde $[r_1, \infty)$ aralığında birtek z çözümüne sahiptir (Györi ve Ladas 1990).

Tanım 2.2. *Bir diferensiyel denkleme ait aşikar olmayan bir çözümü z olmak üzere, eğer z çözümü keyfi sayıda sıfıra sahipse, z çözümüne salınımlıdır denir. Aksi halde ise salınımlı değildir denir. Salınımlı olmayan bir çözüm, ergeç pozitif yada ergeç negatiftir. Yani, $\forall r > r_1$ için $z(r) \neq 0$ olacak biçimde bir r_1 vardır. Eğer denklemin her çözümü salınımlı ise denklemin tüm çözümleri salınımlıdır, salınımlı olmayan en az bir çözümü varsa denklemin çözümleri salınımlı değildir denir (Ladde vd. 1987).*

Tanım 2.3. *Aşikar olmayan bir z çözümü T herhangi bir sayı olmak üzere (T, ∞) aralığında işaret değiştiriyorsa z çözümüne salınımlıdır denir (Ladde vd. 1987).*

$$z''(r) - z(-r) = 0$$

diferensiyel denkleminin $z_1(r) = \sin r$ salınımlı çözümü, $z_2(r) = e^r + e^{-r}$ ise salınımlı olmayan bir çözümüdür.

Bazı salınımlılık durumları gecikmelerle oluşur. Örnek vermek gerekirse,

$$z'(r) + z(r) = 0$$

ve

$$z''(r) - z(r) = 0$$

diferensiyel denklemlerin çözümleri salınımlı olmamasına rağmen,

$$z'(r) + z\left(r - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

ve

$$z''(r) - z(r - \pi) = 0$$

gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümleri sırasıyla $z = \sin r$ ve $z = \cos r$ olduğundan salınımlıdır (Ladde vd. 1987).

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Sabit Gecikmeli Diferensiyel Denklemlerin Salınımlılığı

Bu bölümde sabit gecikmeli ve sabit katsayılı, sabit gecikmeli ve değişken katsayılı birinci mertebeden diferensiyel denklemlere ait salınım koşullarına yer verilecektir.

$\psi, \eta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$z'(r) + \psi z(r - \eta) = 0 \tag{3.1}$$

ve $1 \leq i \leq m$ için $\psi_i, \eta_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$z'(r) + \sum_{i=1}^{m} \psi_i z(r - \eta_i) = 0 \tag{3.2}$$

sabit katsayılı ve sabit değişkenli diferensiyel denklemleri ve

$$z'(r) + \psi(r) z(r - \eta) = 0, \ r \geq r_0 \tag{3.3}$$

ve

$$z'(r) + \sum_{i=1}^{m} \psi_i(r) z(r - \eta_i) = 0 \tag{3.4}$$

değişken katsayılı ve sabit değişkenli diferensiyel denklemler ele alıncaktır.

Lemma 3.4. $\psi, \eta \in \mathbb{R}$ *olmak üzere,* (3.1) *denklemini ele alalım.* (3.1) *denklemine ait her çözümün salınımlı olması için gerek ve yeter koşul*

$$\Omega(\lambda) = \lambda + \psi e^{-\lambda\eta} = 0 \tag{3.5}$$

karakteristik denkleminin reel köke sahip olmamasıdır (Ladas vd. 1983).

Teorem 3.5. $\psi, \eta \in \mathbb{R}$ *olmak üzere,* (3.1) *denklemini tüm çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter koşul*

$$\psi\eta > \frac{1}{e} \tag{3.6}$$

olmasıdır (Ladas ve Sficas 1984).

İspat (3.6) şartında ψ ve η aynı işaretli olması gerekmektedir. Diğer taraftan, $\psi > 0$ ve $\eta > 0$ ise $\lambda \to -\infty$ iken $\psi e^{-\lambda\eta}$ ifadesi λ dan daha hızlı büyüyeceği için

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \Omega(\lambda) = \lim_{\lambda \to -\infty} (\lambda + \psi e^{-\lambda\eta}) = \infty$$

olur ve $\lambda \to \infty$ iken $e^{-\lambda\eta} \to 0$ olduğu için

$$\lim_{\lambda\to\infty} \Omega(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty} (\lambda + pe^{-\lambda\eta}) = \infty$$

elde edilir. $\lambda > 0$ ifadesi için $\Omega(\lambda) > 0$ olur. $\Omega(\lambda)$ nın ekstremumunu inceleyecek olursak

$$\Omega'(\lambda) = 1 - \psi\eta e^{-\lambda\eta}$$

olup

$$1 - \psi\eta e^{-\lambda\eta} = 0$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} e^{-\lambda\eta} &= \frac{1}{\psi\eta}, \\ -\lambda\eta &= \ln(\psi\eta)^{-1} \\ \lambda &= \frac{\ln(\psi\eta)}{\eta} \end{aligned}$$

elde edilir. $\Omega(\lambda)$ fonksiyonu $\lambda_0 = \frac{\ln(\psi\eta)}{\eta}$ apsisli noktada ekstramuma sahiptir. $\Omega(\lambda)$ fonksiyonunun ikinci türevini alırsak

$$\Omega''(\lambda) = p\eta^2 e^{-\lambda\eta}$$

elde edilir. $\psi > 0$, $\eta^2 > 0$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ ifadesi için $e^{-\lambda\eta} > 0$ olduğu için $\Omega''(\lambda) > 0$ olur. Böylece $\Omega(\lambda)$ fonksiyonu $\lambda_0 = \frac{\ln(\psi\eta)}{\eta}$ apsisli noktada minimuma sahiptir.

$$\begin{aligned} \Omega(\lambda_0) &= \frac{\ln(\psi\eta)}{\eta} + \psi e^{\frac{\ln(\psi\eta)}{\eta}\eta} = \frac{\ln(\psi\eta)}{\eta} + \psi\frac{1}{\psi\eta} \\ &= \frac{\ln(\psi\eta)}{\eta} + \frac{1}{\eta} \\ &= \frac{\ln(\psi\eta e)}{\eta} \end{aligned}$$

olup

$$\min_{\lambda\in\mathbb{R}} \Omega(\lambda) = \frac{\ln(\psi\eta e)}{\eta}$$

elde edilir. Diğer taraftan kabulden $\psi\eta > \frac{1}{e}$ olduğundan $\psi\eta e > 1$ bulunur. Ayrıca

$$\ln(\psi\eta e) > 0$$

olduğu görülür ve $\eta > 0$ olduğundan

$$\frac{\ln(\psi\eta e)}{\eta} > 0$$

ifadesi elde edilir. Böylece

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\Omega(\lambda)=\lim_{\lambda\to\infty}\Omega(\lambda)=\infty$$

ve minimum noktasında ifade sıfırdan büyük olduğu için $\Omega(\lambda)$ reel köke sahip olmaz.

Diğer taraftan $\psi<0$ ve $\eta<0$ ise $\lambda\to-\infty$ iken $\psi e^{-\lambda\eta}\to 0$ olduğundan

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\Omega(\lambda)=\lim_{\lambda\to-\infty}(\lambda+\psi e^{-\lambda\eta})=-\infty$$

ve $\lambda\to\infty$ iken $e^{-\lambda\eta}$ ifadesi λ dan daha hızlı büyüyeceğinden

$$\lim_{\lambda\to\infty}\Omega(\lambda)=\lim_{\lambda\to\infty}(\lambda+\psi e^{-\lambda\eta})=-\infty$$

bulunur. Ayrıca

$$\Omega'(\lambda)=1-\psi\eta e^{-\lambda\eta}$$

ve $\Omega(\lambda)$ fonksiyonu $\lambda_0=\frac{\ln(\psi\eta)}{\eta}$ apsisli noktada ekstramuma sahipti. $\psi<0$ olduğu için

$$\Omega''(\lambda)=\psi\eta^2e^{-\lambda\eta}<0$$

olur. Bu durumda $\Omega(\lambda)$ fonksiyonu $\lambda_0=\frac{\ln(\psi\eta)}{\eta}$ apsisli noktada maksimuma sahiptir.

$$\max_{\lambda\in\mathbb{R}}\Omega(\lambda)=\frac{\ln(\psi\eta e)}{\eta}$$

olup $\psi\eta>\frac{1}{e}$ ve $\lambda<0$ olduğundan

$$\frac{\ln(\psi\eta e)}{\eta}<0$$

olur, böylece maksimum noktada fonksiyon sıfırdan küçük olduğu için $\Omega(\lambda)$ fonksiyonu reel köke sahip olmaz. Yani Lemma 3.4 gereğince (3.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlı olur. □

$1\le i\le m$ için $\psi_i,\eta_i\ge 0$ olmak üzere, (3.2) denklemini ele alalım. (3.2) denkleminin karakteristik denklemi

$$\Omega(\lambda)=\lambda+\sum_{i=1}^{m}\psi_ie^{-\lambda\eta_i}=0 \tag{3.7}$$

şeklindedir.

Teorem 3.6. $1 \leq i \leq m$ *için* ψ_i, $\eta_i \geq 0$ *olmak üzere, aşağıda verilen şartlardan her biri* (3.2) *denklemine ait çözümlerinin salınımlı olması için yeter şarttır.*

(a)

$$\sum_{i=1}^{m} \psi_i \eta_i > \frac{1}{e} \tag{3.8}$$

(b)

$$\left(\prod_{i=1}^{m} \psi_i\right)^{\frac{1}{m}} \left(\sum_{i=1}^{m} \eta_i\right) > \frac{1}{e} \tag{3.9}$$

(Ladas ve Sficas 1984).

İspat (a) (3.2) denklemine ait karakteristik denklem

$$\Omega(\lambda) = \lambda + \sum_{i=1}^{m} \psi_i e^{-\lambda \eta_i}$$

şeklindedir. $\lambda > 0$ ve $1 \leq i \leq m$ için $\psi_i \geq 0$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $e^{-\lambda \eta_i} > 0$ olduğundan $\Omega(\lambda) > 0$ olduğunu söyleyebiliriz. Böylece karakteristik denklemin reel kökü olmaz.

$\lambda < 0$ olmak üzere

$$\Omega(\lambda) = \lambda + \sum_{i=1}^{m} \psi_i e^{-\lambda \eta_i}$$

karakteristik denklemi $e^a \geq ae$ eşitsizliği yardımıyla

$$\lambda + \sum_{i=1}^{m} \psi_i e^{-\lambda \eta_i} \geq \lambda + \sum_{i=1}^{m} \psi_i (-\lambda \eta_i) e \geq \lambda - \lambda e \left[\sum_{i=1}^{m} \psi_i \eta_i\right] = -\lambda e \left(-\frac{1}{e} + \sum_{i=1}^{m} \psi_i \eta_i\right)$$

ifadesine dönüşür. $\lambda < 0$ olduğundan $-\lambda e > 0$ ve (3.8) koşulundan dolayı

$$-\frac{1}{e} + \sum_{i=1}^{m} \psi_i \eta_i > 0$$

olur. Böylece

$$-\lambda e \left(-\frac{1}{e} + \sum_{i=1}^{m} \psi_i \eta_i\right) > 0$$

olup $\Omega(\lambda) > 0$ bulunur. Yani, (3.2) denklemine ait tüm çözümleri salınımlı olur.

(b) Aritmetik ortalama ile geometrik ortalama arasında aşağıdaki ilişki söz konusudur.

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \psi_i \geq \left(\prod_{i=1}^{m} \psi_i\right)^{\frac{1}{m}}.$$

$\lambda < 0$ için

$$\begin{aligned}
\Omega(\lambda) &= \lambda + \sum_{i=1}^{m} \psi_i e^{-\lambda \eta_i} \geq \lambda + m \left(\prod_{i=1}^{m} \psi_i e^{-\lambda \eta_i} \right)^{\frac{1}{m}} = \lambda + m \left(\prod_{i=1}^{m} \psi_i \right)^{\frac{1}{m}} e^{-\frac{\lambda}{m} \sum_{i=1}^{m} \eta_i} \\
&\geq \lambda + m \left(\prod_{i=1}^{m} \psi_i \right)^{\frac{1}{m}} \left(-e \frac{\lambda}{m} \sum_{i=1}^{m} \eta_i \right) \\
&= -\lambda e \left[-\frac{1}{e} + \left(\prod_{i=1}^{m} \psi_i \right)^{\frac{1}{m}} \left(\sum_{i=1}^{m} \eta_i \right) \right]
\end{aligned}$$

olup (3.9) şartından $\Omega(\lambda) > 0$ olur. Böylece (3.2) denklemine ait her çözüm salınımlı olur. □

Teorem 3.7. $\psi \in C[[r_0, \infty), \mathbb{R}^+]$ *ve* $\eta > 0$ *olmak üzere*

$$\liminf_{r \to \infty} \int_{r-\eta}^{r} \psi(s) ds > \frac{1}{e} \tag{3.10}$$

ise (3.3) *denklemine ait tüm çözümler salınımlı olur (Ladas 1979).*

İspat Çelişki oluşturmak için (3.3) denkleminin pozitif bir $z(r)$ olsun. Aynı şekilde negatif bir $-z(r)$ fonksiyonu da (3.3) denkleminin bir çözümü olarak kabul edilebilir. Ancak biz ispatımızı yalnızca pozitif çözüm üzerinden yapacağız. Bu durumda $r \geq r^*$ olmak üzere $z(r) > 0$, $z(r-\eta) > 0$, $r^* \geq r_0 + \eta$ olacak şekilde bir r^* sayısı mevcuttur. Böylece (3.3) denkleminden

$$z'(r) = -\psi(r) z(r-\eta) \leq 0$$

elde edilir. Yani z fonksiyonu azalmayan bir fonksiyon olur ve $z(r-\eta) \geq z(r)$ yazılır. Ayrıca (3.10) şartından

$$\int_{r-\eta}^{r} \psi(s) ds \geq c > \frac{1}{e} \tag{3.11}$$

olacak şekilde bir $c > 0$ mevcuttur.

Diğer taraftan $z(r)$ azalmayan olduğundan, (3.3) denkleminden

$$z'(r) + \psi(r) z(r) \leq 0 \tag{3.12}$$

eşitsizliği elde edilir. Elde edilen (3.12) eşitsizliğini $z(r)$ ile bölüp $r-\eta$ den r ye integre edersek

$$\int_{r-\eta}^{r} \frac{z'(s)}{z(s)} ds + \int_{r-\eta}^{r} \psi(s) ds \leq 0 \tag{3.13}$$

bulunur. (3.11) yardımıyla son eşitsizlik

$$\ln \frac{z(r)}{z(r-\eta)} + c \leq 0$$

olup $r \geq r_1 + \eta$ için

$$\ln \frac{z(r)}{z(r-\eta)} + \ln e^c \leq 0,$$

$$\ln \left(\frac{z(r)}{z(r-\eta)} e^c \right) \leq 0$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{z(r)}{z(r-\eta)} e^c \leq 1$$

olup her $c \in \mathbb{R}$ için $e^c \geq ec$ olduğundan

$$e^c z(r) \leq z(r-\eta)$$

ya da

$$(ec) z(r) \leq z(r-\eta) \tag{3.14}$$

olur. Elde edilen bu eşitsizlik (3.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$z'(r) + \psi(r)(ec)z(r) \leq 0 \tag{3.15}$$

ifadesi elde edilir. (3.15) eşitsizliğini $z(r)$ ile bölüp $r-\eta$ den r ye integre edersek

$$\int_{r-\eta}^{r} \frac{z'(s)}{z(s)} ds + (ec) \int_{r-\eta}^{r} \psi(s) ds \leq 0,$$

$$\ln \frac{z(r)}{z(r-\eta)} + (ec)c \leq 0$$

ya da

$$\ln \frac{z(r)}{z(r-\eta)} + \ln e^{(ec^2)} \leq 0,$$

$$\ln \left(\frac{z(r)}{z(r-\eta)} e^{(ec^2)} \right) \leq 0$$

olur. Buradan

$$\frac{z(r)}{z(r-\eta)}e^{(ec^2)} \leq 1$$

olup her $c \in \mathbb{R}$ için $e^c \geq ec$ olduğundan $r \geq r_1 + 2\eta$ için

$$(ec)^2 z(r) \leq z(r-\eta)$$

elde edilir. Şimdi elde edilen son ifade üzerinden tümevarım uygularsak, $r \geq r_1 + m\eta$ için

$$(ec)^m z(r) \leq z(r-\eta) \tag{3.16}$$

bulunur. Elde edilen son eşitsizlik (3.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$z'(r) + \psi(r)(ec)^m z(r) \leq 0$$

olur ve bu eşitsizliği $z(r)$ ile bölüp $r-\eta$ den r ye integre edilirse

$$\int_{r-\eta}^{r} \frac{z'(s)}{z(s)} ds + (ec)^m \int_{r-\eta}^{r} \psi(s) ds \leq 0,$$

$$\ln \frac{z(r)}{z(r-\eta)} + (ec)^m c \leq 0$$

ya da

$$\ln \frac{z(r)}{z(r-\eta)} + \ln e^{(e^m c^{m+1})} \leq 0,$$

$$\ln \left(\frac{z(r)}{z(r-\eta)} e^{(e^m c^{m+1})} \right) \leq 0$$

Buradan

$$\frac{z(r)}{z(r-\eta)} e^{(e^m c^{m+1})} \leq 1$$

her $c \in \mathbb{R}$ için $e^c \geq ec$ olduğu için $r \geq r_1 + (m+1)\eta$ için

$$(ec)^{m+1} z(r) \leq z(r-\eta)$$

elde edilir. $c > \frac{1}{e}$ olduğu için $r \geq r_1 + k\eta$ için

$$(ec)^k z(r) \leq z(r-\eta) \tag{3.17}$$

olur. Şimdi öyle bir k seçelim ki

$$\left(\frac{2}{c}\right)^2 < (ec)^k \tag{3.18}$$

eşitsizliğini sağlasın. Şimdi $\widetilde{r} \geq r_1 + k\eta$ seçelim. O halde

$$\int_{\widetilde{r}}^{\xi} \psi(s)ds \geq \frac{c}{2} \text{ ve } \int_{\xi}^{\widetilde{r}+\eta} \psi(s)ds \geq \frac{c}{2} \tag{3.19}$$

olacak şekilde bir $\xi \in (\widetilde{r}, \widetilde{r} + \eta)$ vardır.

Şimdi (3.3) denklemi $\widetilde{r}$ den ξ ye integre edilirse

$$z(\xi) - z(\widetilde{r}) + \int_{\widetilde{r}}^{\xi} \psi(s)z(s-\eta)ds = 0$$

z fonksiyonunun azalan olduğunu ve (3.19) ifadesini dikkate alırsak son eşitsizlikten

$$z(\xi) - z(\widetilde{r}) + z(\xi - \eta)\int_{\widetilde{r}}^{\xi} \psi(s)ds \leq 0,$$

$$z(\xi) - z(\widetilde{r}) + z(\xi - \eta)\frac{c}{2} \leq 0$$

ya da

$$z(\widetilde{r}) \geq \frac{c}{2} z(\xi - \eta) \tag{3.20}$$

bulunur.

Diğer yandan (3.3) denklemi ξ den $\widetilde{r} + \eta$ ye integre edilirse

$$z(\widetilde{r} + \eta) - z(\xi) + \int_{\xi}^{\widetilde{r}+\eta} \psi(s)z(s-\eta)ds = 0$$

z fonksiyonunun azalan olduğunu ve (3.19) ifadesini dikkate alırsak son eşitsizlikten

$$z(\widetilde{r} + \eta) - z(\xi) + z(\widetilde{r} + \eta - \eta)\int_{\xi}^{\widetilde{r}+\eta} \psi(s)ds \leq 0,$$

$$z(\widetilde{r} + \eta) - z(\xi) + z(\widetilde{r})\frac{c}{2} \leq 0$$

ya da

$$z(\xi) \geq \frac{c}{2} z(\widetilde{r}) \tag{3.21}$$

bulunur.

Böylece (3.20) ve (3.21) eşitsizliklerini aynı anda ele alırsak

$$z(\xi) \geq \frac{c}{2} z(\widetilde{r}) \geq \left(\frac{c}{2}\right)^2 z(\xi - \eta),$$

$$\frac{z(\xi - \eta)}{z(\xi)} \leq \left(\frac{2}{c}\right)^2 \tag{3.22}$$

ifadesini elde ederiz. Buradan

$$(ec)^k \leq \frac{z(\xi - \eta)}{z(\xi)} \leq \left(\frac{2}{c}\right)^2$$

olur. Fakat bulunan bu ifade (3.18) ile çelişki oluşturur ve ispat tamamlanır. Yani (3.3) denklemine ait tüm çözümler salınımlı olur. □

Diğer taraftan eğer $\psi \in C\left[[r_0 - \eta, \infty), \mathbb{R}^+\right]$, $\eta > 0$ olmak üzere

$$\int\limits_{r-\eta}^{r} \psi(s)ds \leq \frac{1}{e},\ r \geq r_0 \tag{3.23}$$

ise (3.3) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olur (Györi ve Ladas 1991).

Örnek 3.8.

$$z'(r) + z\left(r - \frac{1}{e}\right) = 0 \tag{3.24}$$

denklemini ele alalım. Burada $\psi = 1$, $\eta = \frac{1}{e}$ olduğundan $\psi\eta e = 1$ olur. Böylece (3.24) *şartından gecikmeli diferensiyel denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olur.*

Teorem 3.9. $\psi(r) \in [[r_0, \infty), \mathbb{R}^+]$ *ve* η *pozitif bir sabit olsun. Ayrıca*

$$\int\limits_{r-\eta}^{r} \psi(s)ds \geq \frac{1}{e},\ r \geq \widetilde{r}, \tag{3.25}$$

ve

$$\int\limits_{r_0+\eta}^{\infty} \psi(r)\left[\exp\left(\int\limits_{r-\eta}^{r} \psi(s)ds - \frac{1}{e}\right) - 1\right] dr = \infty \tag{3.26}$$

olacak şekilde $\widetilde{r} > r_0 + \eta$ olduğunu kabul edelim. Böylece (3.3) *denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Li, 1995).*

İspat Çelişki oluşturmak adına (3.3) denkleminin pozitif bir çözümü olduğunu kabul edelim. Böylece $r \geq r_1$ için $z(r) > 0$, $z(r - \eta) > 0$, $z'(r) \leq 0$, $z(r - \eta) \geq z(r)$ olacak şekilde $r_1 \geq \widetilde{r}$ vardır.

Diğer taraftan $r \geq r_1$ için

$$w(r) = \frac{z(r-\eta)}{z(r)} \tag{3.27}$$

olsun. Böylece

$$w(r) \geq 1 \tag{3.28}$$

olur.

$r \geq r_1$ için (3.3) denkleminin her iki tarafını $z(r)$ ile bölersek,

$$\frac{z'(r)}{z(r)} + \psi(r)w(r) = 0 \tag{3.29}$$

elde ederiz. $r \geq r_1 + \eta$ için (3.29) ifadesinin her iki tarafının $r - \eta$ dan r ye integralini alırsak

$$\log z(r) - \log z(r-\eta) + \int\limits_{r-\eta}^{r} \psi(s)w(s)ds = 0$$

ya da

$$w(r) = \exp\left(\int\limits_{r-\eta}^{r} \psi(s)w(s)ds \right) \tag{3.30}$$

elde ederiz.

$r \geq r_1 + \eta$ için (3.3) ifadesinden $0 < \gamma(r) \leq \eta$ olmak üzere

$$\int\limits_{r-\gamma(r)}^{r} \psi(s)ds = \frac{1}{e} \tag{3.31}$$

olacak şekilde $\gamma(r)$ vardır. Bu şekilde devam ederek $r \geq r_1 + \eta$ için

$$\begin{aligned}
w(r) &= \exp\left(\int\limits_{r-\gamma(r)}^{r} \psi(s)w(s)ds + \int\limits_{r-\eta}^{r-\gamma(r)} \psi(s)w(s)ds \right) \\
&\geq \exp\left(\int\limits_{r-\gamma(r)}^{r} \psi(s)w(s)ds + \int\limits_{r-\eta}^{r-\gamma(r)} \psi(s)ds \right) \\
&= \exp\left(\int\limits_{r-\gamma(r)}^{r} \psi(s)w(s)ds + \int\limits_{t-\eta}^{t} \psi(s)ds - \frac{1}{e} \right) \\
&= \exp\left(\int\limits_{r-\gamma(r)}^{r} \psi(s)w(s)ds \right) \exp\left(\int\limits_{r-\eta}^{r} \psi(s)ds - \frac{1}{e} \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan her $c \geq 0$ için

$$e^c \geq ec$$

olduğu görülür ve böylece

$$w(r) \geq e \int_{r-\gamma(r)}^{r} \psi(s)w(s)ds \exp\left(\int_{t-\eta}^{t} \psi(s)ds - \frac{1}{e}\right),\ r \geq r_1 + \eta \tag{3.32}$$

ya da

$$\psi(r)w(r) \geq e\psi(r) \int_{r-\gamma(r)}^{r} \psi(s)w(s)ds \exp\left(\int_{r-\eta}^{r} \psi(s)ds - \frac{1}{e}\right),\ r \geq r_1 + \eta$$

ya da (3.25), (3.28) ve (3.31) yardımıyla

$$\begin{aligned} &\psi(r)\left(w(r) - e\int_{r-\gamma(r)}^{r} \psi(s)w(s)ds\right) \\ \geq\ & ep(r) \int_{r-\gamma(r)}^{r} \psi(s)w(s)ds \left[\exp\left(\int_{t-\eta}^{r} \psi(s)ds - \frac{1}{e}\right) - 1\right] \\ \geq\ & \psi(r)\left[\exp\left(\int_{r-\eta}^{r} \psi(s)ds - \frac{1}{e}\right) - 1\right],\ r \geq r_1 + \eta. \end{aligned}$$

Her iki tarafın $r_2 = r_1 + 2\eta$ dan $T > r_2$ ye integralini alırsak

$$\int_{r_2}^{T} \psi(r)\left[w(r) - e\int_{r-\gamma(r)}^{r} p(s)w(s)ds\right] dr \geq \int_{r_2}^{T} \psi(r)\left[\exp\left(\int_{r-\eta}^{r} \psi(s)ds - \frac{1}{e}\right) - 1\right] dr \tag{3.33}$$

buluruz.

$$N'(r) = \max_{r_1 \leq s \leq r+\eta} \psi(s) \tag{3.34}$$

olacak şekilde $N(r) \in C^1\left[[r_1, \infty), (0, \infty)\right]$ fonksiyonunu seçelim.

$r \geq r_1$ olmak üzere (3.25) ve (3.34) yardımıyla

$$N'(r) \geq \frac{1}{e} \tag{3.35}$$

olur. Böylece $[r_1, \infty)$ üzerinde $N(r)$ artan ve $\lim\limits_{r\to\infty} N(r) = \infty$ olur. Buradan kolayca

$$\int_{r_1}^{\infty} \exp(-N(r))dr < \infty \tag{3.36}$$

ve

$$\int_{r_1+\eta}^{\infty} \psi(r)\exp(-N(r-\eta))dr < \infty \tag{3.37}$$

olduğu görülür.

Diğer taraftan

$$Q(r) = \psi(r) + \exp(-N(r)),\ r \geq r_1 \tag{3.38}$$

olsun. (3.32) ifadesi yardımıyla

$$w(r) - e\int_{r-\gamma(r)}^{r} \psi(s)w(s)ds \geq 0,\ r \geq r_1+\eta$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}&\int_{r_2}^{T} p(r)\left[w(r) - e\int_{r-\gamma(r)}^{r} \psi(s)w(s)ds\right]dr\\ \leq\ &\int_{r_2}^{T} Q(r)\left[w(r) - \int_{r-\gamma(r)}^{r} Q(s)w(s)ds\right]dr + e\int_{r_2}^{T} Q(r)\left(\int_{r-\gamma(t)}^{t} \exp(-N(s))w(s)ds\right)dr\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi

$$\lim_{r\to\infty}\sup w(r) = \infty \tag{3.39}$$

olduğunu iddia ediyoruz.

Aksine,

$$w(r) \leq M,\ r \geq r_1 \tag{3.40}$$

olacak şekilde $M > 0$ vardır.

Diğer taraftan, $\exp(-N(r))$ ifadesinin azalan olduğunu kullanarak

$$\int_{r_2}^{T} Q(r)\left(\int_{r-\gamma(r)}^{r} \exp(-N(s))w(s)ds\right)dr \leq M\eta\int_{r_2}^{T} Q(r)\exp\left(-N(r-\eta)\right)dr \tag{3.41}$$

elde ederiz. Böylece (3.26), (3.33), (3.34), (3.36) ve (3.37) ifadelerini kullanarak

$$\lim_{T\to\infty}\int_{r_2}^{T} Q(r)\left[w(r) - e\int_{r-\gamma(r)}^{r} \psi(s)w(s)ds\right]dr = \infty \tag{3.42}$$

bulunur. Şimdi

$$u = \sigma(r) = \int_{r_2-\eta}^{r} Q(s)ds,\ r \geq r_2 - \eta \tag{3.43}$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

Buradan $t \to \infty$ iken $\sigma(r) \to \infty$, $\sigma(r)$ kesin olarak artan olur ve böylece σ^{-1} mevcut olur.

$$v(u) = w(\sigma^{-1}(u)) \tag{3.44}$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

Ardından

$$\begin{aligned}
&\int_{r_2}^{T} Q(r)\left(w(r) - e\int_{r-\gamma(r)}^{r} \psi(s)w(s)ds\right)dr \\
&= \int_{\sigma(r_2)}^{\sigma(T)} \left(w(\sigma^{-1}(u)) - e\int_{\sigma^{-1}(u)-g(\sigma^{-1}(u))}^{t} Q(s)w(s)ds\right)du \\
&= \int_{\sigma(r_2)}^{\sigma(T)} \left(w(\sigma^{-1}(u)) - e\int_{\sigma^{-1}((u)-g(\sigma^{-1}(u)))}^{t} w(\sigma^{-1}(\xi))d\xi\right)du \\
&= \int_{\sigma(r_2)}^{\sigma(T)} \left(v(u) - e\int_{\sigma^{-1}((u)-r(\sigma^{-1}(u)))}^{r} v(\xi)d\xi\right)du
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\sigma(\sigma^{-1}(u) - g(\sigma^{-1}(u))) &= \sigma(r - g(r)) \\
&= \int_{r_2-\eta}^{r-g(r)} Q(s)ds \\
&\leq \int_{r_2-\eta}^{t} Q(s)ds - \int_{r-g(r)}^{t} p(s)ds \\
&= u - \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\int_{r_2}^{T} Q(r)\left(w(r) - e\int_{r-\gamma(r)}^{r} \psi(s)w(s)ds\right)dr \leq \int_{\sigma(r_2)}^{\sigma(T)} \left(v(u) - e\int_{u-\frac{1}{e}}^{u} v(s)ds\right)du \tag{3.45}$$

bulunur.

(3.42), (3.43) ve (3.45) ifadelerini kullanarak

$$\lim_{A\to\infty}\int_{\sigma(r_2)}^{A}\left(v(u)-e\int_{u-\frac{1}{e}}^{u}v(s)ds\right)du=\infty \tag{3.46}$$

elde edilir.

İntegrasyon sırasını değiştirerek $A>\sigma(r_2)$ için

$$\begin{aligned}\int_{\sigma(r_2)}^{A}e\left(\int_{u-\frac{1}{e}}^{u}v(s)ds\right)du &= \int_{\sigma(r_2)-\frac{1}{e}}^{\sigma(r_2)}e\left(\int_{\sigma(r_2)}^{s+\frac{1}{e}}v(s)du\right)ds \\ &+\int_{\sigma(r_2)}^{A-\frac{1}{e}}e\left(\int_{s}^{s+\frac{1}{e}}v(s)du\right)ds+\int_{A-\frac{1}{e}}^{A}e\left(\int_{s}^{A}v(s)du\right)ds\end{aligned}$$

ya da

$$\int_{\sigma(r_2)}^{A}e\left(\int_{u-\frac{1}{e}}^{u}v(s)ds\right)du=\int_{\sigma(r_2)-\frac{1}{e}}^{\sigma(r_2)}\left[es+1-e\sigma(r_2)\right]v(s)ds+\int_{\sigma(r_2)}^{A-\frac{1}{e}}v(s)ds+\int_{A-\frac{1}{e}}^{A}e\left(A-s\right)v(s)ds \tag{3.47}$$

elde edilir.

(3.46) ve (3.47) ifadelerini kullanarak

$$\lim_{A\to\infty}\int_{A-\frac{1}{e}}^{A}v(s)ds=\infty \tag{3.48}$$

bulunur.

Buradan

$$\limsup_{u\to\infty}v(u)=\infty$$

ve böylece

$$\limsup_{r\to\infty}w(r)=\infty$$

elde edilir ve (3.40) ifadesi ile çelişki elde edilir. Yani (3.39) sağlanır.

(3.25) ifadesi yardımıyla, $r\geq r_1+\eta$ için

$$\int_{\xi}^{r}\psi(s)ds\geq\frac{1}{2e}\ \text{ve}\ \int_{r}^{\xi+\eta}\psi(s)ds\geq\frac{1}{2e} \tag{3.49}$$

olacak şekilde $\xi \in (r-\eta, r)$ vardır.

(3.3) ifadesini $[\xi, r]$ ve $[r, \xi+\eta]$ üzerinde integre edersek

$$z(r) - z(\xi) + \int_{\xi}^{r} \psi(s) z(s-\eta) ds = 0 \tag{3.50}$$

ve

$$z(\xi+\eta) - z(r) + \int_{r}^{\xi+\eta} \psi(s) z(s-\eta) ds = 0 \tag{3.51}$$

bulunur.

(3.50) ve (3.51) ifadelerinin ilk terimlerini ihmal edilip $z(r)$ nin azalan olmasını ve (3.49) ifadesini kullanarak

$$z(r) > \frac{1}{2e} z(\xi) > \left(\frac{1}{2e}\right)^2 z(r-\eta)$$

ya da

$$w(r) < (2e)^2,\ r \geq r_1 + \eta$$

olup (3.39) ifadesi ile çelişir ve ispat tamamlanır. □

Sonuç 3.10. $\psi(r) \in C\left[[r_0, \infty), \mathbb{R}^+\right]$ *ve* η *pozitif bir sabit olsun. Eğer* (3.10) *sağlanırsa* (3.3) *denkleminin her çözümü salınımlıdır (Li, 1995).*

İspat (3.10) ifadesinden

$$\int_{r_0}^{\infty} \psi(r) dr = \infty$$

olup yeterince büyük r ler için

$$\int_{r-\eta}^{r} \psi(s) ds - \frac{1}{e} > c$$

olacak şekilde $c > 0$ vardır. Böylece (3.26) sağlanır. Teorem yardımıyla (3.3) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Böylece ispat tamamlanır. □

Sonuç 3.11. $\psi(r) \in C\left[[r_0, \infty), \mathbb{R}^+\right]$ *ve* η *pozitif bir sabit olsun. Eğer* (3.25) *sağlanırsa ve*

$$\int_{r_0+\eta}^{\infty} \psi(r) \left(\int_{r-\eta}^{r} \psi(s) ds - \frac{1}{e} \right) dr = \infty \tag{3.52}$$

(3.3) *denkleminin her çözümü salınımlıdır (Li, 1995).*

İspat (3.25) ifadesini kullanarak ve her $c \geq 0$ için $e^c - 1 \geq c$ olduğu için

$$\exp\left(\int_{r-\eta}^{r} \psi(s)ds - \frac{1}{e}\right) - 1 \geq \int_{r-\eta}^{r} \psi(s)ds - \frac{1}{e}, \quad r \geq t_1$$

bulunur. Böylece (3.52) ifadesinden (3.26) elde edilir. Teorem yardımıyla (3.3) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Böylece ispat tamamlanır. □

Örnek 3.12.

$$z'(r) + \left(\frac{1}{1+r} + \frac{1}{e}\right) z(r-1) = 0, \quad r \in [0, \infty) \tag{3.53}$$

diferensiyel denklemini ele alalım. Açık olarak, $r \geq 1$ *için*

$$\int_{r-1}^{r} \left(\frac{1}{1+r} + \frac{1}{e}\right) dr = \log\frac{1+r}{r} + \frac{1}{e} > \frac{1}{e}$$

ve

$$\lim_{r\to\infty} \int_{r-1}^{r} \left(\frac{1}{1+r} + \frac{1}{e}\right) dr = \frac{1}{e}$$

bulunur. Böylece (3.10) *sağlanmaz. Fakat herhengi* $T > 1$ *için*

$$T \to \infty \ \text{iken} \int_{r}^{T} \left(\frac{1}{1+r} + \frac{1}{e}\right) \log\left(\frac{1+r}{r}\right) dr \geq \frac{1}{e}\int_{r}^{T} \log\left(\frac{1+r}{r}\right) dr \to \infty$$

olur. Böylece Sonuç 3.11 den (3.53) *denklemine ait her çözüm salınımlı olur (Li, 1995).*

Ayrıca $1 \leq i \leq m$ için $\psi_i(r)$ ler sürekli ve negatif olmayan fonksiyonlar ve η_i ler pozitif sabitler olmak üzere (3.4) denklemini göz önüne alalım. Ladas ve Stavroulakis (1982), Arino, Györi ve Jawhari (1984) (3.4) denklemine ait tüm çözümlerin salınımlı olması için yeter şartlar elde etmişlerdir. Farklı diferensiyel denklemlere ait çözümlerin salınımlılık davranışlarını incelemek için (3.10) integral şartından faydalanmışlardır. Grammatikopoulos, Grove ve Ladas'ın (1986), Ladas ve Qian'in (1990), Zhang ve Gopalsamy'nin (1998) çalışmaları vardır. Bu denkleme ait salınım koşulları ile ilgili, başka sonuçlar Hunt ve York'un (1984), Györi'nin (1986), Cheng'in (1990), Kwong'un (1991), Tramov'un (1975) makalelerinde görülür.

Lemma 3.13. *Eğer bazı* i *ler için*

$$\limsup_{r\to\infty} \int_{r}^{r+\eta_i} \psi_i(s)ds > 0 \tag{3.54}$$

ve $z(r)$, (3.4) *denkleminin pozitif bir çözümü ise bu durumda*

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{z(r-\eta_i)}{z(r)}<\infty \tag{3.55}$$

(Li, 1996).

İspat $d>0$ olacak şekilde sabit ve $\{r_k\}$ dizisi vardır öyle ki $k\to\infty$ iken $r_k\to\infty$ ve

$$\int_{r_k}^{r_k+\eta_i}\psi_i(s)ds\geq d,\quad k=1,2,...,n$$

olsun. Böylece

$$\int_{r_k}^{\varphi_k}\psi_i(s)ds\geq\frac{d}{2}\ \text{ ve }\ \int_{\varphi_k}^{r_k+\eta_i}\psi_i(s)ds\geq\frac{d}{2} \tag{3.56}$$

olacak şekilde her k için $\varphi_k\in(r_k,r_k+\eta_i)$ vardır. Diğer yandan yeterince büyük r ler için (3.3) denkleminden

$$z'(r)+\psi_i(r)z(r-\eta_i)\leq 0 \tag{3.57}$$

olur. (3.57) eşitsizliğinin r_k den φ_k ye integre edilirse

$$z(\varphi_k)-z(r_k)+\int_{r_k}^{\varphi_k}\psi_i(s)z(s-\eta_i)ds\leq 0$$

z fonksiyonunun azalan olması ve (3.56) eşitsizliğinden

$$z(r_k)\geq\frac{d}{2}z(\varphi_k-\eta_i) \tag{3.58}$$

eşitsizliği elde edilir.

Diğer yandan (3.57) eşitsizliği φ_k den $r_k+\eta_i$ ye integre edilirse

$$z(r_k+\eta_i)-z(\varphi_k)+\int_{\varphi_k}^{r_k+\eta_i}\psi_i(s)z(s-\eta_i)ds\leq 0$$

z fonksiyonunun azalan olması ve (3.56) eşitsizliğinden

$$z(\varphi_k)\geq\frac{d}{2}z(t_k) \tag{3.59}$$

bulunur. (3.58) ve (3.59) eşitsizliklerini bir arada ele alırsak

$$z(\varphi_k)\geq\left(\frac{d}{2}\right)^2 z(\varphi_k-\eta_i)$$

ya da

$$\frac{z(\varphi_k - \eta_i)}{z(\varphi_k)} \le \left(\frac{2}{d}\right)^2 \tag{3.60}$$

olup, ispat tamamlanır. □

Lemma 3.14. (3.4) *denklemi pozitif bir çözüme sahip olsun. Buradan*

$$\int_r^{r+\eta_i} \psi_i(s)ds \le 1 \tag{3.61}$$

olur (Li, 1996).

İspat (3.4) denklemi r den $r + \eta_i$ ye integre edilirse

$$z(r+\eta_i) - z(r) + \int_r^{r+\eta_i} \psi_i(s)z(s-\eta_i)ds = 0,$$

$$z(r+\eta_i) - z(r) + z(r)\int_r^{r+\eta_i} \psi_i(s)ds \le 0$$

ya da

$$z(r)\left[\int_t^{r+\eta_i} \psi_i(s)ds - 1\right] \le 0$$

elde edilir. $z(r)$ pozitif olduğu için

$$\int_r^{r+\eta_i} \psi_i(s)ds \le 1$$

bulunur ve ispat tamamlanır. □

Teorem 3.15. $\eta_m = \max\{\eta_1, \eta_2, ...\eta_m\}$ *olsun.* $r_0 > 0$ *olmak üzere her* $r \ge r_0$ *için*

$$\sum_{i=1}^{m} \int_r^{r+\eta_i} \psi_i(s)ds > 0 \tag{3.62}$$

ve

$$\limsup_{r\to\infty} \int_r^{r+\eta_n} \psi_n(s)ds > 0 \tag{3.63}$$

olsun. Diğer yandan, eğer

$$\int_{t_0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{m}\psi_i(r)\right)\ln\left(e\sum_{i=1}^{m}\int_{r}^{r+\eta_i}\psi_i(s)ds\right)dr=\infty \tag{3.64}$$

ise (3.4) *denklemine ait her çözüm salınımlı olur (Li, 1996).*

İspat Çelişki oluşturma için (3.4) denklemine ait pozitif ve azalan bir $z(r)$ çözümünün varlığını kabul edelim. $\lambda(r)=-\frac{z'(r)}{z(r)}$ olsun. $\lambda(r)$ negatif olmayan sürekli bir fonksiyon olmak üzere $r_1\geq r_0$ için $z(r_1)>0$ vardır öyle ki,

$$z(r)=z(r_1)\exp\left(-\int_{r_1}^{r}\lambda(s)ds\right)$$

olur. Ayrıca $\lambda(r)$ ifadesi

$$\lambda(r)=\sum_{i=1}^{m}\psi_i(r)\exp\left(\int_{r-\eta_i}^{r}\lambda(s)ds\right)$$

genelleştirilmiş karakteristik denklemini sağlar. Diğer taraftan $B(r)=\sum_{i=1}^{m}\int_{r}^{r+\eta_i}\psi_i(s)ds$ olsun.

$$e^{\alpha z}\geq z+\frac{\ln(e\alpha)}{\alpha},\ r>0 \tag{3.65}$$

olmak üzere, (3.65) ifadesi yardımıyla

$$\begin{aligned}\lambda(r)&=\sum_{i=1}^{m}\psi_i(r)\exp\left(B(r)\frac{1}{B(r)}\int_{r-\eta_i}^{r}\lambda(s)ds\right)\\&\geq\sum_{i=1}^{m}\psi_i(r)\exp\left[\frac{1}{B(r)}\int_{r-\eta_i}^{r}\lambda(s)ds+\frac{\ln(eB(r))}{B(r)}\right]\end{aligned}$$

ya da

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\int_{r}^{r+\eta_i}\psi_i(s)ds\right)\lambda(r)-\sum_{i=1}^{m}\psi_i(r)\int_{r-\eta_i}^{r}\lambda(s)ds\geq\left(\sum_{i=1}^{m}\psi_i(r)\right)\ln\left(e\sum_{i=1}^{m}\int_{r}^{r+\eta_i}\psi_i(s)ds\right) \tag{3.66}$$

elde edilir. (3.66) ifadesinin $N>T$ olmak üzere T den N ye integrali alınırsa

$$\int_{T}^{N}\left(\sum_{i=1}^{m}\int_{r}^{r+\eta_i}\psi_i(s)ds\right)\lambda(r)dr-\int_{T}^{N}\sum_{i=1}^{m}\psi_i(r)\int_{r-\eta_i}^{r}\lambda(s)ds\geq\int_{T}^{N}\left(\sum_{i=1}^{m}\psi_i(r)\right)\ln\left(e\sum_{i=1}^{m}\int_{r}^{r+\eta_i}\psi_i(s)ds\right) \tag{3.67}$$

elde edilir. Elde edilen (3.67) eşitsizliğinde integrasyon sırası değiştirilirse

$$\begin{aligned}\int_T^N \sum_{i=1}^m \psi_i(r) \int_{r-\eta_i}^r \lambda(s)dsdr &\geq \sum_{i=1}^m \int_T^{N-\eta_i} \left(\int_s^{s+\eta_i} \psi_i(r)\lambda(s)dr \right) ds \\ &= \sum_{i=1}^m \int_T^{N-\eta_i} \lambda(r) \int_r^{r+\eta_i} \psi_i(s)dsdr \qquad (3.68)\end{aligned}$$

elde edilir. (3.67) ve (3.68) ifadeleri bir arada düşünülürse

$$\sum_{i=1}^m \int_{N-\eta}^N \lambda(r) \int_{r-\eta_i}^r \psi_i(s)dsdr \geq \int_T^N \left(\sum_{i=1}^m \psi_i(r)\right) \ln\left(e\sum_{i=1}^m \int_r^{r+\eta_i} \psi_i(s)ds\right) dr$$

veya

$$\sum_{i=1}^m \ln\frac{z(N-\eta_i)}{z(N)} \geq \int_T^N \left(\sum_{i=1}^m \psi_i(r)\right) \ln\left(e\sum_{i=1}^m \int_r^{r+\eta_i} \psi_i(s)ds\right) dr \qquad (3.69)$$

bulunur. (3.64) ifadesinden

$$\lim_{r\to\infty} \prod_{i=1}^m \frac{z(r-\eta_i)}{z(r)} = \infty \qquad (3.70)$$

olur. Böylece

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{z(r-\eta_n)}{z(r)} = \infty \qquad (3.71)$$

elde edilir. Bununla birlikte Lemma 3.5 den

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{z(r-\eta_n)}{z(r)} < \infty$$

olur. Bu son eşitsizlik (3.71) ile çelişir bu da ispatı tamamlar. □

Sonuç 3.16. *Eğer*

$$\liminf_{r\to\infty} \sum_{i=1}^m \int_r^{r+\eta_i} \psi_i(s)ds > \frac{1}{e} \qquad (3.72)$$

ise (3.4) *denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Li,1996).*

İspat $\eta_1 < \eta_2 < ... < \eta_m$ olsun. (3.72) den $1 \leq n \leq m$ olacak şekilde n sayısı vardır, öyle ki,

$$\limsup_{r\to\infty} \int_r^{r+\eta_m} \psi_m(s)ds > 0 \qquad (3.73)$$

ve

$$\liminf_{r\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\int_{r}^{r+\eta_i}\psi_i(s)ds > \frac{1}{e} \tag{3.74}$$

olur. (3.4) denkleminin pozitif bir $z(r)$ çözümü olsun. Yani pozitif $z(r)$ çözümü aynı şekilde

$$z'(r)+\sum_{i=1}^{m}\psi_i(r)z(r-\eta_i)\leq 0 \tag{3.75}$$

eşitsizliğinin de pozitif bir çözümü olur. Ayrıca (3.74) ifadesinden bazı $r_0 > 0$ için

$$\int_{r_0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{m}\psi_i(r)\right)\ln\left(e\sum_{i=1}^{m}\int_{r}^{r+\eta_i}\psi_i(s)ds\right)dr=\infty$$

olur böylece Teorem 3.6 ya göre (3.75) eşitsizliğinin tüm çözümleri salınımlıdır. Yani, çelişki elde edilir ve ispat tamamlanır. □

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında sabit gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılık davranışları incelenmiş ve denklemlerin çözümlerinin salınımlı olması için salınımlılık kriterleri verilmiştir.

$$z'(r) + \psi z(r-\eta) = 0 \tag{4.1}$$

ve

$$z'(r) + \sum_{i=1}^{m} \psi_i z(r-\eta_i) = 0, \tag{4.2}$$

sabit gecikmeli ve değişken katsayılı lineer

$$z'(r) + \psi(r) z(r-\eta) = 0 \tag{4.3}$$

ve

$$z'(r) + \sum_{i=1}^{m} \psi_i(r) z(r-\eta_i) = 0 \tag{4.4}$$

diferensiyel denklemler için elde edilen salınımlılık koşullarına yer verilmiştir.

Bu bulgular ise şu şekildedir.

(4.1) denklemine ait çözümlerin salınımlılık koşulları aşağıdaki gibidir.

$\psi,\, \eta \in \mathbb{R}$ olmak üzere, (4.1) denklemine ait her çözümün salınımlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\psi\eta > \frac{1}{e}$$

olmasıdır.

(4.2) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlılığı için elde edilen koşullar ise aşağıdaki gibidir.

$1 \leq i \leq m$ için $\psi_i,\, \eta_i \geq 0$ olmak üzere, aşağıda verilen şartlardan her biri (4.2) denkleminin her çözümünün salınımlı olması için yeter şart olur.

(a)

$$\sum_{i=1}^{m} \psi_i \eta_i > \frac{1}{e}$$

(b)

$$\left(\prod_{i=1}^{m} \psi_i\right)^{\frac{1}{m}} \left(\sum_{i=1}^{m} \eta_i\right) > \frac{1}{e}$$

(4.3) denkleminin salınımlılığı için elde edilen koşul aşağıdaki gibidir.

$\psi \in C[[r_0, \infty), \mathbb{R}^+]$ ve $\eta > 0$ olmak üzere

$$\liminf_{r\to\infty} \int_{r-\eta}^{r} \psi(s)ds > \frac{1}{e}$$

ise (4.3) denkleminin her çözümü salınımlı olur.

Eğer

$$\int_{r-\eta}^{r} \psi(s)ds \geq \frac{1}{e}, \ \ r_0 > 0$$

ve

$$\int_{t_0}^{\infty} \psi(r) \left[\int_{r-\eta}^{r} \psi(s)ds - \frac{1}{e} \right] dr = \infty$$

ise (4.3) denkleminin her çözümü salınımlıdır

(4.4) denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için elde edilen koşul aşağıdaki gibidir.

$\eta_m = \max\{\eta_1, \eta_2, ...\eta_m\}$ olsun. $r_0 > 0$ olmak üzere her $r \geq r_0$ için

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{r}^{r+\eta_i} \psi_i(s)ds > 0$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{r}^{r+\eta_n} \psi_n(s)ds > 0$$

olsun. Diğer yandan, eğer

$$\int_{r_0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{m} \psi_i(r) \right) \ln \left(e \sum_{i=1}^{m} \int_{r}^{r+\eta_i} \psi_i(s)ds \right) dr = \infty$$

ise (4.4) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Bu tez çalışması bundan sonra ele alınacak akademik çalışmalarda daha detaylı bir şekilde ele alınabilir. Ayrıca, diferensiyel denkleme ait gecikme teriminin farklı özelliklerine göre yeni çalışmalar yapılabilir.

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında diferensiyel denklemler incelenmiş ve bu denklemlere ait salınımlılık kriterleri ele alınmıştır. İlk olarak gecikmeli diferensiyel denklemler ile ilgili literatür bilgilerine yer verilmiştir. İkinci bölümde gecikmeli diferensiyel denklemler ile ilgili temel kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde ise sabit katsayılı-sabit gecikmeli ve değişken katsayılı-sabit gecikmeli diferensiyel denklemler ele alınmıştır. Bu denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı için koşullara yer verilmiştir.

6. KAYNAKLAR

Arino, O., Györi, I., and Jawhari, A. 1984. Oscillation criteria in delay equations. *Journal of Differential Equations*, 53: 115-23.

Erbe, L. H. and Zhang, B. G. 1989. Oscillation of discrete analogues of delay equations. *Differential and Integral Equations*, 2: 300-309.

Erbe, L.H., Kong, Q. and Zhang, B.G., 1995. Oscillation Theory of Differential Equations, Marcel Dekker, New York.

Györi, I. 1986. Oscillations condition in scalar linear delay differential equations. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 34 (1): 1-9.

Györi, I. and Ladas, G. 1989. Linearized oscilations for equations with piecewise constant arguments. *Differential and Integral Equations*, 2: 123-31.

Györi, I. and Ladas, G. 1991. Oscillation theory of delay differential equations. Clarendon press, Oxford.

Koplatadze, R. G. and Chanturia, T. A. 1982. On the oscillatory and monotone solutions of the first order differential equations with deviating arguments. *Journal of Differential Equations*, 18 (8): 1463-1465.

Ladas, G. 1979. Sharp conditions for oscillations caused by delays. *Applicable Analysis*, 9 (2): 93-98.

Ladas, G. Sficas, Y.G. and Stavroulakis, I. P. 1983. Necessary and sufficient conditions for oscillations. *American Mathematical Monthly*, 90 (9): 637-640.

Ladas, G. and Sficas, Y. G. 1984. Oscillations of delay differential equations with positive and negative coefficients. Proccedings of the International Conference on Qualitative Theory of Differential Equations. 232-40, June 18-20, University of Alberta.

Ladde, G.S., Laksmikantam, V., and Zhang, B.G. 1987. Oscillations Theory of Delay Differential Equations with deviating arguments, Marcel Dekker, New York.

Li, B., 1995. Oscillations of delay differential equations with variable coefficients. *J. Math. Anal. Appl.*, 192: 312-321.

Li, B., 1996. Oscillation of first order delay differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 124: 3729-3737.

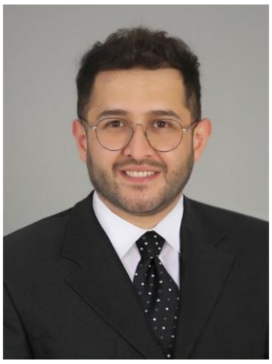
Tramov, M. I. 1975. Conditions for oscillatory solutions of first order differential equations with a delayed argument. *Izvestiya Vysshikh Uchebnyk Zavedenii, Seriya Matematika*, 1975 (3): 92-96.

Yu, J. S. and Tang, X. H. 2000. Sufficient conditions for the oscillation oflinear delay difference equations with oscillating coefficients. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 250 (32): 735-742.

ÖZGEÇMİŞ

GÖKHAN GÜLMEZ

gkhnglmz@hotmail.com



ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2021-2023	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ABD, Antalya
Lisans 2012-2017	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya